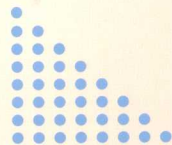


21世纪 应用型本科人才培养规划教材

线性代数

主编 / 陈东立 燕列雅



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

第 1 章 线性方程组

线性代数

（第二版）

清华大学出版社



线性代数

主编 / 陈东立 燕列雅

副主编 / 马春晖

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陈东立主编. — 西安: 西北大学出版社, 2008. 8

ISBN 978-7-5604-2530-6

I. 线… II. 陈… III. 线性代数 IV. 0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第126715号

线性代数

作 者: 陈东立 主编

出版发行: 西北大学出版社

地 址: 西安市太白北路229号

邮 编: 710069

电 话: 029-88302590

经 销: 全国新华书店

印 装: 陕西向阳印务有限公司

开 本: 850毫米×1168毫米 1/32

印 张: 5

字 数: 120千

版 次: 2008年8月第1版 2008年8月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5604-2530-6

定 价: 8.00元

前 言

线性代数是高等学校工科类、经管类学生的一门必修的重要数学类基础理论课。近年来,随着培养应用型人才的本科大学的迅速发展,适用于应用型本科学生的教材问题就显得尤为重要。本书是在陕西省教育厅的领导与组织下,为适应 21 世纪应用型本科教学的需要而编写的,涵盖了教育部制订的大学本科线性代数“教学基本要求”的内容。

全书共分六章,依次为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量以及实二次型。在内容编排与处理上力求简明易懂,不仅便于教学,而且便于读者自学,其特点表现在以下几个方面:

1. 根据培养应用型人才的特点,着重使学生在掌握基本概念、基本方法上下工夫,不过分强调解题技巧,在不降低基本要求的前提下,适当弱化了一些理论性较强的定理、结论的证明。对有些定理的证明,我们打了“*”号,教学时可根据不同学时和专业要求选讲或者不讲。

2. 根据应用型本科学生的实际,每节后配有基本训练题,以加强学生对本节知识的理解与掌握。考虑到部分学生进一步深造的需要,每章后又有适量的针对本章的总习题,且在题目的难易上与每节的基本训练题相比有较为明显的梯度,答案中对部分较难的习题做了提示。

3. 附录中有三套模拟试题,以便学生学完本书后对所学内容的掌握程度进行自我检验。

本教材得到了西北大学出版社、西安建筑科技大学华清学院和部分兄弟院校的大力支持,特别是西北大学出版社为本书的出版做

了大量的工作,编者在此一并表示衷心的感谢!

本书是为适应21世纪应用型本科教学需要而做的一种尝试,由于编者水平有限,书中一定会有不少的缺点和错误,恳请读者批评指正。

编者

2008年7月

目 录

第 1 章 行列式	(1)
1.1 行列式的定义与性质	(1)
1.1.1 二阶行列式与三阶行列式	(1)
1.1.2 n 阶行列式的定义	(4)
1.1.3 行列式的性质	(6)
习题 1.1	(10)
1.2 行列式的计算	(10)
1.2.1 利用行列式的性质计算行列式	(10)
1.2.2 行列式的展开	(12)
习题 1.2	(15)
1.3 克莱姆法则	(15)
习题 1.3	(18)
总习题一	(19)
第 2 章 矩阵	(22)
2.1 矩阵及其运算	(22)
2.1.1 矩阵的概念	(22)
2.1.2 矩阵的代数运算	(24)
2.1.3 矩阵的方幂	(28)
2.1.4 矩阵的转置	(29)
2.1.5 方阵的行列式	(31)
习题 2.1	(32)
2.2 逆矩阵的计算及简单应用	(32)
2.2.1 逆矩阵的定义	(33)
2.2.2 矩阵可逆的条件	(33)

2.2.3	逆矩阵的性质	(36)
2.2.4	矩阵的应用	(37)
	习题 2.2	(39)
* 2.3	分块矩阵	(39)
2.3.1	子矩阵	(39)
2.3.2	分块矩阵	(40)
	习题 2.3	(43)
2.4	矩阵的初等变换与初等矩阵	(44)
2.4.1	矩阵的初等变换与初等矩阵	(44)
2.4.2	矩阵的等价与阶梯形矩阵	(49)
2.4.3	用初等变换求逆矩阵	(50)
	习题 2.4	(51)
2.5	矩阵的秩	(52)
2.5.1	矩阵秩的定义	(52)
2.5.2	矩阵秩的求法	(52)
	习题 2.5	(53)
	总习题二	(54)
第 3 章	向量组的线性相关性	(56)
3.1	n 维向量与向量组的线性相关性	(56)
3.1.1	n 维向量及其运算	(56)
3.1.2	向量组的线性相关与线性无关	(58)
	习题 3.1	(61)
3.2	向量组的秩	(62)
3.2.1	向量组的秩	(62)
3.2.2	向量组的秩与矩阵秩的关系	(62)
	习题 3.2	(63)
* 3.3	向量空间的基与维数	(63)
3.3.1	向量空间的定义	(64)

3.3.2 向量空间的基与维数	(65)
3.3.3 向量的坐标	(65)
习题 3.3	(66)
总习题三	(66)
第 4 章 线性方程组	(68)
4.1 线性方程组有解的条件	(68)
4.1.1 线性方程组的系数矩阵与增广矩阵	(68)
4.1.2 线性方程组有解的条件	(73)
习题 4.1	(78)
4.2 线性方程组解的结构	(79)
4.2.1 齐次线性方程组解的结构	(79)
4.2.2 非齐次线性方程组解的结构	(83)
习题 4.2	(85)
总习题四	(86)
第 5 章 特征值与特征向量	(89)
5.1 矩阵的特征值与特征向量	(89)
5.1.1 特征值与特征向量的概念	(89)
5.1.2 特征值与特征向量的求法	(90)
5.1.3 特征值与特征向量的性质	(92)
习题 5.1	(94)
5.2 矩阵的相似对角化	(95)
5.2.1 矩阵的相似	(95)
5.2.2 矩阵的相似对角化	(96)
习题 5.2	(99)
5.3 向量的内积与正交矩阵	(100)
5.3.1 向量的内积	(100)
5.3.2 正交向量组与施密特正交化方法	(101)
5.3.3 正交矩阵	(104)

习题 5.3	(105)
5.4 实对称矩阵的对角化	(105)
习题 5.4	(109)
总习题五	(109)
第 6 章 实二次型	(111)
6.1 二次型及其标准形	(111)
6.1.1 二次型的定义及其矩阵表示	(111)
6.1.2 二次型的标准形	(114)
习题 6.1	(115)
6.2 化二次型为标准形	(115)
6.2.1 用正交变换化二次型为标准形	(115)
*6.2.2 用拉格朗日配方法化二次型为标准形	(118)
习题 6.2	(120)
6.3 正定二次型 正定矩阵	(120)
习题 6.3	(124)
总习题六	(124)
附录	(126)
线性代数模拟试卷(一)	(126)
线性代数模拟试卷(二)	(130)
线性代数模拟试卷(三)	(133)
习题答案	(136)
参考文献	(152)

第 1 章 行列式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的,是线性代数的一个基本工具之一. 后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中都要用到行列式.

本章首先由求解二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式,进而给出 n 阶行列式的定义、性质及计算方法,最后作为行列式的应用,给出求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 行列式的定义与性质

1.1.1 二阶行列式与三阶行列式

在中学,我们学过解二元、三元一次方程组. 下面简单地回顾一下求解过程. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

消去 x_2 , 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$; 消去 x_1 , 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$, 若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称其为二阶行列式.

式(1.2)中的分子也可用行列式表示: $b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,

$$b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \text{ 记}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解式(1.2)可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同样,在解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

时,要用到“三阶行列式”,称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.3)$$

为三阶行列式.

利用行列式来表示线性方程组的解的方法可以推广到一般情形,这将在后面介绍.

例 1.1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由式(1.3),

$$D = 2 \times 6 \times 1 + 3 \times 1 \times 4 + 2 \times 0 \times 0 - 2 \times 6 \times 4 - 3 \times 0 \times 1$$

$$\begin{aligned} & -2 \times 1 \times 0 \\ & = -24. \end{aligned}$$

由式(1.3)及二阶行列式,可对三阶行列式作如下定义.

定义 1.1 三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 称为三阶行列式 D 的元素.

例 1.2 利用定义计算例 1.1.

解 由定义 1.1,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 6 - 3 \times (-4) + 2 \times (-24) = -24. \end{aligned}$$

如果我们用 M_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 表示在 D 中把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,所剩下的二阶行列式,即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

则定义 1.1 中的三阶行列式 D 可写成:

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= \sum_{k=1}^3 a_{1k}A_{1k}, \end{aligned}$$

其中 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数

余子式.

1.1.2 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式,我们规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$,容易看出二阶行列式也可以表示为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \end{aligned}$$

其中 M_{11} 和 M_{12} 分别为元素 a_{11} 与 a_{12} 的余子式, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$ 和 $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$ 分别为元素 a_{11} 与 a_{12} 的代数余子式.

我们把定义 1.1 加以推广,给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 构成的 n 行 n 列的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式,它表示一个数值. 当 $n = 2, 3, \dots$ 时,有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}. \end{aligned}$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式, M_{ij} 表示在 D 中划去

第 i 行第 j 列 ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 后所剩下的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式. n 阶行列式也可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

显然, 当 $n = 2, 3$ 时, 就是二、三阶行列式.

例 1.3 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 24 - 16 - 36 + 24 = -4. \end{aligned}$$

由 n 阶行列式的定义, 可以计算下述两个特殊行列式的值.

例 1.4 计算对角行列式(主对角线上的元素是 λ_i , 其余的元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

的值.

解 由 n 阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-2} \begin{vmatrix} \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

例 1.5 计算下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 由 n 阶行列式的定义,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{(n-2)(n-2)} \begin{vmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

1.1.3 行列式的性质

上面行列式的算例要么阶数较低,要么是特殊行列式,而要利用定义计算一般的高阶行列式往往比较复杂,为了简化计算,我们需要研究行列式的性质.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T.$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式(依次将行换成列).

以三阶行列式为例说明.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} \\ D^T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

所以 $D = D^T$.

例 1.6 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 由性质 1.1 和例 1.5,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由性质 1.1 知,在行列式中行与列具有同等“地位”,凡是对行成