

图像处理中的变分和 偏微分方程方法

○ 冯象初 王卫卫 编著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要讲述图像处理的 4 类确定性处理模型, 主要包括变分模型、偏微分方程模型、滤波器迭代模型和公理化模型. 本书讨论了这些模型的建立、性质、数值实现方法以及这些模型在图像去噪、图像恢复、图像分解、图像修补等问题中的应用, 精选了国内外有关科技文献的内容, 也反映了作者自己的科研成果.

本书由浅入深, 首先给出线性模型, 然后逐步发展到非线性情形, 既重视理论基础, 也给出了相应的实践和应用.

本书可供应用数学、图像处理、计算机视觉等领域的高年级本科生和研究生使用, 也可作为相关领域的教师、工程师和技术人员等的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

图像处理的变分和偏微分方程方法/冯象初, 王卫卫编著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023672-2

I. 图… II. ① 冯… ② 王… III. 变分(数学)—偏微分方程—应用—数字图像处理 IV. TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 054143 号

责任编辑: 王丽平 房 阳 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009 年 4 月第一次印刷 印张: 12

印数: 1—2500 字数: 230 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

前 言

图像处理的数学方法大概可以分为三类: 基于概率统计的方法、基于小波的方法和基于变分偏微分方程的方法. 基于概率统计的方法主要指以贝叶斯估计、最大似然法等为基础建立起来的方法; 基于小波的方法包括小波阈值等经典的小波方法和在此基础上发展起来的多尺度几何分析方法, 如脊波、曲线波等. 这两类方法已经有了较多的参考书和专著. 基于变分偏微分方程的方法则是在 2000 年前后才逐渐被大家认知的新的图像处理的数学方法.

2000 年, 作者在晨兴数学中心的时候接触到这一问题, 觉得这种确定性的方法很有意义, 值得进一步学习. 近年来, 国外陆续有一些相关书籍出版, 也有相当多的研究论文. 经过这些年的讨论和研究, 作者对此类方法有了一些了解和把握, 也得到了一些新的进展和成果. 本书的目的就是把图像处理的变分偏微分方程方法和成果介绍给大家.

本书以介绍图像处理的变分偏微分方程的 4 种方法为主线, 这 4 种方法是热方程光滑化、变分正则化问题、滤波器迭代和尺度空间. 为使读者对问题有一个系统的把握, 第 1 章证明了这 4 种方法的线性形式与 Gauss 滤波等价. 后续的章节沿着这一主线, 将上述 4 种方法的线性形式分别推广到非线性情形. 第 2, 3 章介绍非线性变分形式, 第 4 章介绍非线性微分方程, 第 5 章介绍非线性滤波器迭代, 第 6 章介绍非线性尺度空间. 本书所述方法的具体应用集中在图像去噪、去模糊、分解和修补, 这些应用作为例子出现在各个章节中. 我们认为这样处理比较系统、直观.

本书的另一个特点是尽可能地用图示将数学结构和结论表示的简单和易于理解, 用算例将算法的具体效果呈现给大家. 对书中一些较深的数学概念也都给出说明和解释. 当然对具体的方法使用而言, 若承认理论结果, 跳过证明, 只掌握计算方法, 也是可以的.

在讨论图像处理的变分偏微分方程基本方法的同时, 本书还介绍了一些学者以及作者所在课题组的研究成果, 包括课题组在国内外发表的学术论文和作者的部分博士生在博士论文中的工作. 这些博士生包括: 白键、李敏、江玲玲、姜东焕、孙小丽等. 这些基本方法和研究成果糅合在各个章节中, 目的是使读者在掌握了基本概念之后, 能够直接接触到研究前沿, 了解最新的研究成果和动态. 在此对他们的贡献表示感谢, 并将原论文出处放在参考文献部分, 供大家进一步研究使用.

我们的研究工作得到了国家自然科学基金 (60872138) 的资助, 西安电子科技大学理学院对研究小组的研究工作也给予了大力支持, 同时本书的出版还得到了西

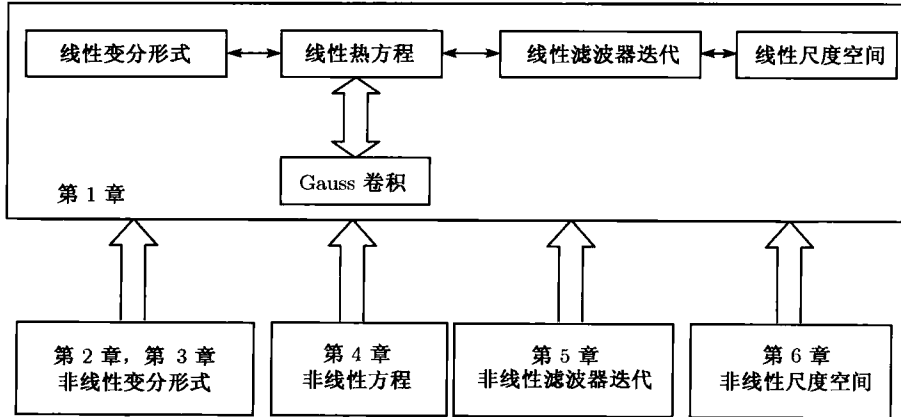
安电子科技大学研究生院出版基金的资助, 作者在此表示感谢.

由于作者的水平有限, 尽管尽了最大的努力, 书中仍不可避免地会有疏漏和不足之处, 希望读者批评指正.

作 者

2009 年于西安电子科技大学

本书结构



目 录

前言

本书结构

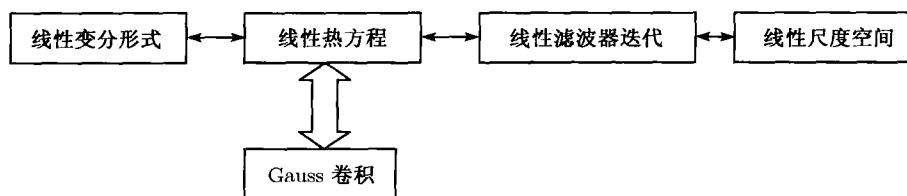
第 1 章 线性光滑化与其等价形式	1
1.1 光滑化与 Gauss 滤波	1
1.2 Gauss 卷积与热方程	3
1.3 线性滤波器的迭代与极限	6
1.4 热方程的变分形式	10
1.4.1 变分直接法	10
1.4.2 算子的微分	13
1.4.3 积分泛函的极小值问题和 Euler 方程	14
1.5 线性尺度空间	16
第 2 章 图像恢复的变分方法	22
2.1 图像恢复的 TV 模型	23
2.2 TV 模型的推广以及与边缘提取的耦合	27
2.3 Meyer 的卡通-纹理分解模型及其近似	31
2.4 Meyer 的卡通-纹理分解模型 (的推广) 与边缘提取的耦合	34
2.4.1 AAFC 模型及其求解	35
2.4.2 基于一般 TV 正则项的图像分解-边缘提取耦合模型	36
2.4.3 模型 (2.37) 的仿真结果	38
2.5 阶梯效应的消除	43
第 3 章 变换域变分模型	49
3.1 基于 Besov 空间的图像卡通-纹理分解	49
3.1.1 Besov 空间及其小波刻画	49
3.1.2 基于 Besov 空间与负 Hilbert-Sobolev 空间的图像卡通-纹理分解 1	51
3.1.3 基于 Besov 空间与负 Hilbert-Sobolev 空间的图像卡通-纹理分解 2	60
3.1.4 基于 Besov 空间与齐次 Besov 空间的图像卡通-纹理分解	69
3.2 基于 Besov 空间的图像盲复原	81
3.3 基于曲线波的图像恢复和卡通-纹理分解	87
3.3.1 第二代曲线波和分解空间	87
3.3.2 曲线波域上的变分问题	91

3.3.3 实验仿真	93
3.4 基于稀疏表示的图像卡通-纹理分解	97
3.4.1 基于稀疏表示的图像分解模型和 MCA 算法	97
3.4.2 结合稀疏表示和投影正则化的图像分解方法	98
3.4.3 结合稀疏表示和曲线波阈值的图像分解方法	103
3.5 结合稀疏表示和迭代曲线波阈值的图像修补方法	105
3.5.1 偏微分方程与变分图像修补方法	105
3.5.2 新模型的求解	109
第 4 章 基于偏微分方程的图像处理	114
4.1 用于图像恢复的几种经典偏微分方程模型	114
4.1.1 热方程	115
4.1.2 Perona-Malik 模型	115
4.1.3 Weickert 的各向异性非线性扩散	119
4.1.4 基于曲面的 PDE	123
4.2 分数阶各向异性扩散	125
4.2.1 频域分数阶导数和分数阶 Sobolev 空间	126
4.2.2 基于分数阶导数的正则模型	127
4.2.3 数值算法及其理论分析	128
4.2.4 仿真结果与分析	135
4.3 基于非线性结构张量的各向异性扩散	139
第 5 章 迭代滤波器与偏微分方程	145
5.1 腐蚀、膨胀与梯度模发展方程	145
5.2 中值滤波与曲率驱动方程	150
5.3 仿射不变形态学算子的偏微分方程刻画	154
5.4 平移不变小波阈值迭代与 TV 流	156
第 6 章 尺度空间理论	162
6.1 欧氏不变尺度空间与 MCM 方程	162
6.2 仿射不变尺度空间与 AMSS 方程	165
6.3 MCM 和 AMSS 的差分格式	168
6.4 小波阈值的尺度空间性质	171
参考文献	174

第 1 章 线性光滑化与其等价形式

本章首先简要讨论光滑化与 Gauss 滤波, 说明 Gauss 滤波在线性图像处理中的重要性. 接着分别讨论线性热方程、线性变分形式、线性滤波器迭代、线性尺度空间, 并给出它们与 Gauss 滤波的等价关系.

本章内容的关系和结构如下:



1.1 光滑化与 Gauss 滤波

图像是多尺度的. 图像处理的三个基本任务是图像压缩、图像恢复和图像分析. 图像压缩是用尽可能少的存储来表示数字图像. 图像恢复是对有噪声和模糊的或其他受到干扰的图像进行处理以得到一个清楚的图像表示. 图像分析是对图像进行分割, 突出图像中的主要部分、重点对象等内容, 使进一步的识别、运动估计等处理得以进行. 在这三个任务中, 图像均表现出多尺度的性质. 下面以图像分析为例来进一步加以说明.

图像的边缘检测是图像分析的一个重要内容. 边缘检测即寻找图像的不连续点. 然而就离散数字图像而言, 由于离散的影响, 几乎每一个点都可以被认为是边界, 所以在寻找边界点之前, 光滑化是必不可少的. 不能简单地说图像在某个给定点处的特征, 而应该更具体地说图像在给定位置给定尺度上的性质. 因此, 在某个尺度上的边界点在另一个尺度上就可能不再是边界点了. 在最细的尺度上几乎每点都可以被视为边界点, 而随着尺度的增加, 分辨率的降低, 在大尺度上, 边界点的个数减少. 因此, 对图像的分析应该在一个适当的尺度上进行.

对图像的多尺度处理即是对图像进行光滑化. 通常, 对图像光滑化的几个基本要求如下:

(1) 局部性. 这是因为图像中包含有互相遮挡的对象, 因此在光滑处理的时候必须避免不同对象的混合, 这就意味着光滑化应该尽可能的局部化.

(2) 不变性. 因为要处理的图像可能是从不同的位置 (平移、旋转或更一般的投影变换) 在不同光照 (对比度) 下得到的, 因此光滑化必须考虑到这些不变性.

(3) 线性性. 为了简单起见, 还往往假定光滑化是线性的, 即如果 I_1, I_2 是两个图像, 则光滑化算子 K 满足 $K(c_1 I_1 + c_2 I_2) = c_1 K I_1 + c_2 K I_2$.

满足线性性以及平移不变性的算子一定是卷积算子, 即 $Ku = K * u$, 这里 K 是卷积核. 考虑一维情形, 这时线性性表现为对任何输入信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 有 $K(c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)) = c_1 (Kx_1)(n) + c_2 (Kx_2)(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$. 平移不变性表示为 $y(n-k) = (Kx)(n-k)$. 定义离散 δ 函数为 $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$ 称为克罗内克 (Kronecker) 函数. 对任何信号 $x(n)$, 有

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) = x(n).$$

这表明对卷积而言, $\delta(n)$ 像是一个单位元, 任何信号和它卷积, 其结果为原信号. 定义 $h(n) = (K\delta)(n)$, 称为卷积核的单位冲激响应, 则由 $y(n) = (Kx)(n)$ 可得

$$\begin{aligned} y(n) &= (Kx)(n) = (Kx)(n) * \delta(n) \\ &= K(x(n) * \delta(n)) = K \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) \\ &= \sum x(k) K\delta(n-k) = \sum x(k) h(n-k) = x(n) * h(n). \end{aligned}$$

这表明 K 运算实际上是对输入信号 $x(n)$ 用单位冲激响应 $h(n)$ 进行卷积. 上述过程对二维情形一样成立.

对 Gauss 函数 $G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$ 而言, 由于其 Fourier 变换 $\hat{G}_\sigma(\omega) =$

$F[G_\sigma](\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2/\sigma^2}\right)$ 仍为 Gauss 函数, 它在时域和频域都具有良好的局部

化性质. 因此, 用 Gauss 函数卷积成为图像处理中最常用的光滑化方法. 图 1.1 给出了原图像在 Gauss 函数卷积下的结果. 图 1.2 则是利用 Canny 边缘检测算子从图 1.1 中不同尺度下光滑图像中检测出的边缘情况.

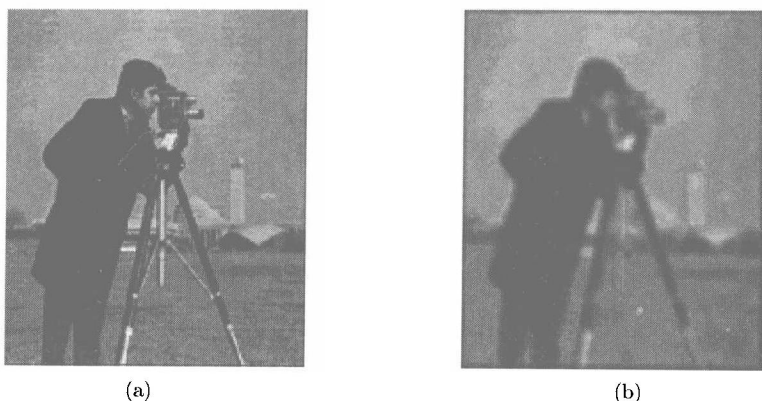


图 1.1 原图像在 Gauss 函数卷积下的结果 (对应不同尺度参数)



图 1.2 利用 Canny 边缘检测算子对上图检测出的不同尺度下的边缘

1.2 Gauss 卷积与热方程

下面给出 Gauss 卷积与热方程的关系, 从而将偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 引入到图像处理中. 设 Gauss 函数 $G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$, 原图像为 $u_0(x)$, 则利用 Gauss 卷积得到光滑后的图像为

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^2} G_{\sqrt{2t}}(x - y) u_0(y) dy = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x). \quad (1.1)$$

下面证明 $u(t, x)$ 满足如下的抛物型线性热扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

引入 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) e^{-i\omega x} dx$. 对 (1.2) 式进行 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \omega) - |\omega|^2 \hat{u}(t, \omega) = 0, \\ \hat{u}(0, \omega) = \hat{u}_0(\omega), \end{cases}$$

则 $\hat{u}(t, \omega) = c \cdot \exp(|\omega|^2 t)$, 令 $t = 0$ 得 $c = \hat{u}_0(\omega)$, 从而 $\hat{u}(t, \omega) = \hat{u}_0(\omega) \exp(|\omega|^2 t)$. Fourier 逆变换得 $u(t, x) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x)$, 这里只是形式上求解. 更严格地, 将 $u_0(x)$ 从 $[0, 1]^2$ 上, 通过对称延拓将其延拓至 $C = [-1, 1]^2$ 上, 再周期化成为 $\mathbf{R}^2$ 上的周期函数. 若 $u_0(x)$ 以这种方式延拓且 $\int_C |u_0(x)| dx < \infty$, 则称 $u_0 \in L^1_{\#}(C)$. 有下面的定理 1.1 保证热方程解的存在唯一性, 这里略去证明.

定理 1.1 设 $u_0 \in L^1_{\#}(C)$, $u(t, x)$ 由 (1.1) 式定义, 则对 $t > 0$ 和 $x \in \mathbf{R}^2$, $u(t, x)$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_C |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0$, $u(t, \cdot) \in L^1_{\#}(C)$, 且对所有 $T > 0$, $u(t, x) \in C^\infty((0, T) \times \mathbf{R}^2)$. 进一步, 对任一正实数 t_1 , 存在常数 $c(t_1)$, 使得对 $\forall t \in [t_1, +\infty)$ 有

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} |u(t, x)| \leq c(t_1) |u_0|_{L^1_{\#}(C)}, \quad (1.3)$$

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^2} u_0(x) \leq u(t, x) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^2} u_0(x). \quad (1.4)$$

由 (1.1) 式定义的 $u(t, x)$ 是热扩散方程 (1.2) 的满足条件 (1.3), (1.4) 的唯一解.

在 1.1 节中知道 Gauss 函数卷积是图像处理中最常用的线性光滑化方法. 由于 (1.1) 式和 (1.2) 式等价, 则当然可以利用 (1.2) 式的各种求解方法来算出 $u(t, x)$, 从而得到 Gauss 卷积的另一种算法. 最常用的解法是利用差分方法将原方程 (1.2) 离散, 然后通过迭代求原方程的数值解.

假定考虑的图像区域为 $\Omega = [0, 1]^2$, 其边界为 Γ , 则在这个区域上的热方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

这里 n 为 Γ 的外法线方向. 对 Ω 用间距为 h 的平行于坐标轴的直线进行剖分, 设时间轴 t 的间隔为 Δt , 记 $u_{i,j}^n = u(n\Delta t, ih, jh)$, 则 (1.5) 式的最简单的显式差分格

式为 (这里简单地取 $h = 1$)

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n), & n=0, 1, \dots, \\ u_{i,j}^0 = u_0(ih, jh). \end{cases} \quad (1.6)$$

图 1.3 给出了利用 (1.6) 式计算的结果, 其中, Δt 为 0.05, 分别迭代 30 次, 60 次, 90 次.

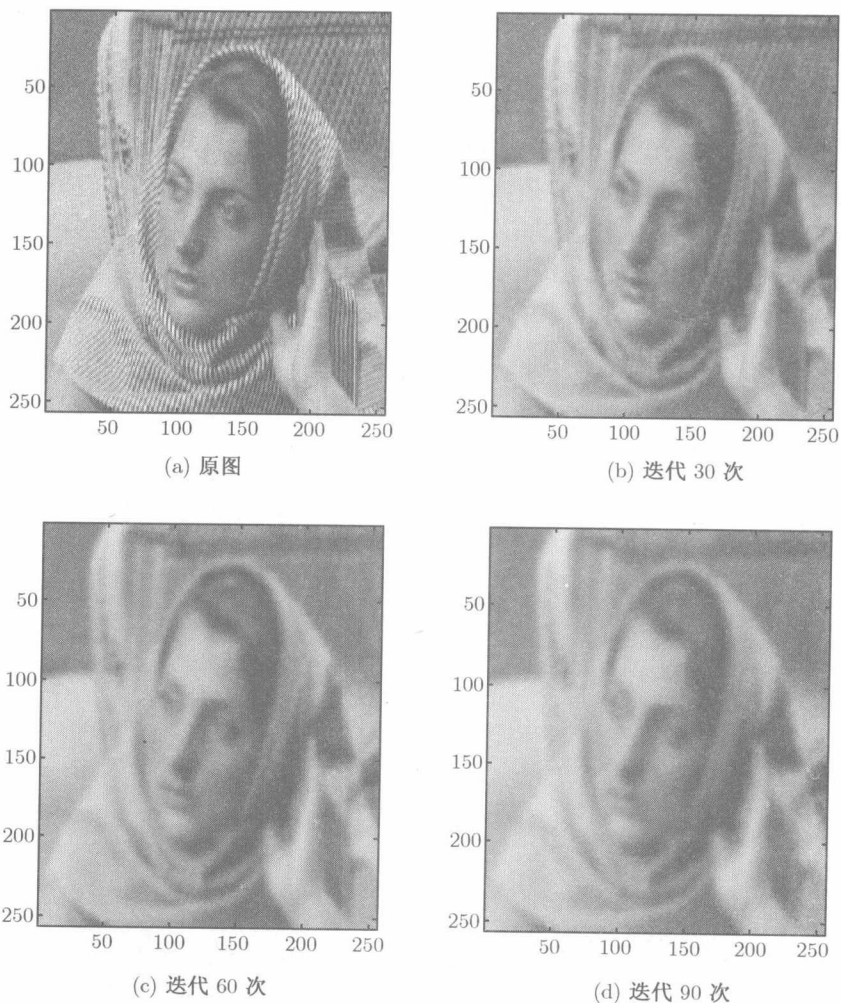


图 1.3 利用 (1.6) 式计算的结果, 其中, Δt 为 0.05

更重要的是, 我们将对 (1.2) 式进行深入的分析, 给出其各种等价形式, 并进一步将其推广到非线性情形. 这些非线性推广当然也可以看成是 Gauss 卷积滤波器

的推广, 因此这些非线性推广形式也可称为非线性滤波器, 尽管形式上和我们熟悉的滤波器完全不同了.

第 4 章将把热方程推广到各向异性非线性扩散方程, 进而建立起图像处理的新模型方程.

1.3 线性滤波器的迭代与极限

本节以二维情形为例讨论更一般的线性平滑算子与热方程的关系. 首先考虑局部邻域的平均值光滑化, $Tu_0(x) = M_h u_0(x) = \frac{1}{\pi h^2} \int_{D(x,h)} u_0(y) dy$, 这里 $D(x,h)$ 是以 x 为心, 以 h 为半径的圆. 局部性意味着 $Tu_0(x)$ 只和以 x 为心, 以 h 为半径的圆形邻域有关, 因此 h 是算子 T 局部性的度量指标. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 算子 T 的局部性最好. 显然, 若假定 u_0 在 x 点是连续的, 则 $M_h u_0(x) \rightarrow u_0(x)$, 即 $\lim_{h \rightarrow 0} M_h u_0(x) = u_0(x)$. 图 1.4 给出了用圆盘平均值光滑化的结果.



(a) 原始图像



(b) 模糊图像, $h = 10$



(c) 模糊图像, $h = 5$



(d) 模糊图像, $h = 1$

图 1.4 圆盘平均值光滑化的结果

1960 年, Gabor 给出了一个非常重要的命题: 原始图像与模糊图像的差和原始图像的 Laplace 变换成正比. 受此启发, 我们来研究 $M_h u_0(x) - u_0(x)$. 假定 $u_0(x)$ 在 x 点是二阶连续可微的, 不失一般性, 考虑点 $x = 0$. 在 $D(0, h)$ 中对 $u_0(y)$ 进行 Taylor 展开有

$$u_0(y) = u_0(0) + Du_0(0) \cdot y + \frac{1}{2} \left[(u_0)_{y_1 y_1} y_1^2 + (u_0)_{y_2 y_2} y_2^2 + 2(u_0)_{y_1 y_2} y_1 y_2 \right] + o(h^2),$$

在 $D(0, h)$ 上取平均值, 则有

$$M_h u_0(0) = u_0(0) + \frac{1}{2\pi h^2} \left[(u_0)_{y_1 y_1}(0) \int_{D(0, h)} y_1^2 dy_1 dy_2 + (u_0)_{y_2 y_2}(0) \int_{D(0, h)} y_2^2 dy_1 dy_2 \right] + o(h^2).$$

因为

$$\frac{1}{2\pi h^2} \int_{D(0, h)} y_1^2 dy_1 dy_2 = \frac{1}{4\pi h^2} \int_{D(0, h)} (y_1^2 + y_2^2) dy_1 dy_2 = \frac{1}{4\pi h^2} \int_0^h 2\pi r^3 dr = \frac{h^2}{8},$$

所以有

$$\frac{M_h u_0(0) - u_0(0)}{h^2} = \frac{1}{8} (\Delta u_0)(0) + \varepsilon(h).$$

对于一般的点 x 同样有

$$\frac{M_h u_0(x) - u_0(x)}{h^2} = \frac{1}{8} (\Delta u_0)(x) + \varepsilon(h), \quad (1.7)$$

这里 $\varepsilon(h)$ 是比 h 高阶的无穷小量.

对任意给定的时刻 t , 考虑实数列 h 和 n , 使得 $nh^2 \rightarrow t$. 如果令 $u^n = M_h^n u_0 = \underbrace{M_h \cdot M_h \cdots M_h}_{n \text{ 个}} u_0$, 则当 $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh^2 \rightarrow t$ 时, 有 $u^n(x) \rightarrow u(t, x)$, 而

$u(t, x)$ 满足热方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{8} \Delta u(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.8)$$

这里不给出 (1.8) 式的证明, 它是定理 1.2 的特殊情形. (1.8) 式说明, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 重复使用圆盘平均值光滑化 n 次, 如果保持 $nh^2 \rightarrow t$, 则得到的结果是热方程的解.

下面讨论一般的 N 维空间中线性各向同性光滑算子 T_h , 将证明 $((T_h^n) u_0)(x) \rightarrow u(t, x)$, 当 $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh \rightarrow t$ 时, $u(t, x)$ 仍是热方程的解.

假设光滑核 $g(x)$ 满足下列矩条件:

$$(1) \int_{\mathbf{R}^N} g(x) dx = 1, \quad (1.9)$$

$$(2) \text{ 对任给的 } i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \quad \int_{\mathbf{R}^N} x_i g(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} x_i x_j g(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

$$(3) \int_{\mathbf{R}^N} x_i^2 g(x) dx = 2. \quad (1.11)$$

定义 1.1 设光滑核 $g(x) \in L^1(\mathbf{R}^N)$, 如果 $g(x)$ 的值只依赖于 x 的模 $|x|$, 即 $g(x) = g(|x|)$, 则称 $g(x)$ 是径向的 (radial). 物理意义是各向同性.

若 $g(x)$ 是径向函数, 则适当地选择 a, b , 可以使 $ag\left(\frac{x}{b}\right)$ 满足 (1.9) 式 $\sim$ (1.11) 式, 因此假定径向函数 $g(x)$ 满足矩条件. 令 $g_h(x) = \frac{1}{h^{N/2}} g\left(\frac{x}{h^{1/2}}\right)$, 与平均算子类似, 来讨论 $(g_h * u)(x) - u(x)$ 当 $h \rightarrow 0$ 时的极限情况.

定理 1.2 假定 $g(x)$ 满足矩条件, 进一步假定

$$\int_{\mathbf{R}^N} |g(z)| |z|^3 dz = c < +\infty, \quad (1.12)$$

则对任给的 C^3 函数 $u, u \in L_C^\infty$, 有

$$(g_h * u)(x) - u(x) = h\Delta u(x) + O(h^{3/2}). \quad (1.13)$$

证明 利用 (1.9) 式和 Taylor 展开式, 有

$$\begin{aligned} (g_h * u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbf{R}^N} h^{-N/2} g\left(\frac{y}{h^{1/2}}\right) [u(x-y) - u(x)] dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} g(z) [u(x - h^{1/2}z) - u(x)] dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} g(z) \left[-h^{1/2} Du(x) \cdot z + \frac{h}{2} D^2 u(x)(z, z) \right] dz \\ &\quad - \frac{1}{6} h^{3/2} \int_{\mathbf{R}^N} g(z) D^3 u(x - h^{1/2}\theta z)(z, z, z) dz, \end{aligned}$$

这里 $\theta \in [0, 1]$. 利用矩条件 (1.10) 和 (1.11) 以及 (1.12) 式, 有

$$\left| (g_h * u)(x) - u(x) - h \cdot \frac{\sigma}{2} \Delta u(x) \right| \leq ch^{3/2}.$$

如果设 $T_h u_0 = g_h * u_0$, 则线性算子 T_h 的迭代 $(T_h^n u_0)(x)$ 当 $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh \rightarrow t$ 时仍收敛到 $u(t, x)$, 这里 $u(t, x)$ 是热方程的解. 这就是定理 1.3 的结论.

定理 1.3 假定 $g(x)$ 满足同定理 1.2 的条件, 令 $g_h(x) = \frac{1}{h^{N/2}} g\left(\frac{x}{h^{1/2}}\right)$, $T_h u = g_h * u$, 则

$$\text{在 } L^1(C) \text{ 中 } (T_h^n u_0)(x) \rightarrow u(t, x), \quad \text{当 } nh \rightarrow t \text{ 时}, \quad (1.14)$$

这里 $u(t, x) = G_t * u_0 \in L^\infty$ 是热方程的解, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ 且 } \int_C |u(t, x) - u_0(x)| dx \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

证明 设 $u(t, x)$ 是热方程的解, 所以有 $u(t+h, x) - u(t, x) = h\Delta u(t, x) + o(h^2)$. 又由 (1.13) 式知 $T_h u(t, x) - u(t, x) = g_h * u(t, x) - u(t, x) = h\Delta u(t, x) + O(h^{3/2})$. 上面两式相减得

$$T_h u(t, x) - u(t+h, x) = O(h^{3/2}). \quad (1.15)$$

注意到, 如果 $u \leq c$, 则 $T_h u \leq c$. 因此有 $T_h(O(h^{3/2})) = O(h^{3/2})$. 对 (1.15) 式两边用 T_h 作用,

$$T_h^2 u(t, x) - T_h u(t+h, x) = O(h^{3/2}), \quad (1.16)$$

在 (1.15) 式中用 $t+h$ 代替 t 得

$$T_h u(t+h, x) - u(t+2h, x) = O(h^{3/2}), \quad (1.17)$$

(1.16) 式和 (1.17) 式相加, 有

$$T_h^2 u(t, x) - u(t+2h, x) = 2O(h^{3/2}). \quad (1.18)$$

迭代上述过程得

$$T_h^n u(t, x) - u(t+nh, x) = nO(h^{3/2}), \quad (1.19)$$

这里假定 $t_1 \leq t+nh \leq t_2$. 令 $n \rightarrow \infty$, $h = \tau/n$, 则有

$$T_h^n u(t, x) - u(t+\tau, x) = O\left(\left(\frac{\tau}{n}\right)^{1/2}\right), \quad (1.20)$$

这里 $t_1 \leq t+\tau \leq t_2$. 如果在 (1.20) 式中能令 $t=0$, 由于 $u(0, x) = u_0(x)$, 则 $T_h^n u_0(x) \rightarrow u(\tau, x)$, $\tau = nh$, 定理结论成立. 但由于 (1.20) 式中假定了 $u(t, x)$ 是热方程的解, 故不能直接令 $t=0$. 然而可以取 t_1 足够小, 对任给的 $\varepsilon > 0$ 和 t_1 足够小, 有

$$\|u(t_1, \cdot) - u_0\|_{L^1(C)} = \int_C |u(t_1, x) - u_0(x)| dx < \varepsilon. \quad (1.21)$$

由此可得

$$\|T_h^n u(t_1, \cdot) - T_h^n u_0\|_{L^1(C)} \leq \varepsilon \quad (1.22)$$

(利用 $\|g_h * u\|_{L^1(C)} \leq \|g_h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^1(C)}$, $\forall u \in L^1(C)$ 和 $\int g_h = 1$). 在 (1.20) 式中令 $t = t_1$ 并在 C 上积分, 得到当 n 足够大时,

$$\|T_h^n u(t_1, \cdot) - u(t_1 + \tau, \cdot)\|_{L^1(C)} = O\left(\left(\frac{\tau}{n}\right)^{1/2}\right) < \varepsilon. \quad (1.23)$$

由 (1.22) 式和 (1.23) 式有

$$\|T_h^n u_0 - u(t_1 + \tau, \cdot)\|_{L^1(C)} < \varepsilon.$$

若 t_1 足够小且 $nh = t$, 根据 u 的连续性假定有 $\|T_h^n u_0 - u(\tau, \cdot)\|_{L^1(C)} < 2\varepsilon$, 若 $nh = t$ 且 n 足够大, 这就证明了定理.

定理 1.3 说明, 对线性各向同性的局部滤波器, 从尺度独立的观点出发, 令其尺度参数 $h \rightarrow 0$, 同时对其迭代使用 n 次 ($n \rightarrow \infty$). 若保持 $nh = t$, 则其结果等价于热方程, 因此也就等价于 Gauss 函数的卷积. 在第 5 章将会发现, 腐蚀、膨胀、中值滤波等形态学算子的迭代极限也可以用非线性扩散方程的解来描述.

1.4 热方程的变分形式

现在给出热方程的一种等价刻画. 为此先来讨论一般的变分问题. 有许多相关的参考书全面或部分地研究和利用变分问题, 这里先介绍变分直接法, 目的是介绍泛函极小化问题解存在的一般性条件. 约定 X 为赋范向量空间, 范数记为 $\|\cdot\|$.

1.4.1 变分直接法

考虑泛函极小化问题: $\min\{F(u) : u \in X\}$. 假定 F 下有界, 直接法首先构造一个序列 $\{\bar{u}_j\}$ 满足 $\lim_j F(\bar{u}_j) = \inf\{F(u) : u \in X\}$, 称为极小化序列. 由于 F 下有界, 这样的极小化序列是存在的. 假定 F 具有强制性 (coercive), 即 $\{F < t\} = \{u \in X : F(u) < t\}$ 是预紧的 (pre-compact). 换句话说, $\forall t$, 存在一个紧集 K_t , 使 $K_t \supset \{F < t\}$. 所谓紧集, 即集合中的任意无穷列有收敛子列. 有了这样的预紧性, 则 $\{\bar{u}_j\}$ 有收敛子列, 仍记为 $\{\bar{u}_j\}$, 并设 $\bar{u}_j \rightarrow u$.

需要证明 $F(\bar{u}) = \inf\{F(u) : u \in X\}$. 实际上 $\inf\{F(u) : u \in X\} \leq F(\bar{u})$ 是显然的. 假定 $F(u)$ 满足下半连续性, 即 $\forall u \in X$, 若 $u_j \rightarrow u$, 则有 $F(u) \leq \liminf_j F(u_j)$. 在此假定下, 有 $F(\bar{u}) \leq \lim_j F(\bar{u}_j) = \inf\{F(u) : u \in X\}$.

因此可以得出下述结论:

$$\text{强制性 (紧性) + 下半连续性} \implies \text{解的存在性.} \quad (1.24)$$

进一步仔细考察下半连续性 (l.s.c.), 给出下半连续性的等价定义及性质.

先定义序列下极限: 若 $x_j \rightarrow x$, 定义 $f(x_j)$ 的序列下极限为

$$\liminf_j f(x_j) = \lim_j \inf_k f(x_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\inf_{j \leq k} f(x_j)]. \quad (1.25)$$