课标本

# 教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

## 高中数学 必修4

配人教B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红

导航 丛书系列

接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社

X导航 丛书系列

# 教材完全解读·高中课标本
# 丛书目录

## 高中（课标本·必修1）

《语文》人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 语文版 北京版
《数学》人教A版 人教B版 苏教版 北师大版
《英语》人教版 外研版 译林牛津版 北师大版
《物理》人教版 粤教版 鲁科版 教科版
《化学》人教版 苏教版 鲁科版
《生物》人教版 苏教版
《政治》人教版
《历史》人教版 人民版 岳麓版
《地理》人教版 鲁教版 湘教版 中图版

## 高中（课标本·必修2）

《语文》人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 语文版 北京版
《数学》人教A版 人教B版 苏教版 北师大版
《英语》人教版 外研版 译林牛津版 北师大版
《物理》人教版 粤教版 鲁科版 教科版
《化学》人教版 苏教版 鲁科版
《生物》人教版 苏教版
《政治》人教版
《历史》人教版 人民版 岳麓版
《地理》人教版 鲁教版 湘教版 中图版

## 高中（课标本·必修3）

《语文》人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 语文版 北京版
《数学》人教A版 人教B版 苏教版 北师大版
《英语》人教版 外研版 译林牛津版 北师大版
《生物》人教版 苏教版
《政治》人教版
《历史》人教版 人民版 岳麓版
《地理》人教版 鲁教版 湘教版 中图版

## 高中（课标本·必修4）

《语文》人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 语文版 北京版
《数学》人教A版 人教B版 苏教版 北师大版
《英语》人教版 译林牛津版 外研版 北师大版
《政治》人教版

## 高中（课标本·必修5）

《语文》人教版 粤教版 鲁人版 苏教版 语文版 北京版
《数学》人教A版 人教B版 苏教版 北师大版
《英语》人教版 译林牛津版 外研版 北师大版

ISBN 978-7-80732-624-3
02>
9 787807 326243

ISBN 978-7-80732-624-3
定 价:20.70元

课标本

# 教材完全解读

## 王后雄学案

高中数学 必修4

配人教B版


丛书主编：王后雄

本册主编：曾祥红

编　　委：王强芳　黄河清
丁仁贵　周建国
王志明　王　涛
杜　苏　陈　锐
王春勇　胡建平
徐志平　邵爱先
宋少华　周　锋


导航 丛书系列


Jieli 接力出版社 Publishing House　全国优秀出版社

丛书策划：熊　辉
责任编辑：李朝晖
责任校对：姜　荣
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIEDU
GAOZHONG SHUXUE
教材完全解读
高中数学　必修4　配人教B版
丛书主编：王后雄　本册主编：曾祥红
*
社　长：黄　俭　　总编辑：白　冰
接力出版社出版发行
广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
E-mail：jielipub@public.nn.gx.cn
武汉市精彩印务有限公司印刷　全国新华书店经销
*
开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：12　字数：320千
2008年9月第3版　2008年9月第3次印刷
ISBN 978-7-80732-624-3
定价：20.70元

# 教材完全解读

## 本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

**3层完全解读**

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

·1·

第1章 解三角形

课标单元知识

本章主要包括正弦定理、余弦定理、正弦定理和余弦定理的应用三个部分的内容，教材通过正弦定理和余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律。

高考命题趋向

正弦定理、余弦定理常是解三角形的工具，在每年的高考中都有出现，一般考分在4到12分之间. 前几年主要考查方式为三角形形状的判断；利用正弦定理、余弦定理解决三角形的边角关系；利用正弦定理、余弦定理解决实际问题.

1.1 正弦定理

1 知识·能力聚焦

1. 正弦定理及其证明

正弦定理：在$\triangle ABC$中，$a$、$b$、$c$分别为角$A$、$B$、$C$的对边，$R$为$\triangle ABC$的外接圆的半径，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

2. 正弦定理及其证明

所以$a\sin B=b\sin A$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形（如图1-1-1(2)）或为直角三角形时，利用同样的方法也可以证得结论，请同学们自己证明.

2 方法·技巧平台

4. 如何判断三角形的形状

(1)判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形. 如锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、等边三角形、等腰三角形、等腰直角三角形等.

(2)对于给出的条件是边角关系混合在一起的问题，一般地，应运用正弦定理，要么把它统一为边的关系；要么统一为角的关系. 再利用三角形的有关知识，三角恒等变形方法和代数恒等变形方法进行转化、化简，从而得出结论.

3 创新·思维拓展

5. 三角形中有关正弦定理的综合问题

在利用正弦定理解决三角形的综合问题时，要注意以下关系式的运用：$A+B+C=\pi$；$\sin(A+B)=\sin C$；$\cos(A+B)=-\cos C$；$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$；$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

名师诠释

[考题1] 在$\triangle ABC$中，已知$A>B$，求证$\sin A>\sin B$.

[解析] 在$\triangle ABC$中，由$A>B\Rightarrow a>b$，又因为$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，所以有$2R\sin A>2R\sin B$.

即$\sin A>\sin B$.

[点评] 在$\triangle ABC$中，若已知$\sin A>\sin B$，那么$A>B$成立吗？读者不难得到$A>B$是成立的. 因为$\sin A>\sin B\Rightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Rightarrow a>b\Rightarrow A>B$.

[考题2] 已知$\triangle ABC$的三个内角满足$2B=A+C$，且最大边为最小边的2倍，求三角形的三个内角.

[解析] 因为$2B=A+C$，而且$A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

不妨设$A=\frac{\pi}{3}-\alpha$，$C=\frac{\pi}{3}+\alpha(\alpha\geq 0)$，再设最小边为$a$.

[考题9] 在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$.

[解析] 根据正弦定理

$$\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}=\frac{2R\sin C-2R\sin B\cos A}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}=\frac{\sin(A+B)-\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}{\sin(A+C)-\frac{1}{2}[\sin(A+C)+\sin(C-A)]}=\frac{\sin(A+B)-\sin(B-A)}{\sin(A+C)-\sin(C-A)}=\frac{2\cos B\sin A}{2\cos C\sin A}=\frac{\cos B}{\cos C}.$$

图1-1-6

[考题10] 已知$\triangle ABC$中，$AD$是$\angle BAC$的平分线，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

[解析] 本题是证明平面几何中的三角形内角平分线定理，利用正弦定理将边长之比通过角的正弦值引入，转化为角的正弦之比，即把证边相等转化为证角相等.

**教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。**

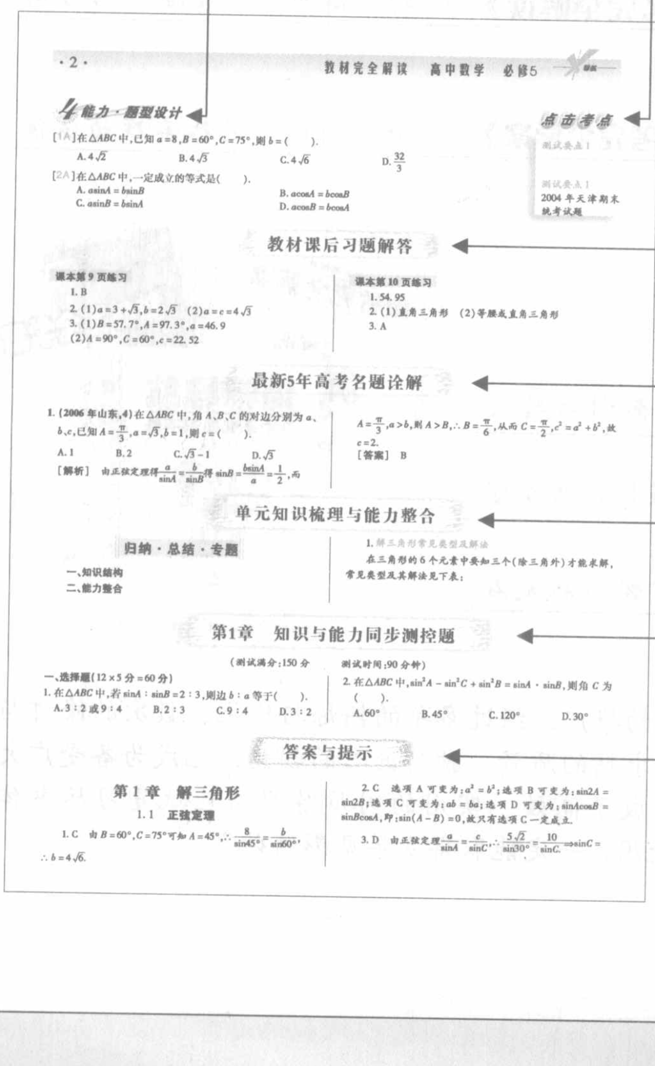
——题记

### 整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

### 解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。



·2· 教材完全解读 高中数学 必修5

能力·题型设计

[1A]在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60°$，$C=75°$，则$b=$(　　).

A. $4\sqrt{2}$　B. $4\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $\frac{32}{3}$

[2A]在$\triangle ABC$中，一定成立的等式是(　　).

A. $a\sin A=b\sin B$　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　D. $a\cos B=b\cos A$

点击考点

测试要点1

测试要点1 2004年天津期末统考试题

教材课后习题解答

课本第9页练习

1. B

2. (1)$a=3+\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}$　(2)$a=c=4\sqrt{3}$

3. (1)$B=57.7°$，$A=97.3°$，$a=46.9$

(2)$A=90°$，$C=60°$，$c=22.52$

课本第10页练习

1. 54.95

2. (1)直角三角形　(2)等腰或直角三角形

3. A

最新5年高考名题诠解

1. (2006年山东,4)在$\triangle ABC$中，角$A$、$B$、$C$的对边分别为$a$、$b$、$c$，已知$A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则$c=$(　　).

A. 1　B. 2　C. $\sqrt{3}-1$　D. $\sqrt{3}$

[解析]　由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$，而$A=\frac{\pi}{3}$，$a>b$，则$A>B$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，从而$C=\frac{\pi}{2}$，$c^2=a^2+b^2$，故$c=2$.

[答案]　B

单元知识梳理与能力整合

归纳·总结·专题

一、知识结构

二、能力整合

1. 解三角形常见类型及解法

在三角形的6个元素中要知三个(除三角外)才能求解，常见类型及其解法见下表：

第1章　知识与能力同步测控题

(测试满分:150分　测试时间:90分钟)

一、选择题(12×5分=60分)

1. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B=2:3$，则边$b:a$等于(　　).

A. 3:2或9:4　B. 2:3　C. 9:4　D. 3:2

2. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2A-\sin^2C+\sin^2B=\sin A\cdot\sin B$，则角$C$为(　　).

A. 60°　B. 45°　C. 120°　D. 30°

答案与提示

第1章　解三角形

1.1　正弦定理

1. C　由$B=60°$，$C=75°$可知$A=45°$，$\therefore \frac{8}{\sin45°}=\frac{b}{\sin60°}$，$\therefore b=4\sqrt{6}$.

2. C　选项A可变为：$a^2=b^2$；选项B可变为：$\sin2A=\sin2B$；选项C可变为：$ab=ba$；选项D可变为：$\sin A\cos B=\sin B\cos A$，即：$\sin(A-B)=0$，故只有选项C一定成立.

3. D　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \frac{5\sqrt{2}}{\sin30°}=\frac{10}{\sin C}\Rightarrow\sin C=$

### 教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

### 最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

### 单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

### 考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

### 点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

# X导航丛书系列最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧抠中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破—挑战思维的极限


《中考完全学案》


《高考完全学案》

讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试—进入实战的演练


讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《课标导航基础知识手册》透析题型—掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础—奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

# 目录

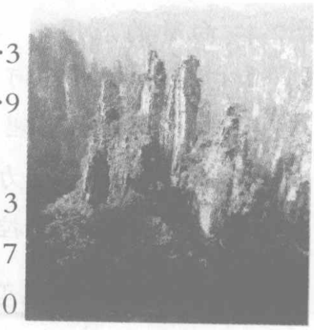

学法指津……………………………………………………………………1

## 第一章 基本初等函数(Ⅱ)

1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广……………………………………3

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算……………………9



1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义……………………………………13

1.2.2 单位圆与三角函数线………………………………17

1.2.3 同角三角函数的基本关系式…………………………20

1.2.4 诱导公式……………………………………………27

1.3 三角函数的图象与性质

1.3.1 正弦函数的图象与性质……………………………35

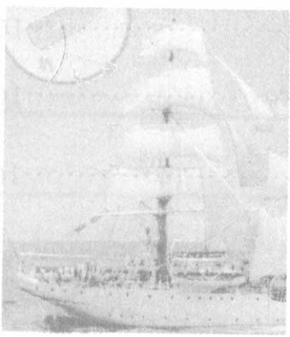
1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质…………………45

1.3.3 已知三角函数值求角………………………………53

单元知识梳理与能力整合………………………………………60

知识与能力同步测控题…………………………………………67

## 第二章 平面向量



2.1 向量的线性运算

2.1.1 向量的概念…………………………………………70

2.1.2 向量的加法…………………………………………73

2.1.3 向量的减法…………………………………………76

2.1.4 数乘向量……………………………………………79

2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算………………82

2.2 向量的分解与向量的坐标运算

2.2.1 平面向量基本定理…………………………………86

2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算……………90

2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件…………………94

2.3 平面向量的数量积

# 目录


2.3.1 向量数量积的物理背景与定义……98
2.3.2 向量数量积的运算律……102
2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式……105
2.4 向量的应用
2.4.1 向量在几何中的应用……110
2.4.2 向量在物理中的应用……114
单元知识梳理与能力整合……121
知识与能力同步测控题……125

第三章 三角恒等变换

3.1 和角公式
3.1.1 两角和与差的余弦……126
3.1.2 两角和与差的正弦……131
3.1.3 两角和与差的正切……136
3.2 倍角公式和半角公式
3.2.1 倍角公式……141
3.2.2 半角的正弦、余弦和正切……146
3.3 三角函数的积化和差与和差化积
单元知识梳理与能力整合……156
知识与能力同步测控题……162

期末测试题……163

答案与提示……165

知识与方法

# 阅读索引

## 第一章　基本初等函数(Ⅱ)


1.1　任意角的概念与弧度制
1.1.1　角的概念的推广
1. 任意角的概念 …… 3
2. 象限角 …… 3
3. 终边相同的角 …… 4
4. 各象限角的集合与轴线角的集合 …… 4
5. $\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$的象限的确定 …… 5
6. 数形结合思想的应用 …… 5
7. 与角有关的集合问题 …… 6
8. 角的"周期现象" …… 6
1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算
1. 弧度制 …… 9
2. 角度制和弧度制的比较 …… 9
3. 弧度制与角度制的互化 …… 9
4. 扇形的弧长及面积公式 …… 10
5. 用弧度制表示终边相同的角 …… 10
6. 分类讨论思想的应用 …… 10
7. 弧度制的实际应用 …… 10
1.2　任意角的三角函数
1.2.1　三角函数的定义
1. 三角函数的定义 …… 13
2. 三角函数在各象限的符号 …… 14
3. 求值、化简、证明 …… 14
4. 三角函数定义的创新应用 …… 15
1.2.2　单位圆与三角函数线
1. 三角函数线 …… 17
2. 三角函数线的运用 …… 18
3. 活用单位圆中的三角函数线求解三角题 …… 18
1.2.3　同角三角函数的基本关系式
1. 同角三角函数的基本关系式 …… 20
2. 已知某个三角函数值求其余的三角函数值 …… 20
3. 运用同角三角函数的基本关系式求值 …… 21
4. 化简 …… 21
5. 三角恒等式的证明方法 …… 21
6. 条件恒等式的证明 …… 22
7. 同角三角函数基本关系式的进一步探究 …… 22
8. "1"的代换 …… 23
9. 切割化弦 …… 23
10. 同角三角函数关系与一元二次方程 …… 23
1.2.4　诱导公式
1. 四组诱导公式 …… 27
2. 如何利用诱导公式化简三角函数式 …… 29
3. $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$的诱导公式 …… 29
4. 诱导公式的综合应用 …… 30
1.3　三角函数的图象与性质
1.3.1　正弦函数的图象与性质
1. 正弦函数图象的画法 …… 35
2. 正弦函数的性质 …… 35
3. 正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 37
4. "五点法"作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图 …… 38
5. 变换作图法 …… 38
6. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 的解析式的确定 …… 39
7. 图象的应用 …… 40
1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质
1. 余弦函数的图象与性质 …… 45
2. 正切函数的图象与性质 …… 46
3. 正切函数与正、余弦函数的比较 …… 47
4. 余弦函数、正切函数的性质和图象的应用 …… 47
5. 变换作图法 …… 48
6. 利用奇偶性速解三角题 …… 49
1.3.3　已知三角函数值求角
1. 已知正弦值求角 …… 53
2. 已知余弦值求角 …… 53
3. 已知正切值求角 …… 53
4. 已知三角函数值求角的"四步法" …… 54
5. 已知三角函数式求角 …… 54


## 第二章　平面向量


2.1　向量的线性运算
2.1.1　向量的概念
1. 向量 …… 70
2. 共线向量 …… 71
3. 如何判断一个量是不是向量 …… 71
4. 如何在平面图形中找相关的向量 …… 71
5. 向量的应用 …… 71
2.1.2　向量的加法
1. 向量的加法 …… 73
2. 如何使用向量加法的三角形法则 …… 74
3. 向量加法的应用 …… 74
2.1.3　向量的减法
1. 向量的减法 …… 76
2. 如何运用向量的减法 …… 77
3. 向量加减法中的数学思想 …… 77
2.1.4　数乘向量
1. 实数与向量的积 …… 79
2. 如何进行向量的线性运算 …… 79

3. 利用向量解决平面几何的问题 …… 80

**2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算**

1. 向量共线的条件 …… 82
2. 轴上向量的坐标及其运算 …… 82
3. 对向量共线条件的进一步理解 …… 83
4. 平行向量基本定理的应用 …… 83

**2.2 向量的分解与向量的坐标运算**

**2.2.1 平面向量基本定理**

1. 平面向量基本定理 …… 86
2. 如何使用平面向量基本定理 …… 87
3. 平面向量基本定理的应用 …… 87

**2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算**

1. 向量的直角坐标 …… 90
2. 向量的直角坐标运算 …… 90
3. 如何进行平面向量的坐标运算 …… 90
4. 向量坐标表示的应用 …… 91

**2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件**

1. 平面向量共线的坐标表示 …… 94
2. 三点共线的证明 …… 94
3. 运用向量坐标解决平行四边形相关问题 …… 95
4. 运用向量坐标解决平面图形交点问题 …… 95
5. 定比分点 $P$ 的坐标 …… 95

**2.3 平面向量的数量积**

**2.3.1 向量数量积的物理背景与定义**

1. 向量的数量积(内积)的定义 …… 98
2. 如何运用向量内积的性质 …… 99
3. 向量数量积的开放问题 …… 99

**2.3.2 向量数量积的运算律**

1. 向量数量积的运算律 …… 102
2. 如何进行向量的混合运算 …… 102
3. 利用数量积及运算律解决求模问题 …… 102
4. 实数与向量运算 …… 103

**2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式**

1. 向量内积的坐标运算 …… 105
2. 用向量的坐标表示两个向量垂直的条件 …… 105
3. 向量的长度、距离和夹角公式 …… 105
4. 如何运用坐标来解决垂直问题 …… 105
5. 如何求夹角 …… 106
6. 数量积的坐标表示的作用 …… 106
7. 平面向量与三角函数 …… 106

**2.4 向量的应用**

**2.4.1 向量在几何中的应用**

1. 向量在平面几何中的应用 …… 110
2. 向量在解析几何中的应用 …… 110
3. 如何运用向量方法解决平面几何问题 …… 111
4. 向量在立体几何中的应用 …… 111

**2.4.2 向量在物理中的应用**

1. 力向量 …… 114
2. 速度向量 …… 114
3. 如何使用力向量和速度向量解决物理问题 …… 115
4. 平面向量在其他方面的应用 …… 116

## 第三章 三角恒等变换

**3.1 和角公式**

**3.1.1 两角和与差的余弦**

1. 两角差的余弦公式 …… 126
2. 两角和的余弦公式 …… 127
3. 活用公式 …… 127
4. 角的代换 …… 127
5. 非特殊角的三角函数求值、化简 …… 128

**3.1.2 两角和与差的正弦**

1. 两角和与差的正弦 …… 131
2. 如何使用两角和与差的正弦 …… 131
3. 收缩代换 …… 132
4. 辅助角公式在解题中的应用 …… 133
5. 两角和与差的公式在三角形中的应用 …… 134

**3.1.3 两角和与差的正切**

1. 两角和与差的正切 …… 136
2. 活用公式 …… 136
3. 常值代换 …… 136
4. 化简、求值 …… 137
5. 证明 …… 137
6. 给值求角问题 …… 137
7. 综合问题 …… 137

**3.2 倍角公式和半角公式**

**3.2.1 倍角公式**

1. 二倍角的正弦、余弦、正切 …… 141
2. 活用公式 …… 141
3. 降幂与升幂 …… 142
4. 二倍角正弦、余弦公式的变通公式 …… 142
5. 二倍角公式的实际应用 …… 143

**3.2.2 半角的正弦、余弦和正切**

1. 半角公式 …… 146
2. 如何使用公式 …… 146
3. 半角公式的应用 …… 147

**3.3 三角函数的积化和差与和差化积**

1. 三角函数的积化和差公式 …… 150
2. 和差化积公式 …… 150
3. 如何使用积化和差、和差化积的公式 …… 150
4. 和积互化的应用 …… 151

# 学法指津

## ——怎样学好人教B版高中数学(必修4)

本模块主要包括基本初等函数(Ⅱ)、平面向量和三角恒等变换三章内容. 这三章内容是中学数学的重要内容之一,也是学习高等数学的基础. 模块4的内容在整个高中数学中占有重要的地位,在历年数学高考试题中占有相当的比例. 要学好本模块,可以从以下几个方面入手.

**一、注重理解,探究规律,灵活运用**

本模块的第一、三章是三角函数的学习. 三角函数这一章最大的特点是公式多,不易记忆. 公式都不能记住,更不用说灵活地运用它们去分析解决问题了. 怎样解决这个问题呢? 首先应从数学学科的特点出发,数学是一门需要用心灵去感悟的学科,它不主张死记硬背,主张在理解的基础上灵活运用. 那么我们在学习三角函数这一章时不应死记硬背公式,而应探求公式的结构特征、来龙去脉和相互联系,在理解、掌握规律的基础上加以记忆,掌握了公式的结构特征就能灵活地运用它. 像两角和与差的三角函数、二倍角的三角函数这两节就有几十个公式,抓住了结构特征和来龙去脉,记忆就相当轻松,也可运用自如了. 再如诱导公式有几十个公式,通过分析它们的结构特征,归纳总结为一句口诀"奇变偶不变,符号看象限",就十分简单了.

灵活变换,掌握基本的思想方法. 三角恒等变换丰富多彩,灵活多变,公式也比较多,运用时,稍不注意就会原地打转(即将多个公式变形后又变回原来的形式). 解决这个问题就需要掌握一些基本的三角恒等变换的思想方法,这样就能迅速地达到化简的目的,快速、巧妙地解题. 其常用的三角恒等变换有:切割化弦、常值代换、降幂与升幂、收缩代换、角的代换、函数名称的互化、和差与积的互化.

**二、新旧对比,以旧带新,注重运用**

本模块的第二章是平面向量. 平面向量是数学中的一个重要概念,向量知识与方法不仅仅与数学学科内的许多内容(如函数、三角函数、平面解析几何等)有联系,而且与物理以及实际问题有密切联系,因而平面向量成为当前乃至以后高考的热点. 在学习这一章时应关注以下几点:

关注向量与实数的关系. 向量是具有大小和方向的量,它不同于实数(仅有大小),但也有千丝万缕的联系. 因此我们在学习中,只要注意探究它们之间的联系与区别,就能使我们的学习有事半功倍之效,且不易掉进误区. 如把向量看做一个量、一个整体,则平面向量的线性运算(加法、减法、数乘)就可以类比于实数一样地进行,这样,以旧带新就为我们学习平面向量带来了捷径,但另一方面平面向量毕竟不是实数,它还是有方向的,因而它还有许多不同于实数运算的地方,如实数的结合律就不满足平面向量的数量积(而这一点是高考的一个热点),因此准确把握了平面向量与实数的不同之处,就为我们高质量地学习平面向量提供了有效途径.

注重平面向量的应用. 平面向量的数与形的紧密结合,为我们解决其他数学知识提供了有力的工具,加上我们的高考命题注重"在知识的交汇处设计试题",因而平面向量与函数、三角函数、解析几何知识综合在一起的问题频频出现在高考中,成为新的热点. 如何在平面向量的学习过程中提高自己的综合能力呢? 一个有效途径是:关注平面向量的应用功能. 如利用向量可以解决几何中的平行、共线、共点等诸多问题;利用向量可以解决物理中的力、速度、功等许多问题.

**三、多归纳、多总结、提炼思想方法**

在每一章、每一节的学习中,我们应不断归纳知识点,构建知识网络,总结规律,提炼数学思想方法. 如本模块的三角函数和平面向量的学习中应突出主要的思想方法那就是"数形结合"的思想. 在三角函数中,由于性质多,以形助数,可以使三角函数的性质更加丰富,同时也抓住了三角函数的图象的一些基本特征,而这些性质特征可以帮助我们分析问题、解决问题. 平面向量中的向量兼有"数"与"形"的特征,更需要"数形结合"的思想方法去理解它,运用它.

# 第一章　基本初等函数（Ⅱ）

## 课标单元知识

本章数学内容共有三个部分：角的概念的推广、任意角的三角函数、三角函数的图象和性质. 本章考查频率最高的是任意角的三角函数(包括三角函数的定义、三角函数的符号、直角三角形中锐角的三角函数)，其次是正弦、余弦函数的图象和性质，同角三角函数的基本关系式，已知三角函数值求角.

三角函数是中学数学的重要内容，它既是解决生产、科研等实际问题的工具，又是进一步学习其他相关知识和高等数学的基础，它在物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中有着广泛的应用.

学习本章内容时，既要掌握三角函数中各个函数的基本知识，又要熟悉它们之间的内在联系，对于众多的三角公式，既要用心去记忆，又要掌握公式推导的规律，不断总结公式应用的技巧.

本章的重点是：任意角三角函数的概念，同角三角函数的基本关系式，诱导公式及其运用，正弦曲线的画法和正弦函数的性质. 难点是：弧度制的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系. 常考点：同角三角函数的关系式、诱导公式及三角函数的图象与性质，简单的化简、求值题也时有涉及.

在学习本章内容时应注意以下几点：

(1)本章公式多，要注意记准、记熟并灵活应用.

(2)重点掌握好正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质(定义域、值域、最值、单调性、奇偶性、周期性、对称性)，这是历年高考的重点.

(3)化归思想和数形结合思想是本章最重要的两个数学思想，贯穿本章内容的始终，要认真体会理解并灵活加以应用.

(4)在求值化简中，符号是个易错点，注意切实理解好三角函数的概念及分类讨论思想的应用.

课程标准要求参考：三角函数.

(1)任意角、弧度.

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化.

(2)三角函数.

①借助单位圆理解任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.

②借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式$\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\pi\pm\alpha\right.$ 的正弦、余弦、正切$\left.\right)$，能画出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性.

③借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0,2\pi]$，正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的性质(如单调性、最大值和最小值、图象与 $x$ 轴交点等).

④理解同角三角函数的基本关系式，即 $\sin^2x+\cos^2x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

⑤结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；能借助计算器或计算机画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，观察参数 $A$、$\omega$、$\varphi$ 对函数图象变化的影响.

⑥会用三角函数解决一些简单实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

## 高考命题趋向

分析近几年的全国高考试题，有关三角函数的内容平均每年有25分，约占17%. 试题内容主要有两方面：其一是考查三角函数的性质和图象变换，尤其是三角函数的最大值、最小值和周期，题型多为填空题和选择题；其二是考查三角函数式的恒等变形，如利用有关公式求值，解决简单的综合问题，除了在填空题和选择题中出现外，解答题中的中档题也经常出现这方面的内容.

由于课时减少、公式减少，对学生的能力要求提高，教学中应引起重视，估计高考对这部分的要求可能会降低，题型仍以选择题和填空题为主，重点考查三角函数的图象与性质，希望引起重视，当然，在解答题中有时与三角恒等变换综合考查，多数情况下是容易题，偶尔也为中等题.

考试大纲要求：基本初等函数Ⅱ(三角函数).

(1)任意角的概念、弧度制.

①了解任意角的概念.

②了解弧度制概念,能进行弧度与角度的互化.

(2)三角函数.

①理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.

②能利用单位圆中的三角函数线推导出$\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\pi\pm\alpha$的正弦、余弦、正切的诱导公式,能画出$y=\sin x,y=\cos x$,$y=\tan x$的图象,了解三角函数的周期性.

③理解正弦函数、余弦函数在区间$[0,2\pi]$上的性质(如单调性、最大和最小值与$x$轴交点等).理解正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的单调性.

④理解同角三角函数的基本关系式: $\sin^2x+\cos^2x=1,\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

⑤了解函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的物理意义;能画出$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象,了解参数$A$、$\omega$、$\varphi$对函数图象变化的影响.

⑥了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型,会用三角函数解决一些简单实际问题.

# 1.1 任意角的概念与弧度制

## 1.1.1 角的概念的推广

### 知识·能力聚焦

**1. 任意角的概念**

在平面内,一条射线绕它的端点旋转有两个相反的方向:顺时针方向和逆时针方向.习惯上规定:按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角;按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角;当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

如图1-1-1-1,一条射线的端点是$O$,它从起始位置$OA$按逆时针方向旋转到终止位置$OB$,形成了一个角$\alpha$,点$O$是角$\alpha$的顶点,射线$OA$是角$\alpha$的始边,射线$OB$是角$\alpha$的终边.

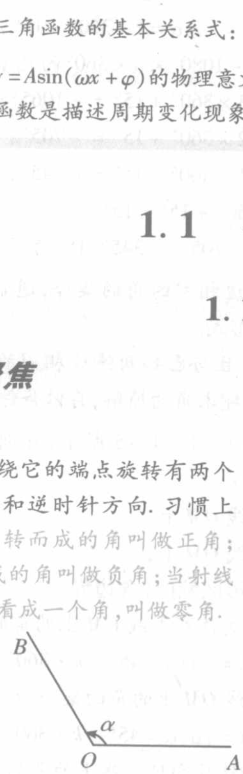


图1-1-1-1

当射线绕其端点按照逆时针方向或按照顺时针方向旋转时,旋转的绝对量可以是任意的.在画图时,常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量.旋转生成的角,又常叫做转角.

角的概念经过推广之后,就应该包括正角、负角、零角,也就是可以形成任意大小的角.

注意:正确理解正角、负角、零角的概念,由定义可知,关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

**2. 象限角**

当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与$x$轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.如30°,

### 名师诠释

◈[考题1] (1)时针走过2小时40分,则分针转过的角度是______.

(2)要将时钟拨慢5分钟,则分针转了______度;时针转了______度.

[解析] (1)首先注意到时针是按顺时针方向转动的,转过的角度是负角;(2)将时钟拨慢了5分钟,分针、时针都是按逆时针方向转动,转过的角度是正角.

(1)∵2小时40分$=2\frac{2}{3}$小时,

时针走过1小时分针恰好转一圈,即转过$-360°$,

∴ $-360°\times2\frac{2}{3}=-960°$.

(2)分针转过的角度是:$\frac{360°}{12}=30°$,

时针转过的角度是:$\frac{30°}{12}=2.5°$,

[答案] (1)$-960°$ (2)30 2.5

◈[考题2] 以下四个命题:

(1)小于90°的角是锐角; (2)第二象限角一定是钝角;

(3)锐角必是第一象限角; (4)负角也可能是第一象限角.

其中,不正确的命题的个数有(  ).

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

[解析] 锐角的范围为$0°<\alpha<90°$,而小于90°的角可以为正也可以为负,所以(1)是不正确的;钝角的范围为$90°<\alpha<180°$,而第二象限角为:$\{\alpha|k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$,所以(2)也是不正确的;(3)显然是正确的;(4)中负角也可能是第一象限角是对的,如$-300°$是第一象限角,所以选B.

[答案] B

$390°$、$-300°$都是第一象限角;$150°$、$480°$、$-240°$都是第二象限角;$240°$、$570°$、$-120°$都是第三象限角;$330°$、$660°$、$-30°$都是第四象限角. 而$0°$、$90°$、$180°$、$270°$、$360°$、$-90°$、$-180°$、$-270°$、$-360°$、$-1080°$等都是非象限角.

注意:如果角的顶点不与坐标原点重合或者角的始边不与$x$轴正半轴重合,则不能判断角在哪一个象限,也就是它不能称作象限角.

**3. 终边相同的角**

将角放在直角坐标系中,给定一个角,就有唯一的一条边与之对应. 反之,对于直角坐标系内任意一条射线$OB$,以它为终边的角不唯一. 若角$\alpha$、$\beta$终边相同,则它们的关系为:将角$\alpha$终边旋转(逆时针或顺时针)$k(k\in\mathbf{Z})$周即得角$\beta$. $\alpha$、$\beta$的数量关系用集合表示$\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$,即$\alpha$、$\beta$大小相差$360°$的整数$k$倍.

所有与角$\alpha$终边相同的角,连同角$\alpha$在内,可构成一个集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角$\alpha$终边相同的角,都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

注意:(1)$\alpha$为任意角.

(2)$k\cdot360°$与$\alpha$之间是"+"号,$k\cdot360°-\alpha$可理解为$k\cdot360°+(-\alpha)$.

(3)相等的角,终边一定相同;终边相同的角不一定相等. 终边相同的角有无数个,它们相差$360°$的整数倍.

(4)$k\in\mathbf{Z}$这一条件不可少.

**4. 各象限角的集合与轴线角的集合**

(1)象限角的集合.

第一象限角集合为

$\{x|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第二象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角集合为

$\{x|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(2)轴线角(终边在坐标轴上的角)的集合.

终边落在$x$轴的非负半轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在$x$轴的非正半轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在$x$轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在$y$轴的非负半轴上, 角的集合为

$\{x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在$y$轴的非正半轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在$y$轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在坐标轴上, 角的集合为

$\{x|x=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

注意:象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一,也还有其他的表示形式. 如:终边落在$y$轴的非正半轴上,角的集合为$\{x|x=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

[点评] 解此题的关键是正确理解角的概念,并能对一些常见角进行辨别:(1)正角、负角是以射线绕端点的旋转方向定义的,零角是射线没有做任何旋转,其顶点都在原点,始边为$x$轴的正半轴,所不同的是终边的旋转方向不同. 一个角是第几象限角,关键是看这个角的终边落在第几象限. (2)"小于$90°$的角""锐角""第一象限角"的根本区别在于其范围的不同,它们的范围分别是:"$\alpha<90°$""$0°<\alpha<90°$""$k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$".

◈ [考题3] (1)写出与$15°$角终边相同的角的集合;

(2)在(1)的集合中,将适合不等式$-1080°<\alpha<360°$的元素$\alpha$求出来.

[解析] (1)与$15°$角终边相同的角的集合是:

$$M=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+15°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2)在$M$中适合$-1080°<\alpha<360°$的元素是:

取$k=-3$时,$-3\times360°+15°=-1065°$;

取$k=-2$时,$-2\times360°+15°=-705°$;

取$k=-1$时,$-1\times360°+15°=-345°$;

取$k=0$时,$0\times360°+15°=15°$.

即元素$-1065°$、$-705°$、$-345°$、$15°$为所求.

[点评] (1)终边相同的角的集合,通常表示为$k\cdot360°+\beta(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\beta<360°)$的形式.

(2)求符合条件且与已知两终边相同的角,先写出与已知角终边相同的角的一般式,即求角的通解,再依条件讨论$k$(即求特解).

◈ [考题4] 如图1-1-1-5所示,分别写出适合下列条件的角的集合:

(1)终边落在射线$OM$上;

(2)终边落在直线$OM$上;

(3)终边落在阴影区域内(含边界).

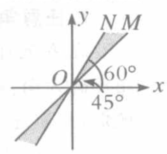



图1-1-1-5

[解析] (1)终边落在射线$OM$上的角的集合为

$$A=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2)终边落在射线$OM$上的角的集合为

$$A=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

终边落在射线$OM$反向延长线上的角的集合为

$$B=\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

则终边落在直线$OM$上的角的集合为

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=45°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=45°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=45°+180°\text{的偶数倍}\}\cup\{\alpha|\alpha=45°+180°\text{的奇数倍}\}\\&=\{\alpha|\alpha=45°+180°\text{的整数倍}\}\\&=\{\alpha|\alpha=45°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

(3)同理可得终边落在直线$ON$上的角的集合为

$$\{\beta|\beta=60°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\},$$

则终边落在阴影区域内(含边界)的角的集合为

$$\{\alpha|45°+n\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}.$$

[点评] 正确写出终边在同一直线上的角的集合是解决这类问题的关键,另外要注意角的旋转方向.

◈ [考题5] 已知角$\alpha$是第二象限角,试判断$\frac{\alpha}{2}$和$2\alpha$角各是第几象限角.

## 2 方法·技巧平台

**5. $\frac{\alpha}{n}(n\in \mathbf{N}^*)$的象限的确定**

已知$\alpha$为某象限的角,如何确定$\frac{\alpha}{n}$所在的象限呢?我们能否从[考题6]的学习中得到启示,从而把它推广到一般情况呢?

若已知$\alpha$是第$m$象限角($m=1,2,3,4$),求$\frac{\alpha}{n}$所在象限的问题.从[考题6]可知:

(1)$\frac{\alpha}{2}$所在的象限问题.

作出各个象限的角平分线,它们与坐标轴把周角等分成8个区域,从$x$轴的非负半轴起,按逆时针方向把这8个区域依次循环标上号码1、2、3、4,则标号是几的两个区域,就是$\alpha$为第几象限角时,$\frac{\alpha}{2}$终边落在的区域,$\frac{\alpha}{2}$所在的象限就可以直观地看出,如图1-1-1-2所示.

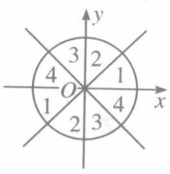



图1-1-1-2

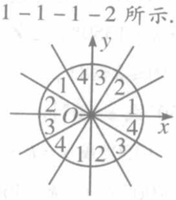



图1-1-1-3

(2)$\frac{\alpha}{3}$所在的象限问题.

作出三等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成12个区域.从$x$轴的非负半轴起,按逆时针方向把这12个区域依次循环标上号码1、2、3、4,则标号是几的区域,就是$\alpha$为第几象限角时,$\frac{\alpha}{3}$终边落在的区域,$\frac{\alpha}{3}$所在的象限就可直观地看出,如图1-1-1-3所示.

(3)$\frac{\alpha}{n}$所在的象限问题.

一般地,要确定$\frac{\alpha}{n}$所在的象限,可以作出$n$等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成$4n$个区域,从$x$轴的非负半轴起,按逆时针方向把这$4n$个区域依次循环标上号码1、2、3、4,则标号是几的区域,就是$\alpha$为第几象限角时,$\frac{\alpha}{n}$终边落在的区域,$\frac{\alpha}{n}$所在的象限就可直观地看出.

**6. 数形结合思想的应用**

数形结合的方法,能将区间角(象限角是特殊的区间角)在直角坐标系中正确地用图形表示出来;反之,对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围,能正确地用区间角表示.

[解析] (1)$\because \alpha$在第二象限,

$\therefore 90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 45°+k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<90°+k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}$,则$k=2n$或$k=2n+1,n\in \mathbf{Z}$.

当$k=2n$,即$45°+n\cdot 360°<\frac{\alpha}{2}<90°+n\cdot 360°,n\in \mathbf{Z}$时,$\frac{\alpha}{2}$在第一象限;

当$k=2n+1$,即$225°+n\cdot 360°<\frac{\alpha}{2}<270°+n\cdot 360°,n\in \mathbf{Z}$时,$\frac{\alpha}{2}$在第三象限.

(2)$\because 90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 180°+2k\cdot 360°<2\alpha<360°+2k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$.

则$2\alpha$是第三或第四象限角或角的终边在$y$轴的非正半轴上.

◈[考题6] 已知$\alpha$是第三象限角,则$\frac{\alpha}{3}$是第几象限角?

[解析] 先把$\alpha$是第三象限角用不等式表示出来,再对$k$进行分类讨论得出结果,或利用数形结合来求解.

解法一:$\because \alpha$是第三象限角,

$\therefore 180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$,

$\therefore 60°+k\cdot 120°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot 120°$.

(1)当$k=3m(m\in \mathbf{Z})$时,可得

$60°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<90°+m\cdot 360°(m\in \mathbf{Z})$,

故$\frac{\alpha}{3}$的终边在第一象限;

(2)当$k=3m+1(m\in \mathbf{Z})$时,可得

$180°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<210°+m\cdot 360°(m\in \mathbf{Z})$,

故$\frac{\alpha}{3}$的终边在第三象限;

(3)当$k=3m+2(m\in \mathbf{Z})$时,可得

$300°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<330°+m\cdot 360°(m\in \mathbf{Z})$,

故$\frac{\alpha}{3}$的终边在第四象限.

综上可知,$\frac{\alpha}{3}$是第一或第三或第四象限角.

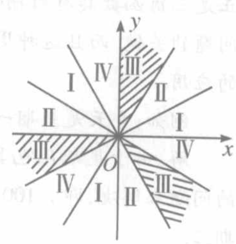



图1-1-1-6

解法二:由图1-1-1-6可知,$\frac{\alpha}{3}$是第一或第三或第四象限角.

[思考] (1)本题若有同学这样解:由$180°<\alpha<270°$,得$60°<\frac{\alpha}{3}<90°$,则$\frac{\alpha}{3}$是第一象限角,或者:由$180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$,得$60°+k\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$,故$\frac{\alpha}{3}$是第一象限角.这两种解法错在哪里?

(2)用几何法解决这类问题好在哪里?用它是否还能进一步确定$\frac{\alpha}{n}(n\in \mathbf{Z})$的取值集合?如何确定?

例如:若角 $\alpha$ 的终边在如图 1-1-1-4 中阴影所表示的范围内,则 $\alpha$ 角组成的集合为______.

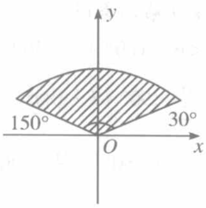


图 1-1-1-4

解:在 $0°\sim360°$ 范围内,终边落在阴影范围内的角是 $30°\leqslant\alpha\leqslant150°$,故满足条件的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot360°+30°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}$.

**7. 与角有关的集合问题**

解决与角有关的集合问题的关键是弄清集合包含哪些元素.其方法有:一是将集合中表示角的式子化为同一种形式(这种方法要用到整数分类的有关知识,即分类讨论);二是用列举法把集合具体化;三是数形结合,即在直角坐标平面上分别作出这些角.

例如:已知集合 $M=\{\alpha|\alpha=(4k\pm1)90°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{\beta|\beta=(2k+1)90°,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $M$ 与 $N$ 的关系如何?

解:$M=\{\cdots,-450°,-270°,-90°,90°,270°,450°,\cdots\}$,$N=\{\cdots,-450°,-270°,-90°,90°,270°,450°,\cdots\}$,$\therefore M=N$.

## 3 创新·思维拓展

**8. 角的“周期现象”**

一个角每旋转一周(顺时针或逆时针),终边就又回到原来的位置,终边相同的角周而复始地出现,这正是三角函数具有周期性的本质原因,也是解决某些问题的关键.而且这种周期现象在现实生活中有广泛的应用.

例如:今天是星期一,则 100 天后是星期几?

解:由于星期几也具有周期性,因而可类似于角的问题来解决,即 $\because 100=7\times14+2$,$\therefore$ 100 天后是星期三.

再如:已知 $f(x)=5°\cdot x+20°$,$g(x)=6°\cdot x+30°$.是否存在整数 $T$,使得对于任意的 $x$ 的值,都有 $f(x+T)$ 与 $f(x)$、$g(x+T)$ 与 $g(x)$ 均表示终边相同的角?若存在,求出 $T$ 的值;若不存在,则说明理由.

解:$\because f(x+T)=5°(x+T)+20°=f(x)+5°\cdot T$,

若 $f(x+T)$ 与 $f(x)$ 表示终边相同的角,则 $5°\cdot T=k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore T=72k_1(k_1\in\mathbf{Z})$,

同理有 $T=60k_2(k_2\in\mathbf{Z})$,

$\therefore T$ 是 72 与 60 的公倍数,即 $T=360k(k\in\mathbf{Z})$,

故存在这样的整数 $T=360k(k\in\mathbf{Z})$.

◈[考题 7] 已知集合 $A=\{\alpha|30°+k\cdot180°<\alpha<90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\beta|-45°+k\cdot360°<\beta<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,求 $A\cap B$.

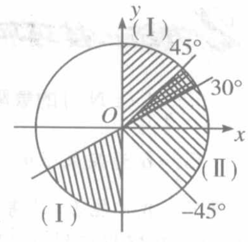


图 1-1-1-7

[解析] 借助图形,在直角坐标平面内,分别找出集合 $A$ 和集合 $B$ 中的角的终边所在的区域,终边在这两个区域的公共部分内的角的集合,就是 $A\cap B$.

如图 1-1-1-7,集合 $A$ 中的角的终边在阴影(Ⅰ)内,集合 $B$ 中的角的终边在阴影(Ⅱ)内,因此集合 $A\cap B$ 中的角的终边在阴影(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共部分内,所以

$A\cap B=\{\alpha|30°+k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

[思考] 用数形结合来解决这类问题好在哪里?需要注意的问题是什么?

◈[考题 8] 已知集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot1350°,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\beta|\beta=k\cdot150°,-10\leqslant k\leqslant8\}$.求与 $A\cap B$ 中角终边相同角的集合 $S$.

[解析] $\because A=\{\alpha|\alpha=k\cdot1350°,k\in\mathbf{Z}\}$,

$B=\{\beta|\beta=k\cdot150°,-10\leqslant k\leqslant8\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|x=-1350°$ 或 $x=0°\}$.

$\therefore S=\{x|x=k\cdot360°-1350°$ 或 $x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x|x=k\cdot360°+90°$ 或 $x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

◈[考题 9] 2003 年 10 月 15 日上午 9 时,中国首位航天员杨利伟乘坐的“神舟”五号载人飞船,在酒泉卫星发射中心用“长征二号”F 型运载火箭发射升空.按预定轨道环绕地球十四圈,在太空飞行 21 小时 18 分,16 日 6 时 23 分,在内蒙古中部地区成功着陆,中国首次载人航天飞行任务获得圆满成功.

设飞船在距地面 343km 的太空中绕地球做匀速圆周运动,90 分钟绕地球一圈,地球的平均半径为 6378km,试计算:

(1)飞船绕地球 14 周共转过的角度是多少?

(2)在太空飞行中,杨利伟与家人进行了一场特别的通话,通话的时间持续 4 分 50 秒,在这段时间内,杨利伟所乘坐的飞船转过的角度是多少?飞船走了多远?(不考虑其他因素)

[解析] (1)由于飞船绕地球一周转了 360°,14 圈共转了 $14\times360°=5040°$.

(2)设飞船转过的角度是 $\theta$,飞船绕地球一周用时 $90\times60=5400$(秒),转了 360°,而 4 分 50 秒为 290 秒,则有 $\frac{5400}{360}=\frac{290}{\theta}$,解得 $\theta\approx19.3°$.

又由于飞船运行的圆周半径为 $343+6378=6721$(km),飞行一周走了 $2\pi\times6721=13442\pi$(km),则每转 1° 走了 $\frac{13442\pi}{360}$km,故 4 分 50 秒走了 $\frac{13442\pi}{360}\times19.3\approx2262.8$(km).