

有限元理论与方法

(第三分册)

● 钟万勰 李开泰 主编



科学出版社
www.sciencep.com

有限元理论与方法

(第三分册)

钟万勰 李开泰 主编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书由 32 位国内外专家经过几年的努力编著而成。内容包括有限元方法数学基础及程序实现、时间相关有限元、有限元外推、超收敛、多重网格法、区域分裂法、非标准有限元,以及有限元法在弹性力学、塑性力学、岩土力学、流体力学、渗流力学和电磁场等领域的应用。这些内容不但反映了有限元方法所需的数学基础、国际上在这些领域的最新成果,而且着重反映了国内专家在上述各方面所做的部分工作。

本书可以作为高等院校数学、力学及相关专业研究生和教师的教学用书,也可作为从事有关科学计算及工程应用的科研人员和工程技术人员的技术书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元理论与方法/黄艾香等主编. —北京:科学出版社, 2009
ISBN 978-7-03-022805-5

I. 有… II. 黄… III. 有限元法 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 124267 号

责任编辑:林 鹏 刘嘉善 赵彦超/责任校对:桂伟利

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2009 年 5 月第一次印刷 印张: 67

印数: 1—1 500 字数: 1322 000

定价: 168.00 元(共三册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

前 言

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性,其数值解法长期以来吸引着数学家、物理学家和工程师们的关注.一种数值方法包括它的数学基础及其在计算机上的实现,都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善.计算机科学的发展,现代大型高速电子计算机的出现,对数值方法冲击之大,是历史上从未有过的.作为求解偏微分方程的一个强有力手段——有限元方法,正是电子计算机时代的产物.

有限元方法摒弃了刻画自然规律中局部的、瞬时的数学描述,而以大范围的、全过程的数学分析作为自己的出发点.局部和整体、瞬时和全过程,只是以两种不同的角度来描述自然现象.一个过程,既可以被微分方程所描述,又服从相应的变分原理,方法虽然不同,却从不同的侧面来反映同一自然规律.

数值分析的任务就是从无限维空间转化到有限维空间,把连续型结构转变为离散型结构.有限元方法是利用函数分片多项式逼近模式来实现离散化过程的,也就是说,有限元方法所依赖的有限维子空间,其基函数系是具有有限支集的分片多项式函数系,这样的函数系与大范围分析相结合,反映了场内任何两个局部地点场变量的相互依赖关系.任何一个局部地点,它的影响元素集,正是基函数本身和它的支集.因此,离散化所得到的代数方程的系数矩阵是稀疏的.若区域分割细小化,则支集不相交的基函数对愈多,矩阵也就愈稀疏.这给数值解法带来了极大的好处,标准正规有限元的数学描述和程序化过程是完美的,其数学基础是完善的和稳固的,应用对象无论是科学的还是技术和工业的,都是无与伦比的.这就是它取得如此成功的关键所在.

应该说除了微积分之外没有一种数学方法会像有限元方法一样在科学、技术、工业工程以及社会科学中有如此广泛的应用,且获得如此巨大的成功.不断涌现的商用有限元软件包如 NASTRAN, ASKA, ADINA, COMSOL, FIDAP, NUMECA 等涉及到科学、技术的广泛领域.每年有几万个用户、花费几亿美元来不断研发新的有限元软件.

有限元方法发展的历史,可以追溯到 1943 年 Courant 提出在一个三角形内的线性逼近思想,而从变分原理来离散化数学物理问题. Courant 以及前苏联数学家 Mihelin 等早在 20 世纪四五十年代就已建立了数学基础和求解思想. 20 世纪 50 年代西方工程师们提出的结构矩阵分析方法被发展成为后来的有限元,尤其是 20 世纪 60 年代后,愈来愈多的数学家涉足这个领域,使得有限元的发展纳入数学的轨道,从逐渐完善数学的描述,到建立牢固的数学基础,以及提出各种新型非标准有限元等.

在有限元发展历史中,不得不提及中国数学家在有限元方面做过的突出贡献.国际上公认中国数学家冯康独立提出了有限元方法并且证明了收敛性问

题, 这个工作比西方 Zlamal(1968) 的文章早 4 年. 20 世纪 70 年代美国应用数学代表团访问中国, 回国后所写报告中对有限元方法在中国得到如此广泛的应用和如此之多的数学家、工程师从事有限元应用感到惊讶. 其次我们应该提到的是石钟慈院士在非协调有限元方面的贡献, 他的相关文章全部被 Ciarlet 和 Liou 主编的《数值分析手册》的第二卷中引用, 是中国学者被这部论著引用文章最多的一位数学家. 林群及其合作者在有限元外推、有限元高精度算法以及超收敛方面的创造性工作, 以及应隆安教授提出的无限元方法, 都得到了国际上的高度评价.

本书邀请了 32 位专家, 从有限元数学基础和数学描述开始, 介绍了标准有限元的数学理论、有限元方程组求解、特征值问题、非标准有限元、时间相关有限元、有限元超收敛、自适应有限元以及有限元在弹性力学、障碍问题、流体力学、环境科学、渗流力学、电磁学等各个领域的应用. 本书既可作为高等院校数学、力学及相关专业研究生和教师的教学用书, 也可作为从事有关科学计算及工程应用的科研人员和工程技术人员工具书.

在本书的编写过程中得到了国家自然科学基金委员会及一些专家, 如石钟慈院士、崔俊芝、韩厚德教授等的支持与帮助, 对此我们表示衷心的感谢.

李开泰

2009 年 3 月

目 录

第六篇 有限元方法应用

第 1 章 弹性力学	钟万勰
1.1 引言	713
1.2 基本微分方程和边界条件	713
1.3 最小总势能原理	715
1.4 最小总余能原理	715
1.5 Hellinger-Reissner 二类变量广义变分原理	716
1.6 胡海昌 - 鹭津三类变量广义变分原理	716
1.7 不协调元与变分犯规	717
1.8 板弯曲与平面弹性问题的相似性原理	717
1.9 板弯曲与平面弹性问题的多类变量变分原理	722
1.10 矩形板弯曲问题的解析解	723
参考文献	729
第 2 章 基于平面弹性 - 板弯曲模拟关系的新一类薄板有限元	钟万勰
2.1 引言	730
2.2 基于平面弹性 - 板弯曲模拟关系的薄板有限元的一般理论	730
2.2.1 “初始单元”的构造	731
2.2.2 “初始单元”向最终板单元的转换	731
2.2.3 d 和 Φ 的确定	732
2.3 一个基于膜板比拟理论的三角形六自由度薄板单元 MPST6	739
2.4 一个基于膜板比拟理论的四节点八自由度理性板单元 MPSRQ8	740
2.5 一个基于平面弹性 - 板弯曲比拟理论的新的四节点十二自由度薄板 单元 —— MPSQ12	743
2.6 小结	746
2.7 数值算例: 中心集中力及均布力作用下的夹支和简支方板	746
参考文献	748
第 3 章 薄区域弹性壳体和板有限元分析	李开泰
3.1 三维弹性材料的本构方程	749
3.1.1 三维区域中曲线坐标系下的度量张量	749
3.1.2 位移场的变形张量和应力张量	750
3.1.3 应力张量	752
3.1.4 应变张量和应力张量本构方程	753
3.2 曲线坐标系下的三维弹性力学的动力学方程组和变分原理	758
3.2.1 边值问题	758

3.2.2 非线性边值问题	763
3.3 非线性弹性力学方程组的有限元逼近	765
3.4 线性弹性壳体	769
3.4.1 几何预备知识	769
3.4.2 壳体分类	774
3.4.3 曲面上的 Korn 不等式	775
3.4.4 三维壳体的变分问题	776
3.5 经典弹性壳体模型和有限元逼近	778
3.6 一个新的渐近方法	783
3.7 弹性壳体模型的有限元逼近	786
参考文献	791
第 4 章 塑性力学和岩土力学有限元法	俞茂宏
4.1 概述	794
4.2 弹性塑性临界条件、线性到非线性的转化	796
4.3 弹塑性应力应变关系	799
4.4 岩土力学中弹塑性问题	804
4.4.1 弹塑性问题分析的基本方法	804
4.4.2 弹塑性问题的增量求解法	808
4.5 岩土力学问题的特殊单元	811
4.5.1 平面节理单元 (Goodman 单元)	811
4.5.2 节理非线性分析	813
4.6 岩土力学工程问题的处理	814
4.6.1 初始地应力与开挖释放荷载的处理	814
4.6.2 施工过程模拟	816
4.7 岩土黏弹塑性有限元模拟	816
4.7.1 黏塑性材料本构方程	816
4.7.2 黏塑性应变增量和应力增量	817
4.7.3 弹黏塑性有限元法	822
4.7.4 黏弹塑性有限元分析步骤	825
参考文献	826
第 5 章 变分不等式有限元法	周叔子
5.1 变分不等式概念	827
5.2 障碍问题的有限元方法	831
5.2.1 协调一次元方法	831
5.2.2 协调二次元方法	833
5.2.3 非协调元方法	834
5.3 单边问题的有限元方法	836

5.3.1 协调一次元方法	836
5.3.2 混合元方法	837
5.4 弹性接触问题的有限元方法	840
5.4.1 弹性接触问题的数学模型	840
5.4.2 接触问题的有限元方法	841
5.4.3 接触问题的混合有限元方法	842
5.4.4 摩擦问题	844
5.5 离散问题基本解法	847
5.6 变分不等式多层网格法	850
5.7 变分不等式的区域分解法	852
参考文献	855
第 6 章 黏性流动的 Navier-Stokes 方程	李开泰
6.1 不可压缩的 Navier-Stokes 方程	857
6.2 解的存在唯一	863
6.3 解的长时间行为、吸引子及其逼近	866
6.4 Navier-Stokes 方程的混合边值问题	869
6.5 可压缩 Navier-Stokes 方程	873
6.6 Navier-Stokes 方程的时间离散	876
6.7 时间半离散化的收敛性	880
6.8 时间半离散化的误差估计	881
6.9 算子分裂算法	883
6.10 误差估计	886
6.11 Navier-Stokes 方程的多水平方法	888
6.12 有限元的多水平算法	893
6.13 其他流动问题	899
第 7 章 定常的 Navier-Stokes 方程的有限元逼近	李开泰
7.1 定常 Navier-Stokes 方程	903
7.1.1 奇异解和非奇异解	905
7.1.2 非奇异解分支	906
7.2 非奇异解分支的迭代解	910
7.2.1 简单梯度法和共轭梯度法的收敛性	910
7.2.2 Navier-Stokes 方程的最优控制和最小二乘方法	911
7.2.3 连续算法	916
7.3 广义 Stokes 问题的 Uzawa 算法	917
7.4 Navier-Stokes 方程的 Galerkin 有限元逼近	921
7.5 最小二乘共轭梯度方法及其有限元实现	923

7.6	Stokes 问题有限元逼近	924
7.6.1	有限元逼近	924
7.6.2	inf-sup 条件	926
7.6.3	三角形有限元子空间 (X_h, M_h)	926
7.6.4	四边形有限元子空间	929
7.6.5	Hood-Taylor 有限元	930
7.7	Navier-Stokes 方程有限元的两个水平算法	931
	参考文献	938
第 8 章	渗流力学	袁益让
8.1	引言	943
8.2	油水两相渗流驱动问题的特征有限元方法	944
8.2.1	数学模型	944
8.2.2	特征有限元全离散格式	946
8.2.3	收敛性估计	948
8.3	油水两相驱动问题的混合元方法	949
8.3.1	数学模型	949
8.3.2	半离散混合元格式和收敛性分析	950
8.3.3	全离散混合元格式和收敛性分析	952
8.3.4	特征混合元方法和分析	953
8.4	可压缩二相驱动问题的特征有限元方法和混合元法	954
8.4.1	数学模型	954
8.4.2	半离散化有限元格式和混合元格式	955
8.4.3	有限元格式和混合元格式的数值分析	956
8.4.4	特征有限元方法和分析	957
8.5	二相渗流驱动问题的变网格有限元法	958
8.5.1	数学模型	958
8.5.2	变网格有限元格式	959
8.5.3	收敛性分析	962
8.6	两相渗流动边值问题的有限元方法	962
8.6.1	数学模型	962
8.6.2	定压渗透边值问题的特征混合元格式和分析	963
8.6.3	不渗透问题的特征混合元格式	969
8.7	核废料污染问题的混合元方法	969
8.7.1	数学模型	969
8.7.2	混合元特征差分格式	972
8.7.3	收敛性分析	975
8.8	海水入侵数值模拟的特征有限元方法	976
8.8.1	数学模型	976

8.8.2 特征有限元格式和收敛性分析	978
8.8.3 实际应用	980
8.9 可压缩两相驱动算子分裂特征有限元格式	982
8.9.1 数学模型	982
8.9.2 算子分裂三层特征有限元格式	983
8.9.3 收敛性定理	988
8.10 多层渗流方程偶合系统的算子分裂特征有限元方法	988
8.10.1 数学模型	988
8.10.2 算子分裂特征有限元格式	989
8.10.3 收敛性定理	993
8.10.4 实际应用	994
参考文献	996
第 9 章 电磁场	盛剑霓
9.1 引言	998
9.2 恒定电场的计算	998
9.2.1 定解问题或数学模型	998
9.2.2 变分问题	999
9.2.3 二维 Laplace 电场的有限元方程	1001
9.2.4 二维 Poisson 电场的有限元方程	1005
9.2.5 轴对称电场的有限元方程	1007
9.2.6 三维电场的有限元方程	1008
9.3 恒定磁场的计算	1008
9.3.1 定解问题或数学模型	1008
9.3.2 变分问题及有限元方程	1011
9.4 涡流场的计算	1014
9.4.1 正弦稳态涡流场的基本方程组	1014
9.4.2 二维线性正弦稳态涡流场的计算	1015
9.4.3 轴对称线性正弦稳态涡流场的计算	1019
9.4.4 三维线性正弦稳态涡流场的定解问题	1020
9.4.5 $\vec{A}, \dot{\varphi} - \vec{A}$ 法计算分层媒质中三维非线性涡流场	1021
9.4.6 $\vec{A}_r, \dot{\varphi} - \vec{A}_r$ 法计算分层媒质中三维非线性涡流场	1024
9.4.7 $\vec{A}, \dot{\varphi} - \dot{\psi}$ 法及 $\vec{A}, \dot{\varphi} - \vec{A} - \dot{\psi}$ 法计算分层媒质中三维非线性涡 流场	1026
9.4.8 $\vec{A}^* - \dot{\psi}$ 法计算分层媒质中三维非线性涡流场	1028
9.4.9 $\vec{T}, \dot{\psi}$ 法的提出	1029
9.4.10 $\vec{T}, \dot{\psi}$ 法计算线性二维和轴对称涡流场	1030
参考文献	1031

第1章 弹性力学

1.1 引言

20 世纪 50 年代中期, Turner, Clough, Martin, Topp 等人首先在弹性力学中提出了有限元法的基本思想和方法. 经过 Zienkiewicz 等人的发展, 有限元法得到了迅速的发展, 在不到 10 年的时间里构造了一大批单元, 并吸引了一大批数学工作者参加进来, 和力学工作者一起, 逐步建立起有限元法的数学理论及通用的求解方法及其软件, 并形成了一门新兴的学科——计算力学.

在传统的力学中, 结构力学和固体力学的各类问题, 如杆系、板、壳、块体, 其基本方程和求解方法都有明显的差别, 归属于不同的研究领域. 现在, 在计算力学这一新工具面前统一了起来, 力学界在历史上第一次向工业界提供了统一求解很多类型问题的方法和工具——有限元分析程序. 由于其强大的生命力, 这个方法迅速地向其他力学领域和物理领域推广.

变分原理是有限元法的理论基础. 弹性力学经典的变分原理有一类变量的最小总势能原理和最小总余能原理、二类变量的 Hellinger-Reissner 变分原理, 直至三类变量的胡-鹗变分原理^[1~4], 这些变分原理都得到了广泛应用.

在计算力学基本理论、方法和应用软件上, 中国学者都做出了自己的贡献. 早在 1954 年, 胡海昌就提出了弹性力学的变分原理, 被国际上称为胡-鹗变分原理, 这个最一般的变分原理成为有限元中杂交元和混合元法的基础. 20 世纪 60 年代, 冯康等给出了基于分片插值和变分方法的偏微分方程的数值解法, 可以看作最早给出了二维有限元收敛性的证明, 建立了有限元方法的数学基础. 石钟慈、张鸿庆等研究了有限元的收敛性数学理论.

1.2 基本微分方程和边界条件

在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中, 弹性体内任一点 P 的应力状态可用 6 个独立的应力分量来表示, 可组成向量形式为

$$\sigma = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23})^T, \quad (1.2.1)$$

已知这六个应力分量就可给出过点 P 的任一斜截面上的应力为

$$F_n = \sigma_{ij} n_i e_j, \quad (1.2.2)$$

其中 e_j 表示坐标正方向的单位矢量, n_i 是斜截面外法线 n 的方向余弦 $n_i = \cos(n, e_i)$. 当斜截面正好是弹性体的表面时, 即对给力边界条件, 其面上的应力应

等于给定的表面力

$$F_n = \bar{F}_n \quad \text{或写为} \quad \sigma_{ij} n_i = \bar{F}_j. \quad (1.2.3)$$

设弹性体受到单位体积外力 F_1, F_2, F_3 的作用, 则应力分量应满足下面的平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0. \quad (1.2.4)$$

类似地, 弹性体内一点的应变状态可用直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下的 6 个应变分量来表示

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23})^T, \quad (1.2.5)$$

在小变形情况下, 应变与位移 $u = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$ 间的几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.2.6)$$

平衡方程 (1.2.4) 及几何方程 (1.2.6) 都与物性无关, 所以对任意线性弹性小变形均适用. 而广义 Hooke 定律则反映了弹性体的物性关系, 即应力 - 应变关系. 一般的线性应力 - 应变关系为

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.2.7)$$

或写成为

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (1.2.8)$$

在弹性体的变形过程中, 外力所做的功转变为弹性体中贮存的应变能. 应变能密度即单位体积的应变能可用应变表达为

$$v_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (1.2.9)$$

于是应力 - 应变关系式 (1.2.7) 也可用应变能密度表达为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial v_\varepsilon(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.2.10)$$

当然关系式 (1.2.8) 也可用应变余能密度

$$v_c(\sigma) = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (1.2.11)$$

来表达

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_c(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.2.12)$$

弹性力学平衡问题在区域 V 内共有 15 个基本方程:

(1) 平衡方程 (1.2.4);

(2) 应变 - 位移的几何关系 (1.2.6);

(3) 应力 - 应变关系 (1.2.7) 或 (1.2.8).

除了要满足上述域内的基本方程外, 弹性力学问题的解还要满足相应的边界条件. 通常可将区域 V 的边界 Γ 区分为给力边界 Γ_σ 与给定位移边界 Γ_u 两种. 在给力边界 Γ_σ 上的边界条件为 (1.2.3), 而在给定位移边界 Γ_u 上的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \text{在 } \Gamma_u, \quad (1.2.13)$$

这里 $\bar{u}_i$ 为给定已知位移.

1.3 最小总势能原理

由于弹性力学精确求解的困难, 于是其近似求解就具有非常重要的意义. 变分方法是近似解法中最有成效的方法之一, 它构成了有限元等数值计算方法的理论基础. 变分原理的泛函与能量密切相关, 因此也称为能量变分原理. 最经典的变分原理有一类变量的最小总势能原理

$$\delta \Pi_p(u) = \delta \left\{ \int_V [v_\varepsilon(\varepsilon) - F_i u_i] dV - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{F}_i u_i d\Gamma \right\} = 0, \quad (1.3.1)$$

Π_p 称为弹性体的总势能, 它是以位移 u 为自变量的泛函, 这里的位移 u 及应变 ε 应预先满足位移边界条件 (1.2.13) 和几何方程 (1.2.6). 式 (1.3.1) 仅仅表明总势能的一次变分为零, 它代表平衡条件. 对于线性弹性体, 可以证明有最小总势能原理: 在一切变形可能的位移场中, 弹性体系的真实位移场使弹性体的总势能最小. 总势能最小表示平衡位置为稳定的.

1.4 最小总余能原理 [5]

变分方程为

$$\delta \Pi_c(\sigma) = \delta \left\{ \int_V v_c(\sigma) dV - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \right\} = 0, \quad (1.4.1)$$

Π_c 称为弹性体的总余能, 它是以应力 σ 为自变量的泛函, 这里应力应预先满足平衡方程 (1.4.4) 和给力边界条件 (1.2.3). 同样, 式 (1.4.1) 仅仅表明总余能的一次变分为零, 它代表变形协调条件. 对于线性弹性体, 可以证明有最小总余能原理: 在一切静力可能的应力场中, 弹性体系的真实应力场使弹性体的总余能最小. 同样, 总余能最小表示平衡位置为稳定的.

1.5 Hellinger-Reissner 二类变量广义变分原理

无论是最小总势能原理还是最小总余能原理都要满足一定的约束条件, 因此从多类变量的角度看, 它们都是条件极值原理. 我们可通过引入 Lagrange 乘子解除这些约束, 然后识别 Lagrange 乘子而得到一个新的变分原理, 即 **Hellinger-Reissner 二类变量广义变分原理**

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2 = \delta \left\{ \int_V \{v_c(\sigma) + u_i[\sigma_{ij,j} + F_i]\} dV - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\sigma} u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{F}_i) d\Gamma \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

该变分原理的另一种等价形式为

$$\begin{aligned} \delta \Pi'_2 = \delta \left\{ \int_V \{\sigma_{ij} u_{i,j} - v_c(\sigma) - F_i u_i\} dV \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{F}_i u_i d\Gamma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Hellinger-Reissner 变分原理以位移 u 和应力 σ 两类变量为自变量, 而应变 ε 仍由位移 u 根据式 (1.2.6) 来得到.

1.6 胡海昌 - 鹭津三类变量广义变分原理

如果将应变 ε 与位移 u 的几何关系 (1.2.6) 也予以解除, 就会导致胡海昌 - 鹭津 (Hu-Washizu) 三类变量广义变分原理

$$\begin{aligned} \delta \Pi_3 = \delta \left\{ \int_V \{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - v_\varepsilon(\varepsilon) + u_i[\sigma_{ij,j} + F_i]\} dV \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{F}_i) d\Gamma \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

该变分原理的另一种等价形式为

$$\begin{aligned} \delta \Pi'_3 = \delta \left\{ \int_V [\sigma_{ij} u_{i,j} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + v_\varepsilon(\varepsilon) - u_i F_i] dV \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{F}_i u_i d\Gamma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

胡海昌 - 鹭津变分原理以位移 u 、应变 ε 和应力 σ 共三类变量为自变量, 它涵盖了平衡方程 (1.2.4)、应变 - 位移的几何关系 (1.2.6) 与应力 - 应变关系 (1.2.7).

1.7 不协调元与变分犯规

前述变分原理的几类独立变量当然都是连续函数. 然而有限元法将整个区域 V 划分为互相不覆盖的许多子区域 $V_e (e = 1, \dots, n)$ 之和, 其相邻单元之间是内部界面. 按变分原理的要求, 试探函数应当在跨越内部界面时连续. 通常的有限元程序系统是基于位移法的, 其对应的变分原理是最小总势能原理, 因此变分原理要求位移的插值函数在跨越内部界面时连续. 虽然在 Hellinger-Reissner 或胡海昌 - 鹭津变分原理中内力平衡的要求可以放松, 但位移连续要求仍是必要的.

位移连续的要求看来简单, 但有限元插值函数的选择却往往未能满足. 最常用的有限元插值函数是多项式, 而多项式的系数是根据单元节点的位移插值的. 相邻单元的公共节点就在其相邻内部界面上, 故除非该界面的位移插值只根据该界面上的公共节点位移确定, 否则相邻单元的位移插值函数在界面两侧就难以保持连续. 虽然单元插值函数未能如变分原理所要求而保持位移连续, 即变分犯规 (variational crime) 了, 但这类位移不连续的有限元仍被当作位移连续插值的单元而用于计算中, 其结果还相当满意, 只要该类不协调元能通过分片试验 (patch test) 便可 [6]. 所谓分片试验就是将单元放在一个均匀应力场中, 即其周界节点发生的位移对应于该均匀应力场; 将该单元内部增加节点继续细分 (分片), 此时计算所得的应力场应当仍给出该均匀应力场, 就是通过了分片试验.

均匀应力场是最基本的应力场解. 一般的弹性力学课题真实解, 其区域内任意点 h 邻域的应力场, 显然都应随 $h \rightarrow 0$ 而趋于均匀应力. 通过分片试验的条件可以表述为: 当单元的节点位移给定均为均匀应力场的位移时, 该单元的有限元计算仍给出此均匀应力, 即通过分片试验的要求表明单元插值函数能覆盖全部均匀应力场. 进一步应注意到相邻单元的不协调性并不是随意的, 有限元位移插值在节点处仍是保持连续的. 有限元插值函数 (多项式等) 是解析的, 因此, 位移不连续只在单元界面处发生, 其不连续的量值只可能是 $O(h^2)$, 其中 h 代表单元的线尺度. 只具有 $O(h^2)$ 不连续的位移插值称为弱变分犯规, 意思是其不连续程度是有限制的, 当网格加密时会趋于消失, 所以冠以“弱”字. 弱变分犯规这个因素非常重要.

可以证明, 通过分片试验的条件是有限元收敛的充分必要条件 [7].

1.8 板弯曲与平面弹性问题的相似性原理 [8]

板弯曲的基本方程为重调和方程, 而弹性平面问题的求解传统是采用 Airy 应力函数, 它也满足重调和方程. 既然基本方程相同, 两者相互间必然有相似性, 这已为许多作者看到 [2]. 对板弯曲问题, 其面内横向荷载 q 可以用一个特解通过叠

加原理预先加以处理, 因此可先考虑 $q = 0$ 的齐次方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0, \quad (1.8.1)$$

而平面弹性的 Airy 应力函数 φ_f 也满足重调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_f = 0. \quad (1.8.2)$$

以此为契机, 可以建立两类问题之间的相似性^[8]. 如与平面弹性的应力 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ 对应板弯曲有曲率 $\kappa = \{\kappa_y, \kappa_x, \kappa_{xy}\}^T$; 与平面弹性的应变 $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ 对应板弯曲有弯矩向量 $m = \{M_y, M_x, 2M_{xy}\}^T$, 而弯矩 - 曲率关系除 Poisson 比 ν 变号外, 显然与平面弹性的应变 - 应力关系是一一对应的. 反过来平面弹性的位移 $u = \{u, v\}^T$ 应当对应于板弯曲的两个弯矩函数 $\phi = \{\phi_x, \phi_y\}^T$, 即板弯曲的基本方程有

(1) 弯矩函数 - 弯矩:

$$m = E^T(\nabla)\phi, \quad E(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (1.8.3)$$

(2) 曲率 - 挠度:

$$\kappa = K(\partial)w, \quad K(\partial) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T. \quad (1.8.4)$$

(3) 协调方程:

$$E(\nabla)(\kappa) = 0. \quad (1.8.5)$$

(4) 弯矩 - 曲率关系:

$$\kappa = \partial U_c(m)/\partial m, \quad (1.8.6)$$

其中应变余能密度为

$$U_c(m) = \frac{6}{Eh^3} [M_y^2 + M_x^2 - 2\nu M_x M_y + (1 + \nu)M_{xy}^2], \quad (1.8.7)$$

而板弯曲的内力正向规定如图 1.8.1 所示.

首先应看到, 类同于平面弹性的刚体位移, 函数 $\phi_x = a_0 + a_2 y$, $\phi_y = a_1 - a_2 x$ 不产生任何弯矩, 其中 a_0, a_1, a_2 为任意常数. 以后称之为零矩函数.

至于边界条件, 为简单计认为是直边, 其外法线记为 n , 沿周界方向为 s , (n, s) 构成右手系. 用 (ϕ_n, ϕ_s) 记述其弯矩函数, 则

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial n \partial s} - \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial s^2} \right). \quad (1.8.8)$$

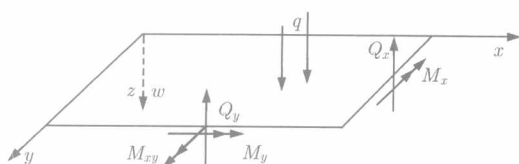


图 1.8.1 板弯曲内力符号正向规定示意图

按板弯曲理论, 在给力边界 Γ_σ 上有给定法向弯矩及等价剪力 $\bar{M}_n$ 及 $\bar{V}_n$:

$$(M_n) = \frac{\partial \phi_s}{\partial s} = \bar{M}_n, \quad \left(V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) = \bar{V}_n - \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial s^2} \quad (1.8.9)$$

的边界条件. 注意到 (1.8.9) 中只含有沿边界 s 的微商, 因此可以积分, 有

$$\phi_s = \bar{\phi}_s = \int_{s_0}^s \bar{M}_n ds' + a_1, \quad \phi_n = \bar{\phi}_n = \int_{s_0}^s (s' - s) \bar{V}_n ds' + a_0 + a_2 s, \quad (1.8.10)$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数, 其余皆为已知函数. 由于给力边界可以有若干段, 因此不能将各分段的 a_0, a_1, a_2 皆行消除, 但利用零矩函数的任选性, 总可将其中一段的三个常数予以消除. 在与平面弹性的相似中, ϕ_n, ϕ_s 相当于 u_n, u_s , 法向与切向位移. 因此板弯曲的给力边界条件相当于平面弹性的位移边界条件. 板弯曲当然还有角点的平衡条件.

与平面弹性的最小总势能原理相似, 可写出用弯矩函数表达的板弯曲的最小总余能原理

$$\Pi^* = v_c^* + v_e^*, \quad \min_{\phi_x, \phi_y} \Pi^*, \quad (1.8.11)$$

其中应变余能为

$$v_c^* = \iint \frac{6}{Eh^3} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (1.8.12)$$

支承位移余能为

$$v_e^* = - \int_{\Gamma_u} (M_n \bar{\theta}_n - V_n \bar{w}) ds = - \int_{\Gamma_u} \left(\bar{\theta}_n \frac{\partial \phi_s}{\partial s} + \bar{w} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial s^2} \right) ds, \quad (1.8.13)$$

其中 $\bar{w}$ 及 $\bar{\theta}_n$ 为给定位移边界上的给定挠度及转角, 都是边界 s 的函数. 作分部积分有

$$v_e^* = \int_{\Gamma_u} \left(\phi_s \frac{\partial \bar{\theta}_n}{\partial s} - \phi_n \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s^2} \right) ds - \left[\phi_s \bar{\theta}_n + \bar{w} \frac{\partial \phi_n}{\partial s} - \phi_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right]_{s_0}^{s_1}, \quad (1.8.14)$$