21世纪应用型本科人才培养规划教材

# 线性代数

主编／陈东立　燕列雅

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

# 线性代数

# 线性代数

主编／陈东立　燕列雅
副主编／马春晖

西北大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数 / 陈东立主编.—西安：西北大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-5604-2530-6

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第126715号

**线性代数**

作　　者：陈东立　主编

出版发行：西北大学出版社

地　　址：西安市太白北路229号

邮　　编：710069

电　　话：029-88302590

经　　销：全国新华书店

印　　装：陕西向阳印务有限公司

开　　本：850毫米×1168毫米　1/32

印　　张：5

字　　数：120千

版　　次：2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5604-2530-6

定　　价：8.00元

# 前　　言

线性代数是高等学校工科类、经管类学生的一门必修的重要数学类基础理论课。近年来,随着培养应用型人才的本科大学的迅速发展,适用于应用型本科学生的教材问题就显得尤为重要。本书是在陕西省教育厅的领导与组织下,为适应21世纪应用型本科教学的需要而编写的,涵盖了教育部制订的大学本科线性代数“教学基本要求”的内容。

全书共分六章,依次为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量以及实二次型。在内容编排与处理上力求简明易懂,不仅便于教学,而且便于读者自学,其特点表现在以下几个方面:

1. 根据培养应用型人才的特点,着重使学生在掌握基本概念、基本方法上下工夫,不过分强调解题技巧,在不降低基本要求的前提下,适当弱化了一些理论性较强的定理、结论的证明。对有些定理的证明,我们打了“*”号,教学时可根据不同学时和专业要求选讲或者不讲。

2. 根据应用型本科学生的实际,每节后配有基本训练题,以加强学生对本节知识的理解与掌握。考虑到部分学生进一步深造的需要,每章后又有适量的针对本章的总习题,且在题目的难易上与每节的基本训练题相比有较为明显的梯度,答案中对部分较难的习题做了提示。

3. 附录中有三套模拟试题,以便学生学完本书后对所学内容的掌握程度进行自我检验。

本教材得到了西北大学出版社、西安建筑科技大学华清学院和部分兄弟院校的大力支持,特别是西北大学出版社为本书的出版做

了大量的工作,编者在此一并表示衷心的感谢!

本书是为适应21世纪应用型本科教学需要而做的一种尝试,由于编者水平有限,书中一定会有不少的缺点和错误,恳请读者批评指正。

编者

2008年7月

# 目　录

# 第1章　行列式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，是线性代数的一个基本工具之一．后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中都要用到行列式．

本章首先由求解二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式，进而给出 $n$ 阶行列式的定义、性质及计算方法，最后作为行列式的应用，给出求解 $n$ 元线性方程组的克莱姆法则．

## 1.1　行列式的定义与性质

### 1.1.1　二阶行列式与三阶行列式

在中学，我们学过解二元、三元一次方程组．下面简单地回顾一下求解过程．对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

消去 $x_2$，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$；消去 $x_1$，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称其为**二阶行列式**．

式(1.2)中的分子也可用行列式表示：$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$ 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解式(1.2)可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同样,在解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

时,要用到"三阶行列式",称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.3)$$

为三阶行列式.

利用行列式来表示线性方程组的解的方法可以推广到一般情形,这将在后面介绍.

**例 1.1** 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**解** 由式(1.3),

$D=2\times6\times1+3\times1\times4+2\times0\times0-2\times6\times4-3\times0\times1$

$$-2\times1\times0$$
$$=-24.$$

由式(1.3)及二阶行列式,可对三阶行列式作如下定义.

**定义 1.1** 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式 $D$ 的元素.

**例 1.2** 利用定义计算例 1.1.

**解** 由定义 1.1,

$$D=\begin{vmatrix}2&3&2\\0&6&1\\4&0&1\end{vmatrix}$$
$$=2\begin{vmatrix}6&1\\0&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&1\\4&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0&6\\4&0\end{vmatrix}$$
$$=2\times6-3\times(-4)+2\times(-24)=-24.$$

如果我们用 $M_{ij}(i,j=1,2,3)$ 表示在 $D$ 中把 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列划去后,所剩下的二阶行列式,即

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

则定义 1.1 中的三阶行列式 $D$ 可写成:

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$
$$=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}A_{1k},$$

其中 $M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的**余子式**,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的**代数**

余子式.

### 1.1.2 $n$ 阶行列式的定义

为了定义 $n$ 阶行列式,我们规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$,容易看出二阶行列式也可以表示为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \end{aligned}$$

其中 $M_{11}$ 和 $M_{12}$ 分别为元素 $a_{11}$ 与 $a_{12}$ 的余子式,$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$ 和 $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}$ 分别为元素 $a_{11}$ 与 $a_{12}$ 的代数余子式.

我们把定义 1.1 加以推广,给出 $n$ 阶行列式的定义.

**定义 1.2** 由 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 构成的 $n$ 行 $n$ 列的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 $n$ 阶行列式,它表示一个数值. 当 $n = 2,3,\cdots$ 时,有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \end{aligned}$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式,$M_{ij}$ 表示在 $D$ 中划去

第 $i$ 行第 $j$ 列 $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 后所剩下的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 $a_{ij}$ 的余子式．$n$ 阶行列式也可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

显然，当 $n=2,3$ 时，就是二、三阶行列式．

**例 1.3** 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&3&4&0\\0&1&2&0\\3&0&0&4\end{vmatrix}.$$

**解**

$$D=1\begin{vmatrix}3&4&0\\1&2&0\\0&0&4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0&4&0\\0&2&0\\3&0&4\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0&3&0\\0&1&0\\3&0&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&3&4\\0&1&2\\3&0&0\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}0&1\\3&0\end{vmatrix}$$

$$=24-16-36+24=-4.$$

由 $n$ 阶行列式的定义，可以计算下述两个特殊行列式的值．

**例 1.4** 计算对角行列式（主对角线上的元素是 $\lambda_i$，其余的元素都为 0）

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}$$

的值．

**解** 由 $n$ 阶行列式的定义，

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\begin{vmatrix}\lambda_2&&&\\&\lambda_3&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\begin{vmatrix}\lambda_3&&&\\&\lambda_4&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-2}\begin{vmatrix} \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

**例 1.5** 计算下三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值.

**解** 由 $n$ 阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{(n-2)(n-2)}\begin{vmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

### 1.1.3 行列式的性质

上面行列式的算例要么阶数较低,要么是特殊行列式,而要利用定义计算一般的高阶行列式往往比较复杂,为了简化计算,我们需要研究行列式的性质.

**性质 1.1** 行列式与它的转置行列式相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^T.$$

行列式 $D^T$ 称为行列式 $D$ 的**转置行列式**(依次将行换成列).

以三阶行列式为例说明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

所以 $D=D^T$.

**例 1.6** 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

**解** 由性质 1.1 和例 1.5,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由性质 1.1 知,在行列式中行与列具有同等“地位”,凡是对行成