高等数学作业集

（上册）

刘　萍　王东红　唐月红　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等数学作业集

（上册）

刘 萍 王东红 唐月红 主编

姓名________________

学号________________

班级________________

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是唐月红等编《高等数学》教材的配套教学用书，分上下两册. 体系和内容与教材一致，用于教学同步练习. 主要内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等 12 章的练习题、总习题及答案，书末附有期末模拟考试 A、B 卷共四套. 本书在选材上，力求具有代表性，既保证内容的覆盖面，又注意精选题目，压缩总量，提高效益，体现素质教育特色.

本书可作为高等院校非数学专业本科生高等数学课程教学辅导用书，供高等数学学习者练习使用，也可供从事高等数学教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学作业集. 上册/刘萍，王东红，唐月红主编. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-022905-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘…②王…③唐… Ⅲ. 高等数学-高等学校-习题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 135555 号

责任编辑：赵 靖 李晓鹏 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2008 年 9 月第一次印刷 印张：7 1/2
印数：1—5 000 字数：158 000

定价：25.00 元(上下册)

前　言

本作业集是依据工科类本科高等数学课程教学的基本要求，兼顾研究生入学数学(一)的考试大纲而编写的课后练习，内容覆盖函数、极限、连续，一元函数微积分学，空间解析几何，多元函数微积分学，无穷级数和微分方程等，与现行高等数学教学同步，供两学期使用，分上、下两册，共12章. 每章除了供学生课后同步练习以帮助学生理解、巩固所学高等数学内容而精选的练习题外，还有作为全章内容归纳、总结和深化的总习题. 书末对这些练习题给出了答案或提示. 最后附有A,B试卷及参考答案与评分标准，供学生期末复习参考. 本作业集中的每道题均留有答题空间，学生可直接在上面求解，无需抄作业题，不需另备作业本，便于资料的保留，同时也便于教师批阅和收发.

本作业集自2000年开始试用至今，历经修改、编写而成，其特点是题型多样、题量恰当、难易适中、实用方便，体现了思维训练和能力培养，力求使学生通过认真练习迅速掌握习题所涉及的基本概念、基本理论和基本方法，提高分析问题、解决问题和综合应用知识的能力. 建议与授课时数160～176层次的课堂教学配套使用.

本作业集第1～4章由刘萍编写；第5～8章由王东红编写；第9～12章由唐月红编写. 南京航空航天大学许多长期从事高等数学教学的教师对本作业集的编写给予了很大的帮助，数学系主任陈芳启教授对本作业集的编写与出版给予了大力支持，在此一并表示感谢！

限于编者水平，疏漏之处在所难免，敬请使用者批评指正.

编　者

2008年6月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.2　函　　数

1. 下列各对函数中相同的有(　　).

(A) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(B) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$

2. 函数 $y=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2, & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)=$__________________，即 $y=f^{-1}(x)=$__________________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & -3<x\leqslant 0, \\ 2^x, & 0<x<3, \end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(2)$ 及 $f(x-1)$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内严格单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也严格单调增加.

5. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$.

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f[g(x)]=$____________________，

$g[f(x)]=$____________________.

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则函数(　　)的定义域为 $(0,1)$.

(A) $f(x^2-1)$　　(B) $[f(x)]^2$　　(C) $f(-x)$　　(D) $f(x-1)$

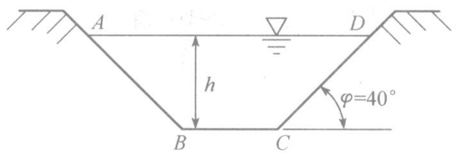
8. 已知 $f(x)$ 为奇函数，则 $g(x)=f(x)\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 必定为(　　).

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 奇偶性与 a 有关

9. 证明：$y=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.

10. 某水渠的横断面是一个等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式.



1.3　函数的极限

1.3.1　数列极限

1. 观察下列数列的变化趋势，若极限存在，写出它们的极限：

(1) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

(2) $a_n=1+(-1)^n$.

(3) $a_n=(-1)^n n$.

(4) $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

(5) $a_n=n\sin\dfrac{n\pi}{2}$

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

3. 设数列$\{a_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

4. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n^2}-n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-5)^n}{3^{n+1}+(-5)^{n+1}}$.

5. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$.

(2) 数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在，并求极限.

6. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1.3.2　函数极限

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$ 则 $f(0^-)=$________；$f(0^+)=$________；$f(1^-)=$________；$f(1^+)=$________.

问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

3. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $f(0^-)=$________，$f(0^+)=$________. 问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

4. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\sin3x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$.

(13) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

(14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

(15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2-1}$.

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x+1)$.

1.4 无穷小量与无穷大量

1. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$g(x)=1-\sqrt[3]{x}$，证明当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，但不是等价无穷小.

2. 利用等价无穷小及无穷小性质求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{1-\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

1.5　函数的连续性

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $f(0^-)=$________，$f(0^+)=$________，故 $x=0$ 是函数的第________类间断点.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间是________________________，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$________.

3. 求出下列函数的间断点，并判断其类型，若为可去间断点，试补充定义，使函数在该点连续.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

4. 函数 $y=\dfrac{x}{\tan x}$ 在点 $x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处间断，试说明这些间断点属于哪一类，若为可去间断点，试补充或改变定义，使函数连续.

5. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

6. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n 为正整数).

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.