

齿轮计算与工艺

谢竹铭 编著



辽宁科学技术出版社

齿 工 已 算 书 集 函

齿 工 已 算 书

齿轮计算与工艺

Chilun Jisuan Yu Gongyi

谢竹铭 编著

辽宁科学技术出版社出版 (朝阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行 朝阳新华印刷厂印刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: $21 \frac{3}{4}$ 字数: 500,000

1987年11月第1版

1987年11月第1次印刷

责任编辑: 张家振

责任校对: 王 莉

封面设计: 张 悦

印数: 1—1,500

统一书号: 15288·194

定价: 4.30 元

前 言

齿轮，由于在各种各样的机械上得到广泛的应用，而为人们所熟悉。齿轮的原理较深，制造精密齿轮也不容易，而且制造过程又与有关理论知识联系着，因此，机械行业的科技人员对齿轮也越来越给予重视。

高等院校的学生在学习金属工艺学、机械原理、机器制造工艺学等课程中均要接触到齿轮的计算及工艺知识，但由于这些课程均有自己的要求，且受学时数的限制，所以对此难于全面地进行更多的讲述。

科学技术正在飞跃的进步，齿轮的理论及工艺也在不断地发展，因此，广大科技人员及高等院校的学生，对齿轮方面的知识也有待于深化。

齿轮方面的书籍虽有不少，可是有的专著阅读要有很好的基础；有的书籍对解决工艺问题显得不足；有的书籍对计算公式的推导较少，使读者不易理解。因此，笔者以自己这方面不成熟的看法写成这本书，提供高等院校学生及科技人员参考。

书中包括原理、计算和工艺三部分，第一部分讲述的齿轮原理，是在高等院校有关课程的基础上，加深一些理论知识，为进一步学习齿轮方面的理论及从事齿轮研究工作创造条件；

第二部分推导了实践中常用的几何计算公式，并列出一一些简化计算公式。

第三部分介绍了各种齿轮的主要切齿工艺，其中对切齿过程中的几何关系及计算公式作了详细推导，并列出了确保传动质量的计算公式，同时对切齿工艺中的特殊情况，也分别介绍了相应的解决办法。

这些内容若能对广大读者有一点点帮助的话，本人将倍感愉快。笔者限于水平，书中难免存在着错误与缺点，如蒙赐教，不胜感谢。

谢 竹 铭

一九八五年七月

目次

第一章 齿轮原理	1
1. 齿廓曲线	1
2. 定传动比与变传动比传动	11
3. 渐开线啮合与直齿圆柱齿轮传动	13
4. 共轭齿廓曲线及其确定	17
5. 圆柱螺旋线的分析	25
6. 齿面上的一些几何量	35
7. 螺旋面与斜齿圆柱齿轮传动	43
8. 共轭齿面及其确定法	52
第二章 标准齿轮及变位齿轮传动的几何计算	59
1. 标准直齿圆柱齿轮的几何计算	59
2. 变位直齿圆柱齿轮的几何计算	62
3. 直齿内齿轮传动的几何计算	73
4. 内齿轮传动的干涉	79
5. 少齿差内啮合齿轮传动	82
6. 零齿差内齿轮传动	82
7. 斜齿圆柱齿轮的几何计算	87
8. 变位斜齿内齿轮的几何计算	98
9. 蜗轮副的几何计算	101
10. 直齿锥齿轮的几何计算	112
11. 弧齿锥齿轮几何计算	118
12. 准双曲面齿轮传动	123
第三章 齿轮的铣削	131
1. 加工齿轮的仿形法	131
2. 万能分度头的传动及分度法	131
3. 标准及变位直齿圆柱齿轮的铣削	133
4. 齿条的铣削	136
5. 斜齿圆柱齿轮的铣削	140
6. 直齿锥齿轮的铣削	144
7. 蜗轮副的铣削	145

第四章 齿轮的滚削	148
1. 滚齿原理	148
2. 滚刀及其齿形	150
3. Y38 型滚齿机的传动	157
4. 标准及变位直齿圆柱齿轮的滚削	159
5. 直齿圆柱齿轮滚削中的干涉与齿顶欠切校验	162
6. 短齿、双模数、双径节直齿轮的滚削	168
7. 标准及变位斜齿圆柱齿轮的滚削	169
8. 滚削斜齿圆柱齿轮时的干涉校验	172
9. 大质数直齿轮的滚削计算	175
10. 大质数斜齿圆柱齿轮的滚削	176
11. 滚削斜齿轮的无差动调整法	178
12. 普通蜗轮的滚削	181
13. 球面蜗轮副的切削	183
第五章 齿轮的插削	196
1. 插齿原理	196
2. 插齿刀及其齿形	197
3. Y54 型插齿机的传动与调整	198
4. 直齿圆柱齿轮的插削	201
5. 大质数直齿圆柱齿轮的插削	203
6. 插削直齿圆柱齿轮时的干涉校验	204
7. 直齿内齿轮的插削	211
8. 插削直齿内齿轮时的校验	214
9. 斜齿圆柱齿轮的插削	222
10. 齿条的插削与干涉校验	225
第六章 齿轮的剃削	231
1. 剃齿刀与剃齿原理	231
2. 剃削啮合的几何关系	232
3. 齿轮的剃削方法	240
4. 剃齿中的校验	244
第七章 齿轮的磨削	246
1. 磨齿原理与磨削方法	246
2. Y7131 型磨齿机的传动系统	247
3. 直齿圆柱齿轮的磨削	252
4. 斜齿圆柱齿轮的磨削	253

5. 修缘齿轮的磨削·····	254
6. 齿条的磨削·····	256
第八章 直齿锥齿轮的刨削·····	258
1. 刨齿原理·····	258
2. 刨齿刀及其几何参数·····	259
3. Y236型直齿锥齿轮刨齿机的传动·····	261
4. 直齿锥齿轮的刨削·····	266
第九章 弧齿锥齿轮的铣削·····	274
1. 铣齿原理·····	274
2. Y228型弧齿锥齿轮铣齿机的传动·····	276
3. 铣刀盘及其主要尺寸·····	283
4. 刀盘的安装位置及基准刀位计算·····	285
5. 轮位与床位·····	287
6. 滚切节锥及其改变·····	289
7. 齿轮压力角与刀号计算·····	292
8. 压力角变化与对角线接触的发生·····	295
9. 消除对角线接触的方法·····	297
10. 切齿时工件螺旋角的歪斜·····	304
11. 纵向曲率与形成直径修正·····	305
12. 消除对角线接触时单面刀盘精切小轮的刀位修正·····	307
13. 固定安装法切齿计算·····	308
14. 单刀号切削法·····	312
简算表一·····	322
简算表二·····	332

第一章 齿轮原理

1. 齿廓曲线

〔1〕渐开线及其特性

应用齿轮来传递运动，已有二千多年的历史，我国西汉初期（公元前二世纪）就有铸造齿轮的记载。自从欧拉于1765年发明渐开线齿轮后，由于它有许多优点，在这二百年来，几乎是渐开线齿轮统治了整个机械制造业。圆弧齿轮发明后，又开始在部分重载齿轮上以它来代替渐开线齿轮。但由于圆弧齿轮必须作成斜齿，且难于磨削，故其应用受到一定的限制。目前各类机械上所应用的仍然以渐开线齿轮为主，因此本书从渐开线开始对它进行讨论。



图 1—1

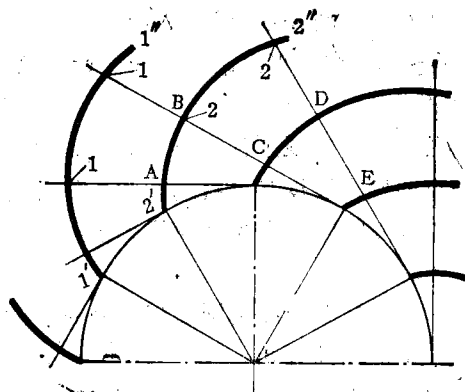


图 1—2

如图 1—1 所示，有一条光滑的凸曲线 Γ ，如果一条直线在此曲线上作纯滚动，则直线上任意一点 M 的轨迹就是此曲线的渐开线 J 。在齿轮上所使用的是圆的渐开线。所谓圆的渐开线，就是一条直线在圆上作纯滚动（无滑动）时直线上任意点的轨迹。图 1—2 中的 $1'1''$ 、 $2'2''$ 就是直线按顺时针方向在圆上作纯滚动时，其上的点 1 、 2 所形成的渐开线。同样，当直线按逆时针方向在圆上作纯滚动时，则可得另一方向的渐开线。在同一圆周上同方向的二条渐开线互为等距线，即如图中所示的 $1B=1A$ 、 $2C=2D$ ……，这就给渐开线齿轮的应用创造了良好的条件。很明显，形成渐开线的圆的半径越大，渐开线越平直；半径越小，渐开线则越弯曲。这个形成渐开线的圆称为基圆。

渐开线上的三线、三角、三半径是经常要应用的，现用图 1—3 略作说明。

渐开线的发生线 图 1—3 中的直线 MT 就是渐开线的发生线。由于它在圆上滚动才发生了渐开线，故而得名。发生线必是基圆的切线。

渐开线的法线 渐开线上任意点M的法线(如图中的 $n-n$)必定是基圆的切线,因此它就是渐开线的发生线。这条直线也可以是同一基圆上二条或二条以上渐开线的公共法线(如图1-2中的1C、2E)。

渐开线的切线 渐开线上任意点M的切线(如图中的 $t-t$)必与该点的法线相垂直。

曲率半径 ρ 渐开线上任意点M处的曲率半径,等于从该点沿渐开线法线方向至基圆的切点的长度(如图中的MT)。渐开线上越近基圆的点,其曲率半径越小,若点在基圆上,则 $\rho=0$ 。

向量半径 r_x 渐开线上任意点M到基圆圆心的距离(如图中的MO)即是向量半径。

基圆半径 r_0 它是形成渐开线的圆(基圆)的半径。当基圆半径发生误差后,渐开线形状也必产生误差。

压力角 α 渐开线上任意点M的压力角,是指该点的正压力P方向(即沿法线 $n-n$ 方向)和该点的圆周速度V(绕基圆圆心转动时)方向所夹的锐角。它等于渐开线在该点的切线 $t-t$ 与该点的向量半径之间的夹角。越靠近渐开线外端,其压力角越大,基圆上的压力角等于零。

渐开角 θ 渐开线在基圆上起点处的基圆半径与渐开线任意点M处的向量半径之间的夹角,即谓M点的渐开角。

展开角 τ 形成渐开线时,渐开线的发生线在基圆上经过的弧长所对的中心角称为展开角。从图1-3可看出,它等于 θ 与 α 之和。

下面来分析一下这些角度之间的数值关系。

从渐开线的形成过程知道(图1-3):

$$\rho = \widehat{AT}$$

而 $\widehat{AT} = r_0(\theta + \alpha) = r_0\tau$

因此 $r_0(\theta + \alpha) = \rho$

曲率半径与基圆半径之间的关系,从图中可看出:

$$\rho = r_0 \operatorname{tg} \alpha$$

这样,从上二式就可得到:

$$r_0(\theta + \alpha) = r_0 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

从(1-2)式中可知,渐开角 θ 是 α 角的函数,用 inv (involute) 来表示,人们称

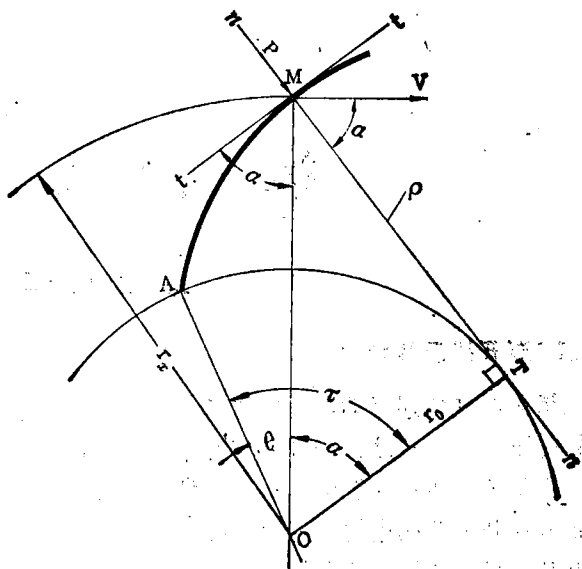


图 1-3

它为渐开线函数。它也可用 ev 表示，因此上式可写成：

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha = ev \alpha \quad (1-2a)$$

从上面的计算过程可知，式中负号后的 α 的单位是弧度。

向量半径 r_x 与基圆半径的关系：

$$r_x = \frac{r_0}{\cos \alpha} \quad (1-3)$$

或

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{r_x}$$

曲率半径 ρ 与向量半径及基圆半径的关系：

$$\rho = \sqrt{r_x^2 - r_0^2} \quad (1-4)$$

式(1-1)中的 $\operatorname{tg} \alpha$ 可以用 r_x 及 r_0 来表示：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{r_0} = \frac{\sqrt{r_x^2 - r_0^2}}{r_0} = \sqrt{\left(\frac{r_x}{r_0}\right)^2 - 1}$$

即

$$\alpha = \arctg \sqrt{\left(\frac{r_x}{r_0}\right)^2 - 1}$$

因此渐开角的公式又可写成：

$$\theta = \sqrt{\left(\frac{r_x}{r_0}\right)^2 - 1} - \arctg \sqrt{\left(\frac{r_x}{r_0}\right)^2 - 1} \quad (1-5)$$

上式是极坐标 (ρ, θ) 的计算公式。

在实际应用中，有时必须把极坐标换算成直角坐标，这时根据变量的不同，可以分为三种形式：

(1) 以展角 τ 为变量的直角坐标表示式。渐开线上任意点 M 的坐标 x, y ，从图1-4中可看出：

$$x = AT - BT = r_0 \sin \tau - \rho \cos \tau$$

$$\therefore x = r_0 (\sin \tau - \tau \cos \tau) \quad (1-6)$$

$$y = MB + AO = \rho \sin \tau + r_0 \cos \tau$$

$$\therefore y = r_0 (\cos \tau + \tau \sin \tau) \quad (1-7)$$

(2) 以压力角 α 为变量。从图中知道：

$$x = r_x \sin \theta$$

$$\therefore r_x = \frac{r_0}{\cos \alpha}, \quad \theta = \operatorname{inv} \alpha$$

$$\therefore x = \frac{\sin(\operatorname{inv} \alpha)}{\cos \alpha} r_0 \quad (1-8)$$

$$y = r_x \cos \theta$$

$$\therefore y = \frac{\cos(\operatorname{inv} \alpha)}{\cos \alpha} r_0 \quad (1-9)$$

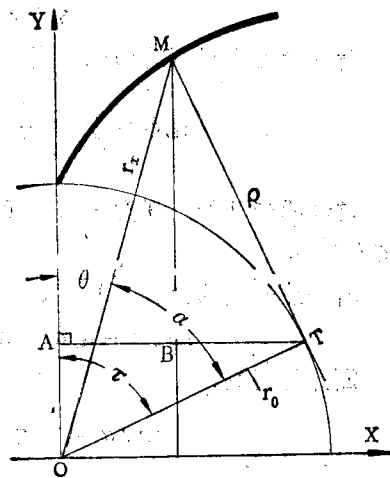


图 1-4

(3) 以渐开角 θ 为变量。从图中知道:

$$r_x = r_0 \sec \alpha$$

$$\therefore \frac{r_x}{r_0} = \sec(\text{inv}^{-1} \theta)$$

即 $r_x = r_0 \sec(\text{inv}^{-1} \theta)$

(1-10)

这样就可从图中得到M点的坐标:

$$x = r_0 \sec(\text{inv}^{-1} \theta) \sin \theta$$

(1-11)

$$y = r_0 \sec(\text{inv}^{-1} \theta) \cos \theta$$

(1-12)

上面所讨论的M点的坐标,其Y轴都是通过渐开线起点(基圆上)的。但在实际中常常需要确定M点在另一坐标系 OX_1Y_1 中的坐标(如图1-5),这时需要进行坐标变换。比如在图中的渐开线上M点的坐标为 (x, y) ,则它在 OX_1Y_1 坐标系中的坐标,利用矩阵来变换最为方便,这时相当于坐标轴逆时针方向转了 φ 角,因此得到:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1-13)

即 $x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi$

$$y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

图 1-5

将公式(1-6)、(1-7)中的 x, y 值代入上式则得:

$$x_1 = r_0 [(\sin \tau - \tau \cos \tau) \cos \varphi + (\cos \tau + \tau \sin \tau) \sin \varphi] \quad (1-14)$$

$$y_1 = r_0 [(\cos \tau + \tau \sin \tau) \cos \varphi - (\sin \tau - \tau \cos \tau) \sin \varphi] \quad (1-15)$$

渐开线上任意点的切线斜率,可利用公式(1-6)、(1-7)对 τ 求导后得到:

$$\text{tg} \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\tau}{dx/d\tau} = \frac{r_0(-\sin \tau + \sin \tau + \tau \cos \tau)}{r_0(\cos \tau - \cos \tau + \tau \sin \tau)} = \text{ctg} \tau \quad (1-16)$$

这说明渐开线上任意一点的切线与OX的夹角 ϕ 和 $\angle TOX$ (图1-4) 相等,因此切线与OT相平行。

渐开线函数的微分 从公式(1-2a)知道:

$$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \alpha$$

因此可得到:

$$d \text{inv} \alpha = d(\text{tg} \alpha - \alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha - d\alpha = (\sec^2 \alpha - 1) d\alpha$$

$$\therefore d \text{inv} \alpha = \text{tg}^2 \alpha d\alpha \quad (1-17)$$

$$d^2 \text{inv} \alpha = d(\text{tg}^2 \alpha d\alpha) = 2 \text{tg} \alpha (d \text{tg} \alpha) d\alpha = 2 \text{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} (d\alpha)^2$$

$$= 2 \text{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha^2 = 2 \text{tg} \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha) (d\alpha)^2$$

$$\therefore d^2 \text{inv} \alpha = 2(\text{tg}^3 \alpha + \text{tg} \alpha) (d\alpha)^2 \quad (1-18)$$

渐开线的长度 渐开线上任意二点 1、2 之间的曲线弧长 S ，可从图 1—6 的几何关系中直接来推导。由图知

$$r_0(\theta_1 + \alpha_1) = r_0 \tau_1$$

$$\text{即 } \theta_1 + \alpha_1 = \tau_1$$

如从 1' 作基圆的切线得 $11' = dS$ ，

则因 $d\tau = d\theta + da$ ，故得到：

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} r_0(\theta + a) d\tau$$

由于

$$\begin{aligned} d\tau &= d\theta + da \\ &= d(\operatorname{inv} \alpha) + da \\ &= da + \operatorname{tg}^2 \alpha da \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) da \\ d\theta &= \operatorname{tg}^2 \alpha da \end{aligned}$$

把 $d\tau$ 代入前式则得：

$$\begin{aligned} S &= r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\alpha + \theta) (da + \operatorname{tg}^2 \alpha da) = r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) da \\ &= r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha da = r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{tg} \alpha d \operatorname{tg} \alpha = \frac{r_0}{2} [\operatorname{tg}^2 \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (1-19)$$

$$\text{或写成 } S = \frac{r_0}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{r_0}{2} \tau^2 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (1-19a)$$

也可应用求曲线弧长的公式直接代入。

$$\text{因 } S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau$$

这时把求斜率时上面已算出的 $x'(\tau) = r_0 \tau \sin \tau$ 、 $y'(\tau) = r_0 \tau \cos \tau$ 代入，就可得到：

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{(r_0 \tau \sin \tau)^2 + (r_0 \tau \cos \tau)^2} d\tau = r_0 \frac{\tau^2}{2} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (1-19b)$$

当已知的是点 1、2 的向量半径 R_1 、 R_2 时，则可以把

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 = \tau_1 &= \frac{\sqrt{R_1^2 - r_0^2}}{r_0} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \tau_2 &= \frac{\sqrt{R_2^2 - r_0^2}}{r_0} \end{aligned}$$

代入则得：

$$S = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2r_0} \quad (1-19c)$$

当已知的是渐开线上 1、2 点的曲率半径 ρ_1 、 ρ_2 时，则：

$$\because \rho_2 = r_0 \tau_2 \quad \rho_1 = r_0 \tau_1$$

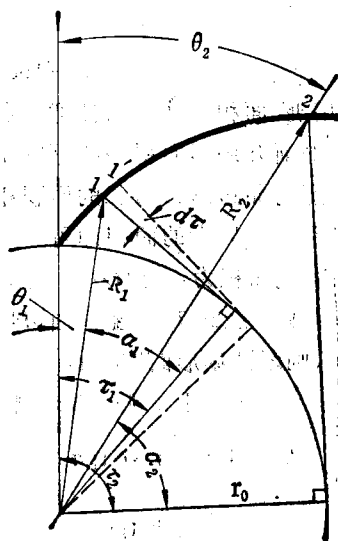


图 1—6

$$\therefore S = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2r_0}$$

(1-19d)

渐开扇形面积计算 由任意二点 1、2 所确定的渐开扇形面积 $1o2$ (图 1-7), 正好与曲边形 $1T_1T_2$ 的面积相等, 因此只要确定后者的面积即可。

设图中有关面积为: $\triangle 1OT_1 = \text{I}$, 扇形 $T_1OT_2 = \text{II}$, $\triangle 2OT_2 = \text{III}$, 曲边形 $1T_1T_2 = \text{IV}$, 则渐开扇形面积 σ 为:

$$\sigma = \text{I} + \text{II} + \text{III} - \text{IV}$$

$$\therefore \text{I} = \frac{1}{2} r_0 \cdot r_0 \text{tg} \alpha_1$$

$$= \frac{1}{2} r_0^2 \text{tg} \alpha_1$$

$$\text{II} = \frac{1}{2} r_0 \cdot \widehat{T_1T_2} = \frac{1}{2} r_0 (r_0 \text{tg} \alpha_2 - r_0 \text{tg} \alpha_1)$$

$$\text{III} = \frac{1}{2} r_0 \cdot r_0 \text{tg} \alpha_2 = \frac{1}{2} r_0^2 \text{tg} \alpha_2$$

$$\therefore \text{I} + \text{III} = \text{II}$$

由此可知, $\triangle 1OQ$ 的面积与曲边形 $2QT_1T_2$ 的面积相等。所以要确定渐开扇形的面积, 只要确定 IV 的面积即可。从图中可看出:

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0 \tau \cdot (r_0 d\tau)$$

$$\text{即} \quad \sigma = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} r_0^2 \tau^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} r_0^2 \tau^2 d\tau$$

因 $d\tau = (1 + \text{tg}^2 \alpha) da$, $r_0 \tau = r_0 \text{tg} \alpha$, 把它们代入上式则得

$$\sigma = \frac{r_0^2}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{tg}^2 \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha) da = \frac{r_0^2}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{tg}^2 \alpha d \text{tg} \alpha = \frac{r_0^2}{6} [\text{tg}^3 \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\text{或写成} \quad \sigma = \frac{r_0^2}{6} \text{tg}^3 \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{r_0^2}{6} \tau^3 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (1-20)$$

极渐开线函数 从上面知道:

$$\sec \text{inv}^{-1} \theta = \frac{r_x}{r_0} = \sec \alpha$$

把 $\sec \text{inv}^{-1}$ 的反函数以 $\text{inv} r$ 代表称极渐开线函数。即:

$$\theta = \text{inv} r \frac{r_x}{r_0} = \text{inv} r \sec \alpha \quad (1-21)$$

这样, 就可看成 θ 是 $\sec \alpha$ 的函数, 因此可以根据 $\sec \alpha$ 的值, 作出极渐开线函数表 ($\text{inv} r \sec \alpha$)。

用极渐开线函数计算时, 渐开线上任一点的直角坐标值为:

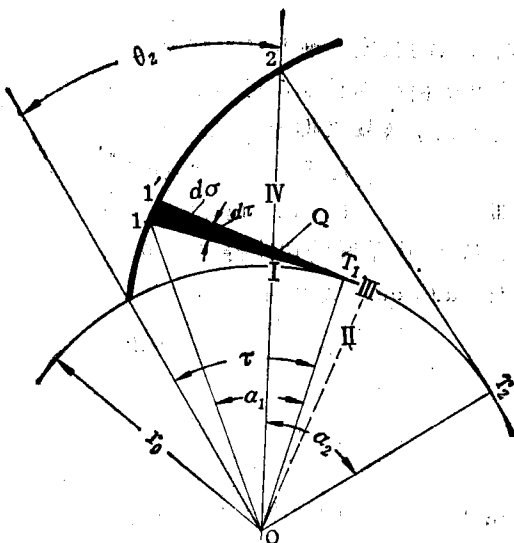


图 1-7

$$x = r_x \sin(\text{invrseca}) = r_x \sin\left(\text{invr} \frac{r_x}{r_0}\right) \quad (1-22)$$

$$y = r_x \cos(\text{invrseca}) = r_x \cos\left(\text{invr} \frac{r_x}{r_0}\right) \quad (1-23)$$

〔2〕延长渐开线与缩短渐开线

曲线的方程以向量来表示常可得到简单的形式，比如上面所谈的渐开线，根据图 1—8 可以列出：

$$\vec{r} = \vec{OT} + \vec{TM}$$

设 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 为 x 、 y 轴上的单位向量，直线在圆上的滚动角为 ψ ，把上列向量写成 x 、 y 轴上的分量后就可得到：

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r_0 \sin\psi \vec{i} + r_0 \cos\psi \vec{j} \\ &\quad - r_0 \psi \cos\psi \vec{i} + r_0 \psi \sin\psi \vec{j} \end{aligned}$$

因此，渐开线方程可写为：

$$\vec{r} = (r_0 \sin\psi - r_0 \psi \cos\psi) \vec{i} + (r_0 \cos\psi + r_0 \psi \sin\psi) \vec{j} \quad (1-24)$$

延长渐开线又名长幅渐开线，现在利用图 1—9 来说明其形成过程。在圆上作纯滚动的直线 QT 的一端固连有直线 QM ，在初始位置时 Q 、 M 分别与 Q_0 、 M_0 重合，当直线按箭头 v 方向在圆上作纯滚动时，则 M 点在 XY 平面上的轨迹 E_1 就是延长渐开线。若直线按 v 的相反方向作纯滚动，则可得左半边的延长渐开线 E_2 。其方程式可以象上面那样列出：

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OM} = \vec{OT} + \vec{TQ} + \vec{QM} \\ &= r_0 \sin\psi \vec{i} + r_0 \cos\psi \vec{j} - r_0 \psi \cos\psi \vec{i} + r_0 \psi \sin\psi \vec{j} \\ &\quad - h \cos(90^\circ - \psi) \vec{i} - h \sin(90^\circ - \psi) \vec{j} \\ \therefore \vec{r} &= [(r_0 - h) \sin\psi - r_0 \psi \cos\psi] \vec{i} + [(r_0 - h) \cos\psi + r_0 \psi \sin\psi] \vec{j} \quad (1-25) \end{aligned}$$

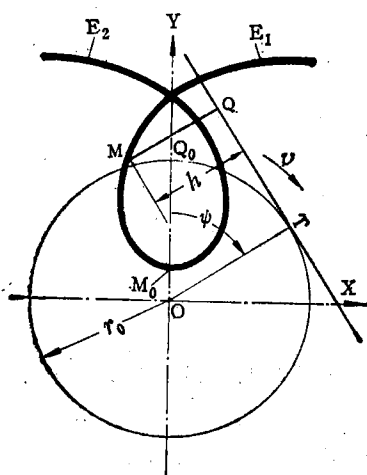


图 1—9

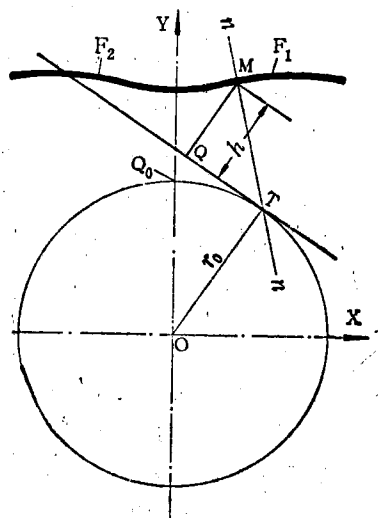


图 1—10

式中: $h = QM$

缩短渐开线又名短幅渐开线, 其形成过程可从图 1—10 看出, 若滚动直线的上方固连有直线 QM , 则当它在圆上作纯滚动时, M 点在 XY 平面上的轨迹 F_1 、 F_2 就是缩短渐开线。很明显, 只要把公式 (1—25) 中的 h 以 $-h$ 代入, 就可得到其方程式:

$$\vec{r} = (r_0 + h) \sin\psi - r_0\psi \cos\psi \vec{i} + [(r_0 + h) \cos\psi + r_0\psi \sin\psi] \vec{j} \quad (1-26)$$

〔3〕阿基米德螺线

如果图 1—9 中的 $h = r_0$, 则得到:

$$\vec{r} = -r_0\psi \cos\psi \vec{i} + r_0\psi \sin\psi \vec{j}$$

即
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-r_0\psi \cos\psi)^2 + (r_0\psi \sin\psi)^2} = r_0\psi \quad (1-27)$$

这正是阿基米德螺线的方程。所以若与动直线相固连的直线上的 M 点通过基圆的圆心, 则直线在圆上作纯滚动时 M 点的轨迹是阿基米德螺线。

〔4〕摆线与变态摆线

如图 1—11 那样, 有一个动圆 O_1 在一条固定直线上作纯滚动, 则圆周上一点 M 在固定平面上的轨迹就是摆线, 也称平摆线。从图中可看出, 其方程式为:

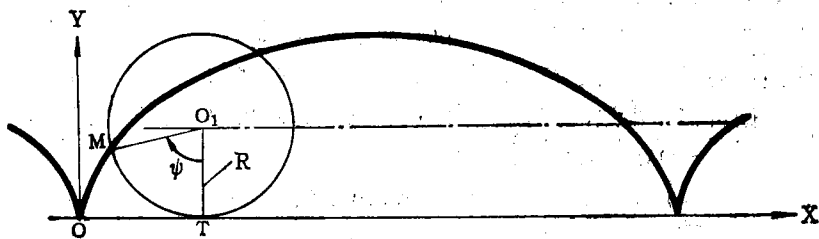


图 1—11

$$\vec{r} = \vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$$

而 $OT = \widehat{MT} = R\psi$, 因此:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R\psi \vec{i} + R \vec{j} - R\sin\psi \vec{i} - R\cos\psi \vec{j} \\ &= R(\psi - \sin\psi) \vec{i} + R(1 - \cos\psi) \vec{j} \end{aligned} \quad (1-28)$$

摆线上任意点的切线斜率为:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\psi}{dx/d\psi} = \frac{\sin\psi}{1 - \cos\psi} \quad (1-29)$$

变态摆线有延长摆线及缩短摆线二种。图 1—12 表示延长摆线的形成过程: 一条直线 O_1M 与动圆相固连, 当动圆在直线上作纯滚动时, M 点的运动轨迹就是延长摆线。若直线在动圆之外部分的长度 $BM = h$, 则从图中可看出, 延长摆线的方程式为:

$$\vec{r} = (R\psi - (R+h)\sin\psi) \vec{i} + (R - (R+h)\cos\psi) \vec{j} \quad (1-30)$$

同样, 缩短摆线的形成如图 1—13 所示, 其方程式是:

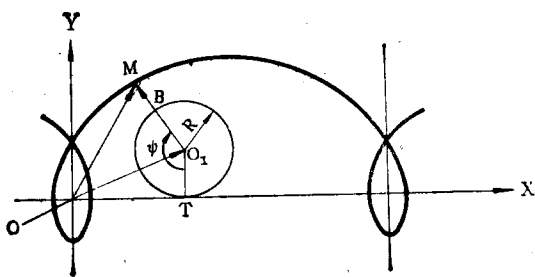


图 1-12

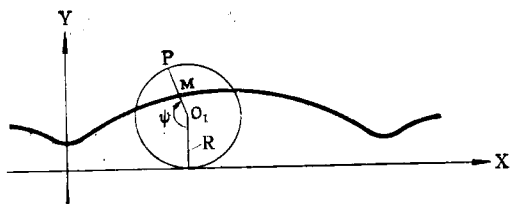


图 1-13

$$\vec{r} = [R\psi - (R-h)\sin\psi, R - (R-h)\cos\psi] \quad (1-31)$$

〔5〕外摆线与变态外摆线

外摆线的形成如图1-14所示，即有一动圆 O_1 在定圆 O_2 上作纯滚动，则动圆上任一点在XY平面上的轨迹就是外摆线。图中 M_0 是始点，当 O_1 圆在 O_2 圆上转过 ψ_2 角时，所得到的 M 就是外摆线。从图中可看出：

$$\vec{r} = \vec{O_2O_1} + \vec{O_1M}$$

因为是纯滚动，所以 $\widehat{M_0T} = \widehat{TM}$ ，即：

$$R_2\psi_2 = R_1\psi_1$$

$$\psi_1 = \frac{R_2}{R_1}\psi_2$$

又因 $\zeta = 180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)$ ，从而可得到：

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (R_1 + R_2)\sin\psi_2 \vec{i} + (R_1 + R_2)\cos\psi_2 \vec{j} - R_1\sin[180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)] \vec{i} \\ &\quad + R_1\cos[180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)] \vec{j} \\ \therefore \vec{r} &= [(R_1 + R_2)\sin\psi_2 - R_1\sin(1 + \frac{R_2}{R_1})\psi_2] \vec{i} + \\ &\quad [(R_1 + R_2)\cos\psi_2 - R_1\cos(1 + \frac{R_2}{R_1})\psi_2] \vec{j} \end{aligned} \quad (1-32)$$

它的切线斜率为：

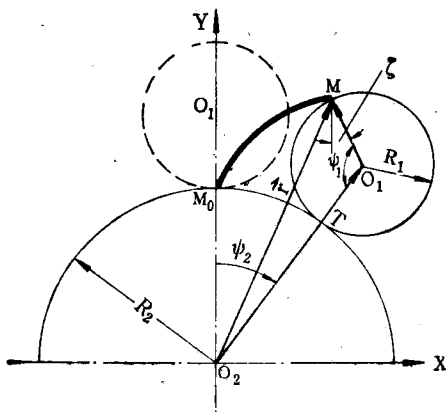


图 1-14

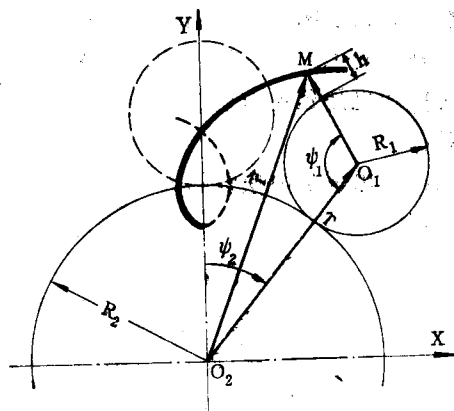


图 1-15

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \phi &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\psi_2}{dx/d\psi_2} = \frac{-(R_1 + R_2) \sin \psi_2 + R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \sin \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2}{(R_1 + R_2) \cos \psi_2 - R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cos \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2} \\ &= \frac{-\sin \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2 - \sin \psi_2}{\cos \psi_2 - \cos \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2}\end{aligned}\quad (1-33)$$

变态外摆线是延长（长幅）外摆线与缩短（短幅）外摆线的总称。

图1—15是延长外摆线的形成过程，即一条直线 O_1M 与动圆 O_1 相固连，当动圆 O_1 在定圆 O_2 上作纯滚动时，直线在圆外一点 M 的运动轨迹（在 XY 平面上）就是延长外摆线。由图中知道：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{O_2O_1} + \vec{O_1M} \\ &= (R_1 + R_2) \sin \psi_2 \vec{i} + (R_1 + R_2) \cos \psi_2 \vec{j} \\ &\quad - (R_1 + h) \sin [180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)] \vec{i} + (R_1 + h) \cos [180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)] \vec{j} \\ \therefore \vec{r} &= \left[(R_1 + R_2) \sin \psi_2 - (R_1 + h) \sin \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2 \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[(R_1 + R_2) \cos \psi_2 - (R_1 + h) \cos \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \psi_2 \right] \vec{j}\end{aligned}\quad (1-34)$$

很明显，只要将圆外部分长度 h 以 $-h$ 代入即得缩短外摆线的方程式。

〔6〕内摆线与变态内摆线

现以图1—16来说明内摆线及变态内摆线的形成。动圆 O_1 沿定圆 O_2 内壁作纯滚动，则与动圆相固连的直线在圆外任一点（在 XY 平面上）的运动轨迹，就是延长内摆线。图中 M 是始点动圆在初始位置时的情况。如果 M 点在动圆内，其所形成的轨迹则是缩短内摆线。若 M 点在动圆圆周上，其轨迹则是内摆线。变态内摆线也是延长内摆线与缩短内摆线的总称。

现在列出延长内摆线的方程式。从图中得到：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{O_2O_1} + \vec{O_1M} \\ &= (R_2 - R_1) \sin \psi_2 \vec{i} + (R_2 - R_1) \cos \psi_2 \vec{j} \\ &\quad - (R_1 + h) \cos [90^\circ - (\psi_1 - \psi_2)] \vec{i} + (R_1 + h) \sin [90^\circ - (\psi_1 - \psi_2)] \vec{j} \\ \therefore \vec{r} &= \left[(R_2 - R_1) \sin \psi_2 - (R_1 + h) \sin \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right) \psi_2 \right] \vec{i}\end{aligned}$$

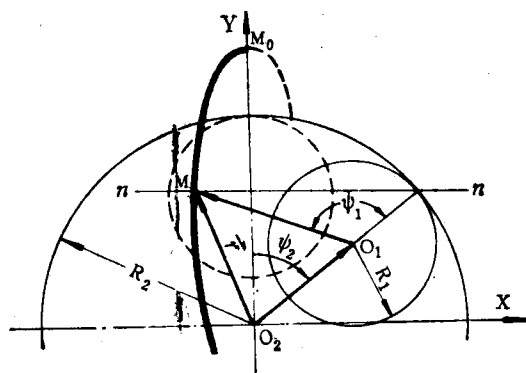


图 1—16

$$+ (R_2 - R_1) \cos \psi_2 + (R_1 + h) \cos \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \psi_2 \Big] \vec{j} \quad (1-35)$$

对于缩短内摆线，只要将上式中的 h 以 $-h$ 代入即可，若将 $h=0$ 代入上式，即得到内摆线方程式。

2. 定传动比与变传动比传动

传递回转运动虽然可以应用许多种不同的机构，但摩擦轮是最简单的一种。图 1—17 所示的平行轴摩擦轮传动，当在径向加力彼此压紧后，如果二轮间没有滑动而只有纯滚动，则它们的传动比 i_{12} 为常数 (K) 即：

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = K$$

式中： ω_1 、 ω_2 ， n_1 、 n_2 分别为主动轮1、被动轮2的角速度及转速。

也就是说，它们的传动比是固定不变的，象这样进行纯滚动的圆称为瞬心圆。但在摩擦轮上实际是不能实现的，因为摩擦轮表面不可能完成纯滚动，而必有滑动产生，因此这种机构不可能保证传动比严格不变，但上述假想的纯滚动机构却为齿轮传动提供了一定基础。

在现代生产中，大部分传动机构都要求保持十分严格的固定传动比，或者是主动轮与被动轮之间的传动比保持一定的函数关系。齿轮传动就是实现这些目的可靠机构。

应用圆齿轮来实现固定传动比的传动是最简单的机构。

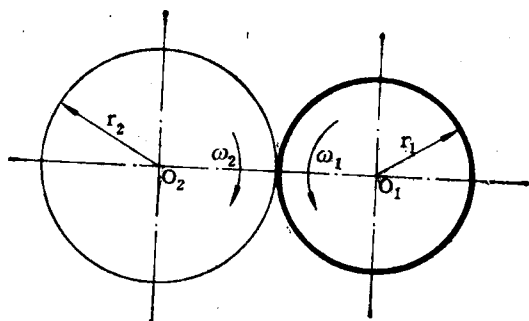


图 1—17

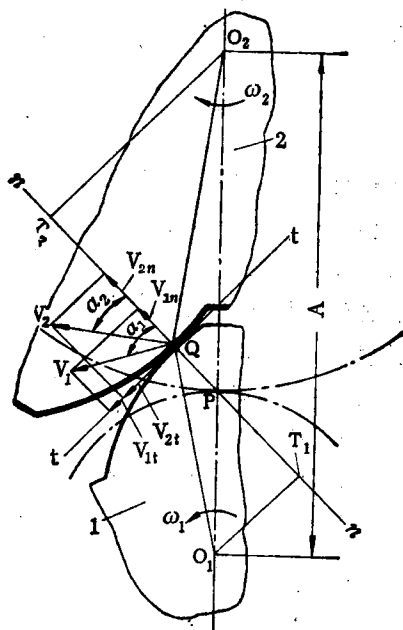


图 1—18

设二构件1、2的旋转中心分别为 O_1 、 O_2 ，它们的二齿面于 Q 点相接触（图1—18），当构件1以角速度 ω_1 转动时，由其齿面推动机件2以角速度 ω_2 朝着 ω_1 相反方向转动，通过瞬