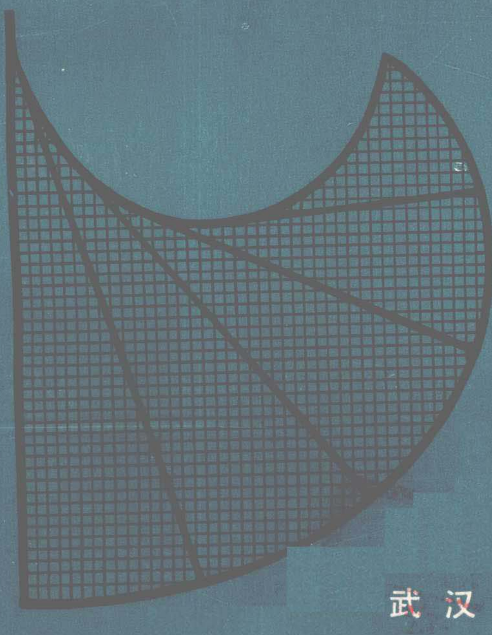
微分几何教程

〔美〕 熊全治 著
熊一奇 杨文茂 译



武汉大学出版社

微分几何教程

微分几何教程

[美] Chuan-Chih Hsiung 著

熊一奇　杨文茂　译

武汉大学出版社

微 分 几 何 教 程
[美]Chuan-Chih Hsiung著
熊一奇　杨文茂　译
*
武汉大学出版社出版
(武昌　珞珈山)
新华书店湖北发行所发行
武汉大学出版社印刷总厂印刷
*
850×1168毫米 1/32　13.5印张　342千字
1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷
印数：1—3000
统一书号：13279·33　定价：2.70元

中 译 本 序 言

熊全治教授著书“A First Course in Differential Geometry”的中译本问世了。我能为它写几句卷头语感到荣幸。这是一本不深不浅的微分几何教材，处处从定义出发，非常周到地叙述一些概念和定理，使初学者没有难懂之处，所以不深，适宜于大学教材之用。但它又不浅，因为其中有很大一部分是关于曲线和曲面的整体微分几何学，为进一步学习现代数学的这个最活跃的分支打下了良好的基础。

我相信，这部中译本出版后，将对于高等院校微分几何的教学起到提高质量的作用，使微分几何这个分支同数学的其他分支，如数学分析、拓扑、代数、偏微分方程等，互相联系、互相配合而形成现代数学的美好前景。

苏 步 青

1983年8月于上海

原　序

按照Felix Klein于1872所给的定义，几何学可用几何变换群来分类. 研究几何图形（如曲线、曲面，等等）在已给几何变换群G下的不变性质，叫做属于群G的几何学. 例如，如果G是射影、仿射或欧氏群，我们就有相应的射影、仿射或欧氏几何学.

属于群G的一几何图形F的微分几何，是在F的元素的邻域内研究F在G之下的不变性质. 特别是，曲线的微分几何是研究这曲线在其某点的邻域内的不变性质. 在解析几何里，曲线在一点的切线通常是定义为通过这点和在曲线上的一邻近点的割线当第二个点沿着曲线趋近于第一个点时的极限. 这定义揭示了微分几何的本质就在于它只需要对曲线在一点的邻域内的了解再包括一个极限过程(这一类的性质称为局部的). 微分几何的这些特征说明了它为什么如此广泛地要应用微积分学. 另一方面，几何图形的局部性质可以和整体性质相对照.后者需要对整个图形的了解.

微分几何的起源要追溯到微分学的早期，在那时候基本问题之一就是确定曲线的切线. 随着微积分学的发展，逐渐获得了更多的几何应用. 在这早期的主要贡献者中有Leonhard Euler(1707—1783)，Caspard Monge (1746—1818)，Joseph Louis Lagrange(1736—1813)和Augustin Cauchy(1789—1857). Karl Friedrich Gauss(1777—1855)开创了曲面内蕴几何的工作，使几何学的研究向前迈进了具有决定性的一步. Bernhard Riemann (1826—1866)将Gauss关于内蕴几何的思想拓广到n(>3)维空间，于是形成以他的名字命名的几何，即Riemann几何.

本书所介绍的微分几何，不仅是为高年级大学生而且也是为低年级研究生而安排的(这个介绍在前一种情况下对于弥补通常大学生课程中几何的薄弱是重要的).近二十年来微分几何随着数学其它各分枝一道获得高度的发展。本书中我们仍然只讨论传统的论题,即三维欧氏空间E^3中的曲线和曲面.然而,对于局部性质和整体性质之间的关系却给予了更多的注意，而不和在这科目方面的大多数古典书籍一样只注意局部性质。虽然我们限制注意力于E^3中的曲线和曲面，但本书中大多数关于曲线和曲面的整体定理可以拓广到或者是更高维的空间，或者是更一般的曲线和曲面，或者是同时是这两种情况。此外，我们将几何解释和解析表达式一道给出，这就能使学生学会运用几何直观，而几何直观是研究几何及有关问题的一个宝贵工具，这样的工具在数学其它分枝中是很少遇到的。

我们运用了向量分析和外微分计算。除为了简便引进一些张量记号外，我们不使用张量计算，因为应用它对于我们在空间E^3中的研究并没有什么好处。本书共有四章，它们的内容可概述如下.

为着复习的目的以及后面的应用，第一章汇集了取自点集拓扑、高等微积分和线性代数的一些基础知识。为此，所有定理的证明都是完整自备的，且所有定理都表达为便于后面直接应用的形式。大多数学生对于这些材料除第6节关于微分形式外可能都是熟悉的。

第二章我们首先建立E^3中曲线的一般局部理论,然后分别给出关于平面曲线和空间曲线的几个整体定理，这是由于平面曲线的整体定理并非空间曲线整体定理的特殊情况。我们还将证明局部理论中基本定理之一，即E^3中曲线的唯一性定理.这个存在定理的证明于附录1中给出。

第三章专论E^3中曲面的局部理论。对于这理论只叙述了基本定理(定理7.3),至于这定理的唯一性及存在性两部分的证明分

别在第四章（第 4 节）和附录 2 中给出。

第四章从曲面的定向和常Gauss曲率曲面的讨论开始，然后介绍关于曲面的各种整体定理。

在大多数节的末尾有经过仔细选定的一组习题，其中有些是该节课文的补充，在书末给出了答案。为着使学生解题时不依赖于某些习题所附的提示，这些习题各标以星号而将提示和答案一道置于书末。括号里的数字系书末所列参考文献的序号。

用两种不同的数码系统划分各节：在第一章（4 和 7 两节除外）和第二章以三个数字组标志一个项目（例如，一个定理或一个定义），而在第三、四章中这样的一个项目用一对数来标志。然而在用本书作参考时并不会有困难，因为项目所在的章号总是把它写出来的（例如，第一章的推论5.1.6或第三章的引理1.5）。

如果第一章的大多数节都详细学习的话，本书可用作全年的课程。

作为一学期的课程建议采用以下各节：

第一章：3.1，3.2，3.3，6各节。

第二章：1.1节（略去1.1.4—1.1.6），1.2节（略去1.2.6，1.2.7），1.3节（略去1.3.7—1.3.12），1.4节和1.5节（略去1.5.5）；第2节（略去2.3，2.5，2.6.4—2.6.6，2.9—2.11，2.14—2.23）；第3节（略去3.1.8—1.3.14）。

第三章：第1节（略去1.6的证明，1.7，1.8，1.10的证明，1.11—1.13，1.15—1.18)；第2节(略去2.4的证明)；第3—9节；第10节（略去10.7以后的内容）。

第四章：第1节(略去1.3和1.4的证明)；第3节(略去3.14)；第4和第5节。

作为半学期课程建议从上面一学期的纲目中再略去以下内容：第二章：2.6的第二个证明，3.2；第三章：1.3和1.4的各细节，5.7的证明，第6节，8.1和8.2的证明；第四章：第5节。

感谢Donald M. Davis, Samuel L. Gulden, Theodore

Hailperin, Samir A. Khabbaz, A. Everett Picher,和Albert Wilansky给本书提出许多宝贵的意见；感谢Helen Gasdaska细心和熟练地打印本书原稿；感谢John Wiley的全体工作人员，特别是Bcatrice Shube协作和帮助出版本书。

熊 全 治

Bethlehem, Pennsylvania

1980，11月

目　　录

一般的记号与定义

记　　号

符　号	用　法	意　　义
$\in$	$x\in A$	x是集合A的元集
$\overline{\in}$	$x\overline{\in}A$	x不是集合A的元素
$\subset$	$B\subset A$	集合B是集合A的子集
ϕ	ϕ	空集
$\cap$	$A\cap B$	两集合A和B的交集
	$\cap A_i$	所有集合A_i的交集
$\cup$	$A\cup B$	两集合A和B的并集
	$\cup A_i$	所有集合A_i的并集
$\{\}$	$\{x\mid\cdots\}$	所有满足…的x的集合
$\Rightarrow$	$\cdots\Rightarrow—$	…推得—
$\Leftarrow\Rightarrow$	$\cdots\Leftarrow\Rightarrow—$	…当且仅当—
$\longrightarrow$	$A\rightarrow B$	集合A到集合B的函数
$\mapsto$	$x\mapsto x^2$	对于x指定x^2为值的函数
$[\,,\,]$	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqq x\leqq b\}$
$(\,,\,)$	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$

定　　义

集合A到集合B的函数就是对于A的每一元素x指定B的唯一一个元素$f(x)$的一个规律　元素$f(x)$称为f在x处的**值**，或x在f**下的象**．集合A称为f的**定义域**，集合B常称为f的**值域**，而由所

有形如$f(x)$的元素组成的B的子集称为A在f下的象，记为$f(A)$。

设f_1与f_2都是A到B的函数，则$f_1=f_2$就是对所有$x\in A$,$f_1(x)=f_2(x)$。

设f：$A\to B$与g：$B\to C$是两个函数，则函数$g(f)$：$A\to C$，它在每一$x\in A$上的值是元素$g(f(x))\in C$，称为f与g的**复合函数**，记为$g\circ f$。

设f：$A\to B$是一函数，C为A的子集，D为B的子集，f在C上的**限制**(restriction)就是按和f同样的规律但定义在C的元素上的函数$f|C$：$C\to B$，而由使$f(x)\in D$的所有$x\in A$所组成的A的子集，称为D的**逆象**，记为$f^{-1}(D)$。

函数f：$A\to B$称为**一对一**的(one to one)或**单射**的(injective)，如果当$x\neq y$时，$f(x)\neq f(y)$

单射函数称为**单射**(injection)。若对于每元素$b\in B$，存在至少一个元素$a\in A$使$f(a)=b$，称f为**映上**的(onto)或**满射**的(surjective)。**满射**函数称为**满射**(surjection)。同时是单射的和满射的函数称为**双射**的(bijective)。双射函数称为**双射**(bijection)。

注意，在双射函数f：$A\to B$下，每一元素$b\in B$是一个而且唯一元素$a\in A$的象。于是我们有定义于全B的反函数f^{-1}，它对于每一元素$b\in B$指定唯一元素$a\in A$使$b=f(a)$.

设k为一非负整数。若n维欧氏空间E^n到实直线E^1的一函数是连续的而且它的直到k阶(或所有阶)偏导数都存在且连续，则称为是C^k(或C^∞)类的，或一C^k(或C^∞)函数。C^0函数就只是一连续函数。

“集合”和“空间”，如同“函数”和“映射”一样，是同义词。

第一章 欧氏空间

本章包括三维欧氏空间的基础知识（很自然地可推广到高维情况），为本书后文所需要。虽然大多数学生也许熟悉这些材料的大部分内容。但仍把它们汇集为一章是为了便于复习，并使我们更清楚地了解某些概念之间的联系。根据学生的情况可以挑选几节来较全面地学习。

1. 点 集

1.1. **邻域与拓扑** 设E^3是3维欧氏空间。在通常意义下，于E^3中取定右手直角坐标系$\mathbf{O}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$（图1.1），即取定称为$E^3$的原点$\mathbf{O}$和互相垂直的坐标轴$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\mathbf{x}_3$．其正方向依序成右手三面体。在$E^3$中点$\mathbf{x}$关于$\mathbf{O}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$有坐标$(x_1, x_2, x_3)$。更一般地我们有如下定义。

1.1.1. **定义** **n维欧氏空间**E^n是所有有序n-实数组$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$的集合。每一个这样的$n$-数组是$E^n$中的一个点。

本书限于讨论$n=1$，2，3的情况。

设u_1，$\cdots$，u_n是E^n上的n个实函数，对于每个点$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$u_1(x)=x_1,\ \cdots,\ u_n(x)=x_n,$$

这些函数u_1，$\cdots$，u_n称为E^n的**自然坐标函数**。

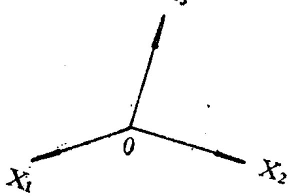


图 1.1

E^n中两点$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$与$\mathbf{y}$

$=(y_1,\cdots,y_n)$之间的距离$d(\mathrm{x},\mathrm{y})$由公式

$$d^2(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2,\ d(\mathrm{x},\mathrm{y})\geqq 0 \tag{1.1.1}$$

确定。显然，当且仅当$x_i=y_i(i=1,\cdots,n)$，也即x重合于y时$d(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$，其次有$d(\mathrm{x},\mathrm{y})=d(\mathrm{y},\mathrm{x})$与三角不等式：对于$\mathrm{z}\in E^n$有

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y})+d(\mathrm{y},\mathrm{z})\geqq d(\mathrm{x},\mathrm{z}). \tag{1.1.2}$$

1.1.2　**定义**　E^n中点p_0的**开球形邻域**为

$$\{p\in E^n\,|\,d(p,\ p_0)<\rho\}, \tag{1.1.3}$$

其中$\rho>0$。更一般地，包含点p_0的一球形邻域的任意一集合称为点p_0的**邻域**(neighborhood)。

对于$n=3$用开球形邻域描述是合适的。而对于$n=2$，p_0的一邻域是指包含某一开圆盘$\{p\in E^2|\,d(p,\ p_0)<\rho\}$的一任意集合，对于$n=1$，邻域是一个含$p_0$的开区间。

我们容易得到引理1.1.3.

1.1.3.　**引理**　E^n中点p的邻域具有下列性质：

(i)　p_0属于p_0的任一邻域。

(ii)　若U为p_0的一邻域，而V是满足$V\supset U$的一集合，则V也是p_0的邻域。

(iii)　若U与V都是p_0的邻域，则$U\cap V$也是p_0的一邻域.

(iv)　若U是p_0的一邻域，则存在p_0的一个邻域$V\subset U$，且V是它自己的每一个点的邻域。

1.1.4　**定义**　集合S称为**拓扑空间**　如果对于每一个元素$p_0\in S$有由S的开子集(见定义1.2.1)组成的叫做**邻域**的集合满足引理1.1.3中所列四个性质．S的所有点的邻域集的全体称为空间S的**拓扑**

欧氏空间E^n与E^3中中心在原点的单位球都是拓扑空间.

1.1.5.　**定义**　设S是拓扑空间，T是S之子集，p为T的点．当V是点p在S中的邻域时，则$U=T\cap V$是点p在T中的邻域．在T上这样定义的各邻域U满足引理1.1.3中的四个性质．于是T用这

种方法定义邻域成为拓扑空间，称为S的**子空间**，其所有的邻域形成S关于T的**相对拓扑**。

在本节的其余部分，如无特别的说明，所有的空间都是拓扑空间，所有的集合都是一般拓扑空间中的集合，不过我们感兴趣的将只是对于$n=1,2,3$的空间E^n。

1.1.6. **定义** 关于空间S之子集T，每一点p具有下列性质之一：

（i） p是T的**内点**，若$p\in T$，且T是p的一邻域，T之所有内点集合称为T的**内域**。

（ii） p是T的**外点**，若$p\overline{\in}T$，且有p的一邻域与T不相交，（即和T无公共点）。

(iii) p是T的**界点**，若p既不是T的内点又不是T的外点。T之所有界点集合称为T的**边界**，记为∂T。

从上定义可见T的内点可以完全用T的点来包围着，没有T的点能任意接近T的一个外点，T的界点可以属于也可以不属于T。

下面是从给出的空间得到新的空间的一个常用的方法。

设S和T都是非空空间．集合$S\times T$称为S与T的Cartesian积，它是定义为所有有序对$(p,q)(p\in S,q\in T)$的集合。这集合按下法构成空间。若$(p,q)\in S\times T$，则(p,q)的一邻域是包含一形如$U\times V$的集合的任意一集合，其中U是p在S中的一邻域，V是q在T中的一邻域。不难看出引理1.1.3的邻域公理(i)—(iv)是满足的。

1.1.7. **定义** 按以上所述作成的空间$S\times T$称为S与T的**拓扑积**。

例 1. 若$S=T=E^1$，则$S\times T$是具有通常拓扑的平面E^2。

2. 若$S=E^2$，$T=E^1$，则$S\times T=E^3$．一般地，$E^m\times E^n=E^{m+n}$。

3. 若S为E^1上一区间，T是一圆，则$S\times T$是一柱面。

4. 环面是圆与圆的拓扑积。