"十一五"高职高专公共基础课规划教材

高等数学

（电气类）

■ 方鸿珠　蔡承文　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十一五"高职高专公共基础课规划教材

高等数学（电气类）

主编　方鸿珠　蔡承文
参编　金跃强
主审　涂荣豹

机 械 工 业 出 版 社

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度和少而精”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养.

本书共9章，主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，不定积分与定积分，微积分的应用，空间解析几何与复数，级数，拉普拉斯变换，概率初步以及MATLAB上机试验等.

本书的教学时数为94学时左右，既可作为高职高专电子、计算机、电气自动化等电气类专业的公共基础课教材，也可作为其他类学校、其他专业的参考教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：电气类/方鸿珠，蔡承文主编.—北京：机械工业出版社，2005.8

“十一五”高职高专公共基础课规划教材

ISBN 7-111-17093-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①方…②蔡… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第087835号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：宋学敏 版式设计：霍永明 责任校对：王 欣

封面设计：王伟光 责任印制：杨 曦

北京机工印刷厂印刷

2005年9月第1版第1次印刷

1000mm×1400mm B5·8印张·309千字

定价：20.00元

前　　言

为了适应高等职业技术学校培养技术应用型人才的需要，为了不断提高教学质量，为了能更好地为专业知识所需服务，我们根据国家教委批准的高职高专《高等数学课程教学基本要求》编写了本书．

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，在充分调研的基础上，与专业教师共同商讨，构建了教材的内容，加强了教材的实用性、科学性、针对性，体现了高职高专的教学特色．

本书力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度和少而精”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养．

本书共有9章，基本内容有函数、极限与连续，导数与微分，不定积分与定积分，微积分的应用，MATLAB上机试验；并由专业所需，本书的内容还包括空间解析几何与复数，级数，拉普拉斯变换及概率初步等．本书的教学时数为94学时左右，适用于电子、计算机、电气自动化等电气类专业．本书编写时力求简明、通俗易懂、结合专业、重点突出，既便于教师教，又便于学生学．

本书第1、2、3、4章由蔡承文编写，第6、7、8章由方鸿珠编写，第5、9章由金跃强编写．本书由南京工业职业技术学院方鸿珠、蔡承文任主编，并统稿，由南京师范大学涂荣豹教授主审．

限于编者的水平，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数、极限与连续是高等数学研究的理论基础.本章在复习、加深和拓宽函数有关知识的基础上,介绍函数及其极限的概念,讨论函数的极限运算和连续性,为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　函数

1.1.1　函数的基本概念

1.函数的定义

定义 1　设 D 为一个非空实数集合,对于数集 D 中的任意一个数 x,如果存在确定的对应法则 f,按照 f 都有确定的实数 y 与之对应,则称 $\boldsymbol{y}$ 是定义在集合 $\boldsymbol{D}$ 上的 $\boldsymbol{x}$ 的**函数**,记作 $y=f(x)$.其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数的**定义域**,$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

如果对于每一个 $x\in D$,都仅有一个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为单值函数.如果对于给定 $x\in D$,有多个 $y\in M$ 与之对应,则称这种函数为多值函数.一个多值函数通常可看成是由一些单值函数组成的.本书中,若无特别的说明,则认为函数是单值的.

当 $x=x_0\in D$ 时,函数 $y=f(x)$,对应的函数值记为 $f(x_0)$,即 $f(x_0)=f(x)\big|_{x=x_0}$.

例 1-1　判断 $y^2=x,x>0$ 是否为单值函数 .

解　因为对每个 $x>0$ 都对应两个 y 值,所以 y 是 x 的二值函数.但可以把该函数考虑成两个单值函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $g(x)=-\sqrt{x}$.

例 1-2　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域,并求 $f(3)$,$f(t^2)$.

解　该函数的定义域应为满足不等式组 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$ 的 x 值的全体.解此不等式组,得 $2<x\leqslant 3$.故该函数的定义域为 $D=\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}=(2,3]$;且

$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0$$

$$f(t^2)=\sqrt{3+2t^2-t^4}+\ln(t^2-2)$$

2.函数的表示法

一般说来,函数的表达方式有三种:公式法(以数学式子表示函数的方法)、表格法(以表格形式表示函数的方法)和图示法(以图形表示函数的方法).

有时,会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情形.这样的函数称为分段函数.

例 1-3 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$,求其定义域、值域及 $f(2)$、$f(0)$ 和 $f(-2)$.

解 定义域 $D=(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$。

值域 $M=\{1,0,-1\}$。

因为 $-2\in(-\infty,0)$,$0\in\{0\}$,$2\in(0,+\infty)$,所以 $f(-2)=-1$,$f(0)=0$,$f(2)=1$.

这里的 $f(x)$ 又称为符号函数,记为 $\operatorname{sgn}x$,它的图形如图 1-1 所示.

例 1-4 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,求其定义域、值域.

解 定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$;值域 $M=[0,+\infty)$.

运用符号函数可以将绝对值函数记为 $f(x)=|x|=x\operatorname{sgn}x$,它的图形如图 1-2 所示.

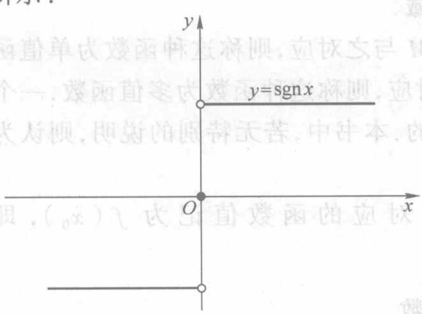


图 1-1

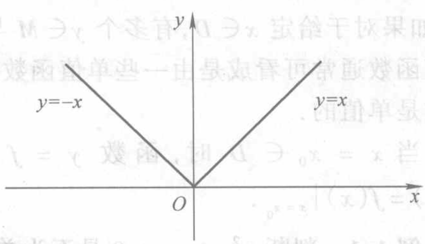


图 1-2

3.反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$),都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定惟一的 x 值($x\in D$)与之对应,那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,它的定义域为 M,值域为 D.

习惯上,函数的自变量都以 x 表示,所以反函数也可以表示为 $y=f^{-1}(x)$.函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-5 求函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ 的反函数,并求出它的定义域.

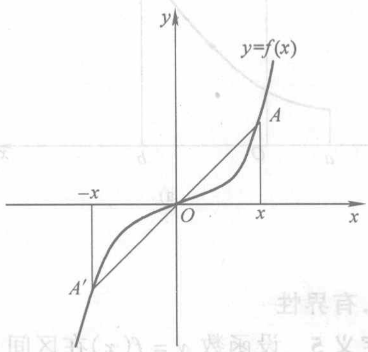
解 因为 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，所以 $e^{2x}-2ye^x+1=0$。用二次方程的求根公式解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$，解得 $x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$. 又由于 $y-\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$，因此 $x=\pm\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. 交换 x 与 y 的位置，即得所求反函数 $y=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，其定义域为 $[1,+\infty)$.

1.1.2 函数的基本特性

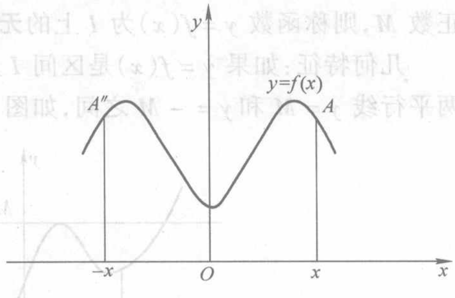
1. 奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为**非奇非偶函数**.

几何特征：奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-3 所示.



a)



b)

图 1-3

例 1-6 判断函数 $f(x)=\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\cos(-x)\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\
&=\cos x\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\
&=-\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=\cos x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

2. 单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$，x_1 和 x_2 为区间 (a,b) 内的任意两个数.

若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称该函数在区间 (a,b) 内**单调增加**，或称**递增**；

若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称该函数在区间 (a,b) 内**单调减少**，或称**递减**.

几何特征:单调增加函数的图形沿 x 轴正向上升,单调减少函数的图形沿 x 轴正向下降,如图 1-4 所示.

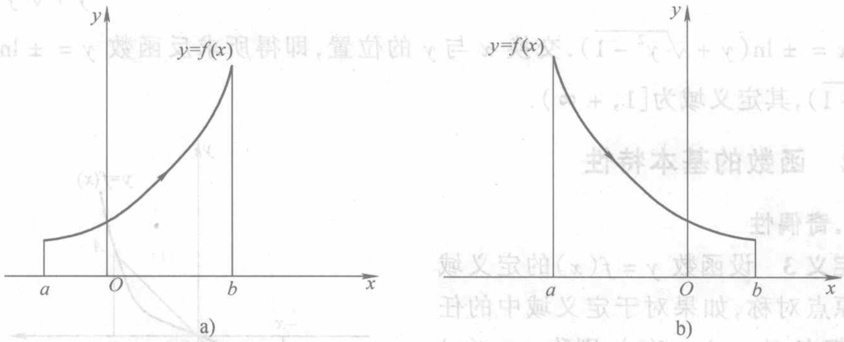


图 1-4

3.有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M,当 $x\in I$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$为 I 上的**有界函数**;如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$为 I 上的**无界函数**.

几何特征:如果 $y=f(x)$是区间 I 上的有界函数,那么它的图形在 I 上必介于两平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间,如图 1-5 所示.

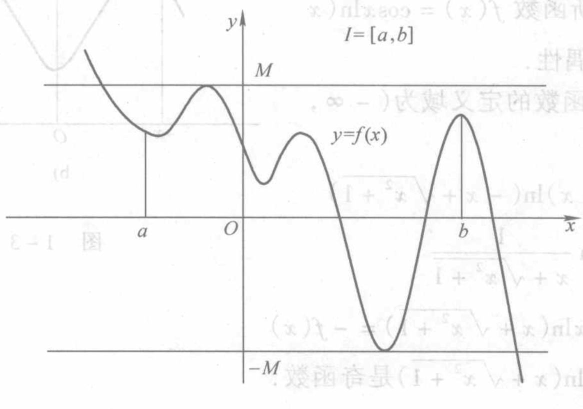


图 1-5

应当指出,有的函数可能在其定义域的某一部分有界,而在另一部分无界.因此,若说一个函数是有界的或是无界的,应同时指出其自变量的相应范围.例如,$y=\tan x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$上是有界的,但在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是无界的.

4.周期性

定义 6 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不为零的正数 L,使得对于定义域内的一切 x,等式 $f(x+L)=f(x)$都成立,则 $y=f(x)$叫做**周期函数**,L 叫做这个函数的**周期**.

对于每个周期函数来说,周期有无穷多个.如果其中存在一个最小正数 a,则 a 就为该周期函数的最小正周期,简称周期.常说的某个函数的周期通常指的就是它的最小正周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\tan x$ 的周期分别为 2π,π.

1.1.3 初等函数

1.基本初等函数

定义 7 把幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot}x$ 统称为基本初等函数(图形及有关特性参阅附录 A).

2.复合函数

定义 8 如果函数 $y=F(u)$,其定义域为 U_1,函数 $u=\varphi(x)$的值域为 U_2,其中 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$,则 y 通过变量 u 成为 x 的函数,这个函数称为由函数 $y=F(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的**复合函数**,记为 $y=F[\varphi(x)]$.其中变量 u 称为**中间变量**.

应当指出,并非任何两个函数都可构成复合函数.例如,函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $U_1=[-1,1]$,$u=2+x^2$ 的值域 $U_2=[2,+\infty)$,显然 $U_1\cap U_2=\varnothing$,所以不能复合.

对于复合函数,须弄清两个问题,那就是“复合”与“分解”.所谓“复合”,就是把几个作为中间变量的函数复合成一个函数,该过程也就是把中间变量依次代入的过程;所谓“分解”,就是把一个复合函数分解为几个简单函数,而这些简单函数往往都是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1-7 试将函数 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-x^2$ 复合成一个函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$,即得所求的复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,其定义域为$[-1,1]$.

例 1-8 已知 $y=\ln u$,$v=\sin v$,$v=x^2+1$,试把 y 表示为 x 的函数.

解 将中间变量依次代入,$y=\ln u=\ln\sin v=\ln\sin(x^2+1)$,所得函数即为所求.

例 1-9 指出函数 $y=\cos^2 x$ 是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\cos x$,则 $y=u^2$,所以 $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的.

例 1-10 指出函数 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$是由哪些函数复合而成的.

解 令 $u=\ln(\sin x+2^x)$，则 $y=\sqrt{u}$，再令 $v=\sin x+2^x$，则 $u=\ln v$.所以 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$ 和$v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3.初等函数

定义 9 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成的，并且可以用一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2-|x|}$； (2) $y=\ln\ln x$； (3) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2\end{cases}$

(4) $y=f(\ln x)$，其中 $f(u)$的定义域为(0,1).

2. 确定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sqrt{x}$； (2) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0,a\neq 1)$.

3. 求函数 $y=e^x+1$ 的反函数.

4. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(x^2-1)$.

5. 设 $f(\sin x)=2-\cos 2x$，求 $f(\cos x)$.

6. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos x^2$； (2) $y=\sin^5 x$； (3) $y=\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(4) $y=e^{\cos 3x}$； (5) $y=5^{\ln(x^2+3)}$； (6) $y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

1.2 函数极限的概念

实例 圆的面积

我国魏晋时期的数学家刘徽，曾试图从圆内接正多边形出发来计算半径等于单位长度的圆的面积。他从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，直觉地意识到边数越多，内接正多边形的面积越接近于圆的面积。他曾正确地计算出圆内接正 3072 边形的面积，从而得到圆周率 π 的十分精确的结果 $\pi\approx 3.1416$。他的算法用现代数学来表达，就是

$$A\approx 6\times 2^{n-1}\times\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{6\times 2^{n-1}}$$

式中，A 为半径等于 R 的圆面积，$6\times 2^{n-1}$ 为按刘徽计算方法中正多边形的边数。

然而，刘徽在其所著的“九章算术注”中曾说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这个结论却是不正确的。首先，按他的作法确实可以作出无穷多个正多边形，因此应该是永远地“可割”而非“不可割”；其次，无论边数如何增加，毕竟还是多边形，绝不会“与圆周合体而无所失

矣”。究其原因，是在他那个时代还未找到克服“有限”与“无限”这对矛盾的工具。因此他只能设想最后总有一个边数很多的正多边形与圆“合体”，而把无限变化过程作为有限过程处理了。

从上面的例子可以看出，圆的面积是客观存在的，但用初等数学知识是难以圆满地完成计算工作的。因此，不得不用一套完整的理论和方法来确定它们的真值。下面来逐步建立这套理论和方法。

函数极限概念是与求一些量的精确值有关的，它研究的是在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势.下面就函数在两种不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论：

1）当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记为 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限.

2）当自变量 x 无限接近于有限值 x_0，即趋向于 x_0（记为 $x\to x_0$）时，函数 $f(x)$ 的极限.

1.2.1 邻域

满足不等式 $|x-x_0|<\delta$（其中 δ 为大于 0 的常数）的一切 x，称为点 x_0 的 **δ-邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，称为点 x_0 的 δ-空心邻域，记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$，即

$$U(\hat{x}_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

1.2.2 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

1）x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$.

2）x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x\to-\infty$.

若只要 $|x|$ 无限增大，则写成 $x\to\infty$.

定义 1 如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为**当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad（或\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A）$$

即

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在充分大的 $N>0$，使得当 $x>N$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在充分大的 $N>0$，使得当 $x<-N$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 2 如果当$|x|$无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称数 A 为**当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

即

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$,总存在充分大的 $N>0$,使得当$|x|>N$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的**充要条件**是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在且相等,即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

例 1-11 讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 如附录 A 所示,显然有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$,因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

例 1-12 讨论函数 $y=\arctan x$ 和 $y=\operatorname{arccot} x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 如附录 A 所示,有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$,于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在;

如附录 A 所示,有 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x = 0$,于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$ 不存在.

1.2.3 $n\to\infty$ 时数列$\{u_n\}$的极限

由函数的定义和数列的定义可知,数列$\{u_n\}$可以视为自变量 n 取全体自然数时的函数

$$f(n) = u_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

上述"圆的面积"实例中的$\left\{6\times 2^{n-1}\times\dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{6\times 2^{n-1}}\right\}$就是一个数列。

既然数列是一个函数,它也会遇到极限问题。对此,给出如下定义:

定义 3 如果当 n 无限增大时,数列$\{u_n\}$无限地趋近于一个确定的常数 A,那么就称 A 为**数列$\{u_n\}$的极限**,或称**数列$\{u_n\}$收敛于 A**,记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n\to A\ (n\to\infty) \text{ 或当 } n\to\infty \text{ 时}, u_n\to A$$

即

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$,总存在充分大的自然数 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,恒有$|u_n-A|<\varepsilon$. 极限存在的数列称为**收敛数列**,极限不存在的数列称为**发散数列**.

例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ 不存在,也就是说,数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$收敛于 0,数列$\{n^2\}$发散.

1.2.4 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

与 $x \to \infty$ 的情形类似，记号 $x \to x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0，包含 x 从大于 x_0 的方向和 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 两种情况：

1）$x \to x_0^+$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0.

2）$x \to x_0^-$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

定义 4 如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的右极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的左极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

定义 5 如果当 $x \to x_0 (x \neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x \to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

即

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon > 0$，总存在充分小的 $\delta > 0$，使得当 $x \in U(\hat{x}_0, \delta)$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的**充要条件**是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

由定义易得 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$；$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 1-13 考察极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

解 作出函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的图形，如图 1-6 所示.

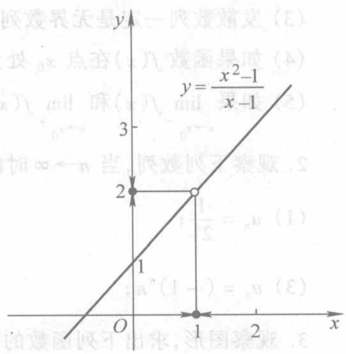


图 1-6

函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，在 $x = 1$ 处函数没有定义. 但从图 1-6 可以看出，自变量 x 不论从大于 1 还是从小于 1 两个方向趋近于 1 时，函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的值是从两个不同方向趋近于 2 的，所以 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

此例表明，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$是否存在与 $f(x)$在点 x_0 处是否有定义无关.

例 1-14 已知 $f(x)=\begin{cases}1, x \leqslant 1 \\ x, x>1\end{cases}$，求$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1^-} 1=1$，$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1^+} x=1$，即 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=1$，所以$\lim\limits_{x \to 1} f(x)=1$.

此例表明，求分段函数在段点处的极限通常要分别考察其左右极限.

例 1-15 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，当 $x \to 0$ 时的极限.

解 当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$；当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$. 所以函数可以分段表示为 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0 \\ -1, & x<0\end{cases}$，于是 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}(-1)=-1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} 1=1$，即 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在.

特别指出，本书中凡不标明自变量变化过程的极限号 lim，均表示变化过程适用于 $x \to x_0$，$x \to \infty$ 等所有情形.

习题 1-2

1. 判断下列说法是否正确?

(1) 有界数列一定收敛;

(2) 单调数列一定收敛;

(3) 发散数列一定是无界数列;

(4) 如果函数 $f(x)$在点 x_0 处无定义，那么 $f(x)$在点 x_0 处极限一定不存在;

(5) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在，那么$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$一定存在.

2. 观察下列数列，当 $n \to \infty$ 时的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $u_n=\dfrac{1}{2^n}$;　　(2) $u_n=(-1)^n \dfrac{1}{n}$;

(3) $u_n=(-1)^n n$;　　(4) $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$.

3. 观察图形，求出下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x$;　　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \ln x$;

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$.

4. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x<1 \\ 0, x=1 \\ 1, x>1\end{cases}$，当 $x \to 1$ 时的极限不存在.