

HUANGGANGZHIZAO

初中数学

解题易错点 完全突破

CHUZHONGSHUXUE
JIETIYICUODIAN
WANQUANTUPO

新课标 XINKEBIAO

数学八年级

長 春 出 版 社

黄网制造

黄冈制造

初中数学

解题易错点 完全突破

新课标 数学八年级

万志勇 主编

长春出版社

黄冈制造 初中数学解题易错点完全突破(新课标数学八年级)

主 编: 万志勇

责任编辑: 赵宇鹤

封面设计: 郝 威

版式设计: 王久柱

出版发行: 长春出版社

总 编 室 电 话: 0431-88563443

发行部电话: 0431-88561180

读者服务部电话: 0431-88561177

地 址: 吉林省长春市建设街 1377 号

邮 编: 130061

网 址: www.cccbbs.net

制 版: 长春大图视听文化艺术传播有限责任公司

印 刷: 吉林省金昇印务有限公司

经 销: 新华书店

开 本: 880×1230 毫米 32 开本

字 数: 494 千字

印 张: 12.125 印张

版 次: 2008 年 1 月第 2 版

印 次: 2008 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 16.00 元

版权所有 盗版必究

如有印装质量问题, 请与印厂联系调换

联系电话: 84866022

看起来更轻松

新概念——本书倡导“理科阅读”新概念，变做题为读题。有条件地忽略做题的操作过程，旨在通过阅读达到对题目的理解，着重于对解题方法和解题思路的强化训练与掌握。

易错点——本书作者根据多年的教学经验，对学生数学学习中的易错点加以归纳总结，并结合全国各地近年来有代表性的适合学生当前学习水平的中考试题及典型例题加以分析，在帮助学生强化突破解题易错点的同时，使学生熟悉中考命题的规律和最新中考题型，把握中考脉搏，为备考打下基础。

多功能——本书可视为教材例题的补充与扩展，解决教材例题偏少的问题，强化学生对知识点的理解与掌握，既可随课程进度进行同步学习，亦可作为期末复习及中考总复习的备考资料。

第十一章 一次函数专题

11.1 变量与函数	1
11.2 一次函数	8
11.3 用函数观点看方程(组)与不等式	19
解题方法归纳	29

第十二章 数据的描述专题

12.1 几种常见的统计图表	50
12.2 用图表描述数据	65
解题方法归纳	79

第十三章 全等三角形专题

13.1 全等三角形	97
13.2 三角形全等的条件	100
13.3 角的平分线的性质	112
解题方法归纳	119

第十四章 轴对称专题

14.1 轴对称	129
14.2 轴对称变换	138
14.3 等腰三角形	148
解题方法归纳	161

第十五章 整式专题

15.1 整式的加减	176
15.2 整式的乘法	181
15.3 乘法公式	187
15.4 整式除法	193

15.5 因式分解	196
解题方法归纳	203
第十六章 分式专题	
16.1 分式	212
16.2 分式的运算	217
16.3 分式方程	225
解题方法归纳	232
第十七章 反比例函数专题	
17.1 反比例函数	242
17.2 实际问题与反比例函数	252
解题方法归纳	258
第十八章 勾股定理专题	
18.1 勾股定理	270
18.2 勾股定理的逆定理	278
解题方法归纳	287
第十九章 四边形专题	
19.1 平行四边形	295
19.2 特殊的平行四边形	307
19.3 梯 形	318
解题方法归纳	328
第二十章 数据的分析专题	
20.1 数据的代表	345
20.2 数据的波动	352
解题方法归纳	363

第十一章 一次函数专题

11.1 变量与函数

例1 下列说法不正确的是

()

- A. 公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 中, $\frac{4}{3}\pi$ 是常量, r 是变量, V 是 πr 的函数
- B. 公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 中, V 是 r 的函数
- C. 公式 $V = \frac{S}{t}$ 中, V 可以是变量, 也可以是常量
- D. 圆的面积 S 是半径 r 的函数

解题思路

根据变量和常量的定义可知: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 中, $\frac{4}{3}\pi$ 是常量, V 、 r 是变量, $V = \frac{S}{t}$ 中, 有三个量. 其中无一量确定, 因而 V 可作常量, 也可以是变量. 根据函数的定义知: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 中, V 是 r 的函数, 由圆的面积 $S = \pi r^2$ 知, S 是 r 的函数, 故本题应选 A.

注意题目要求

正确答案: B、C、D 为正确判断, 故应选 A. 选择不正确判断.

易错警示

本题涉及变量、常量的定义及函数的定义的理解与运用, 由于理解不透彻, 易错将 π 认为是变量; V 只能为变量, 而不能为常量, 而错选 C 为不正确的判断.

同步矫正

1. 多边形内角和 y 与边数 n 的关系式为 $y = 180^\circ \cdot (n - 2)$. 那么下列说法正确的是 ()

- A. n 是常量, y 是变量, y 是 n 的函数
- B. 180° 是常量, n 是变量, n 是 y 的函数
- C. 180° 与 -2 是常量, y 与 n 是变量, y 是 n 的函数
- D. y 是自变量, 180° 与 -2 是常量, n 是 y 的函数

2. 设路程为 $S(\text{km})$, 速度 $V(\text{km/h})$, 若 $S = 100$ 时, $t = \frac{100}{V}$, 在这个函数关系中 ()

A. 路程是常量, t 是 $S = 100$ 的函数B. 速度是常量, t 是 V 的函数C. 时间和速度是变量, V 是 t 的函数D. 时间和速度是变量, t 是 V 的函数**正确答案:** 1. C 2. D例2 函数 $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ 自变量 x 的取值范围是_____.**解题思路** 从使自变量的式子有意义的角度考虑即可.**正确解答:** 依题意知: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 两个条件要同时成立. $\therefore x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ **易错警示** 本题是关于自变量的复合式, 分母中有偶次根式. 可有些学生只考虑到 $\sqrt{x}-1 \neq 0$ 而忽视了 $\sqrt{x} \geq 0$, 从而出现错误.

偶次方根中的被开方数为非负数.

同步矫正1. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.2. 函数 $y = \sqrt{1-x} + \frac{x}{2-x}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.**正确答案:** 1. $x \geq -1$ 且 $x \neq 3$ 2. $x \leq 1$ 例3 等腰 $\triangle ABC$ 的周长是 40 厘米, 底边 BC 长为 y 厘米, 腰 AB 长为 x 厘米.(1) 写出 y 关于 x 的函数关系式. (2) 求 x 的取值范围.**解题思路** (1) 由周长的定义可得其数量关系; (2) 由于 x 的取值范围受到图形本身的限制: 一方面 $x > 0, y > 0$; 另一方面由三角形边与边的关系, 得 $x + x > y$, 两个条件同时符合就是 x 的取值范围.**正确解答:** (1) 依题意有: $2x + y = 40 \quad \therefore y = 40 - 2x$ (2) 依题意有: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + x > y \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \\ 2x > 40 - 2x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \\ x > 10 \end{cases}$

三角形两边之和大于第三边.

 $\therefore 10 < x < 20$

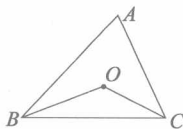
要考虑几何图

形本身的限制条件.

易错警示 本题是一道几何应用题, 涉及一个基本的几何图形——三角形, 它本身隐含一种不等关系: 三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 而这点恰恰易被忽略, 造成解的不全面, 错认为 x 的取值范围是 $0 < x < 20$, 或 x 取任意实数.

同步矫正

1. 如图 $\triangle ABC$ 中, O 是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 平分线的交点, 若 $\angle BAC$ 为 x 度, $\angle BOC$ 为 y 度.



(1) 写出 y 与 x 的函数关系式.

(2) 求 x 的取值范围.

2. 用总长为60米的篱笆围成矩形场地, 面积为 S 平方米, 一边长为 x 米.

(1) 写出 S 关于 x 的函数关系式.

(2) 求出自变量 x 的取值范围.

正确答案: 1. (1) $y = 90 + \frac{1}{2}x$ (2) $0 < x < 180$

2. (1) $S = x(30 - x)$ 或 $S = 30x - x^2$ (2) $0 < x < 30$

例4 今有350本图书, 借给学生阅读, 每人7本, 若余下的书数为 y 本, 借书的学生人数为 x 人.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 求自变量 x 的取值范围;

(3) 当余下的书为105本时, 问有多少人借书.

解题思路 (1) 根据余下的书数+已借的书数=总书数, 可求出函数关系式; (2) 自变量 x 表示人数应为非负整数, y 表示余下的书数, 应为非负整数且不超过350本; (3) 实质上是已知函数值 $y = 105$, 代入函数关系式中即可求出 x .

正确解答: (1) 依题意得: $y + 7x = 350 \therefore y = 350 - 7x$

(2) $\because x, y$ 都为非负整数且 $0 \leq y \leq 350$

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ 且为整数} \\ 0 \leq 350 - 7x \leq 350 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \text{ 且 } x \text{ 整数} \\ 0 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

$\therefore 0 \leq x \leq 50$ 且 x 为整数

(3) 依题意知: 当 $y = 105$ 时, 则有 $105 = 350 - 7x$

$\therefore x = 35$

因此, 当余下的书为105本时, 有35人借书.

用 $350 - 7x$
代换 y .

易错警示 实际问题中自变量的取值范围要同时考察两个方面: 一是要使含自变量的式子有意义, 另一方面要使实际问题有意义, 本题一般能确定 $x \geq 0, y \geq 0$, 但易忽视 x, y 都为整数的条件, 而错认为 $0 \leq x \leq 50$ 即可.

要考虑自变量在实际中的条件限制.

同步矫正

1. 某校办厂现在的年产值是28万元, 计划今后每年增加6万元, 若年产值为 y 万元, 年数为 x . (1) 求 y 与 x 之间的函数关系式; (2) 写出 x 的取值范围; (3) 求5年后该校办工厂的年产值.

2. (泸州) 某市出租车计费标准如下: 行驶路程不超过3千米时, 收费8元; 行驶超过3千米的部分按每千米1.60元计费. (1) 求出租车收费 y (元)与行驶路程 x (千米)之间的函数关系式; (2) 若某人一次乘出租车时, 付出了车费14.40元, 求他这次乘坐了多



少千米的路程。

正确答案: 1. $y = 6x + 28$ (2) $x \geq 0$ 且 x 为整数 (3) 58 万元 2. (1) $y = 8(0 < x \leq 3), y = 1.6x + 3.2(x > 3)$ (2) $\because y = 14.40 > 8 \therefore$ 将 $y = 14.40$ 代入 $y = 1.6x + 3.2$ 中得 $x = 7$ 。

例 5 画出函数 $y = x^2$ 的图象。

解题思路 根据画图象的三个步骤:列表、描点、连线即可完成。

体现自变量为所有的实数。

正确解答:列表

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

描点并画图。如图 11-1-1 所示:

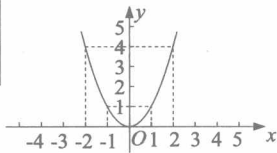


图 11-1-1

易错警示

初学者在作一般函数的图象时易存在以下几种错误:一是列表、画图象都没有体现自变量的取值范围。即在列表中没有列出带有省略号的表格,所画的图象上带有端点;二是用折线连接相邻的点,没有用平滑的曲线,按自变量从小到大的顺序连线。

图形与数的统一。

同步矫正

1. 画出函数 $y = 2x - 1$ 的图象。

2. 画出函数 $y = -3x$ 的图象。

正确答案:略(图象应为直线)

例 6 “龟兔赛跑”记述了这样的故事:领先的兔子看着缓慢爬行的乌龟,骄傲起来,睡了一觉,当它醒来时,发现乌龟快到终点了,于是急忙追赶,但为时已晚,乌龟还是先到了终点,用 s_1, s_2 分别表示乌龟和兔子所行走的路程, t 为时间,则下列图象(图 11-1-2)中与故事情节相符合的是 ()

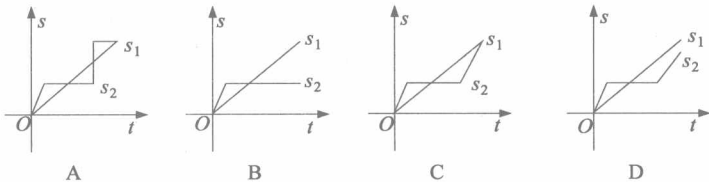


图 11-1-2

解题思路

抓住整个比赛过程中兔子先比乌龟跑得快,中途休息,后又跑得快,但时间到时,乌龟已到终点,而兔子尚未跑完全程,即可得解。

正确解答: A 图表示兔子先到终点等候乌龟, B 图表示兔子中途休息后,一直未跑, C 图表示兔子乌龟同时到达终点,只有 D 图符合情节,故选 D。

图象反映的过程要与情节相符。

易错警示

这是一道图象信息题,从图象中要善于捕捉信息是解题关键,相同的时间里,兔子和乌龟是否都跑完全程是影响解题的障碍,致使有些学生错误认为都跑完了全程,而错选 C.

时间到时,它们跑的路程不同.

同步矫正

1. (枣庄)如图 11-1-3 是韩老师早晨出门散步时,离家的距离 y 与时间 x 的函数图象,若用黑点表示韩老师家的位置,则韩老师散步行走的路线可能是 ()

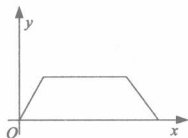


图 11-1-3

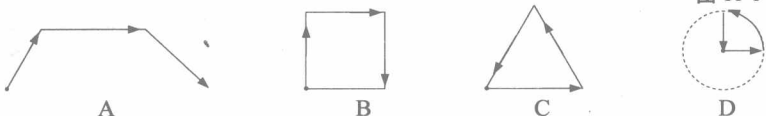


图 11-1-3

2. 小明根据邻居家的故事写了一首小诗:“儿子学成今日返,老父早早到车站,儿子到后细端详,父子高兴把家还。”如果用纵轴 y 表示父亲与儿子行进中离家的距离,用横轴 x 表示父亲离家的时间,那么下面的图象(图 11-1-4)与上述诗的含义大致吻合的是 ()

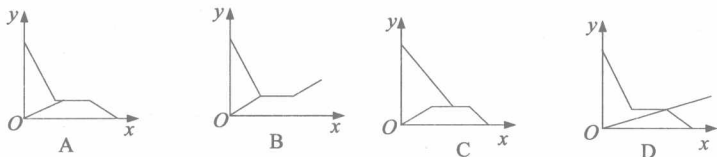


图 11-1-4

正确答案: 1. D 2. C

例 7 汽车开始行驶时,油箱中有油 30 升,如果每小时耗油 5 升.

(1) 写出油箱中余油量 Q (升)与行驶时间 t (时)之间的函数关系.

(2) 写出自变量 t 的取值范围.

(3) 画出函数的图象.

解题思路

(1) 由余油量 = 原有油量 - 工作时间 $\times$ 单位时间耗油量即可求得; (2) 自变量的取值要符合实际: 时间非负, 且行驶时间受油量限制; (3) 函数的图象要体现自变量的取值范围.

正确解答: (1) 依题意知: $Q = 30 - 5t \therefore Q = -5t + 30$

(2) 因为油箱中有油 30 升, 而每小时耗油量 5 升, 则可行驶的时间为: $30 \div 5 = 6$ (时), 所以自变量的取值范围为: $0 \leq t \leq 6$.

最大的行驶时间

(3) ①列表:

t	0	2	4	6
Q	30	20	10	0

②描点连线,函数图象如图 11-1-5 所示.

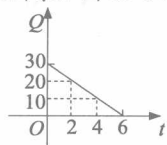


图 11-1-5

包含端点用实心点表示,不包含端点用空心点表示.

易错警示

本题涉及实际问题的函数图象的作法,由于函数图象是函数关系的反映,因此所画的函数图象要与自变量的取值范围相一致,本题学生在确定自变量的取值范围时易错误认为应是 $t \geq 0$,忽视 $t \leq 6$ 的条件;且初学者易错误作出其图象为一条直线.

同步矫正

应为直线 $Q = -5t + 30$ 上的一部分(即一条线段).

1. 已知圆的半径为 x .

(1)写出圆的周长 C 与半径 x 之间的函数关系式.

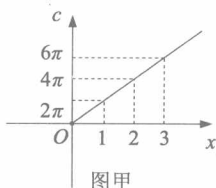
(2)写出自变量 x 的取值范围.

(3)画出函数的图象.

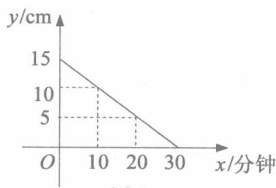
2. 已知一支蜡烛的长度为 15 厘米,当蜡烛点燃 6 分钟时,剩下烛长 12 厘米,点燃 16 分钟,剩下的烛长为 7 厘米,且知每分钟蜡烛燃掉的长度相等.假设点燃蜡烛 x 分钟,剩下的烛长为 y 厘米,求 y 与 x 之间的函数关系式,并画出函数图象.

正确答案: 1. (1) $C = 2\pi x$, (2) $x > 0$, (3) 图象如图 11-1-6(甲);

2. y 与 x 之间的关系为 $y = -\frac{1}{2}x + 15$ ($0 \leq x \leq 30$), 函数图象如图 11-1-6(乙).



图甲



图乙

图 11-1-6

例 8 某证券交易所提供的某种股票在一周内的每股涨跌情况如图 11-1-7 所示,根据图象回答下列问题:

(1)此种股票在星期二收盘时,每股多少元?

(2)星期几涨幅最大?

(3)从星期几股票开始下跌? 下跌到星期六收盘时每股多少元?

(4)小亮的爸爸在此周星期一、二、三持有该股票 1000 股,到星期五抛出时是亏还是赚? 亏赚多少?

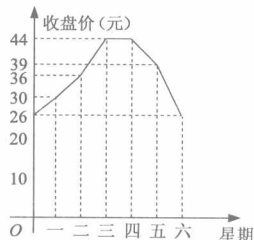


图 11-1-7

解题思路

(1)观察图象知星期一、二、三,股票持续上涨,分别标出前后两天股价的差,即可知星期几涨幅最大.(2)分别算出周一和周五小亮爸爸持有股票的总价,二者的差便知是亏还是赚,以及亏赚多少.

正确解答:(1)此种股票在星期二收盘时每股 36 元.

(2)观察图象可得右表,由此知星期三涨幅最大.

(3)从星期四开始下跌,下跌到星期六收盘时,每股 26 元.

(4)小亮爸爸持有的股票星期一的股价为:

$$30 \times 1000 = 30000 (\text{元}); \text{星期五的股价为:}$$

$$38 \times 1000 = 38000 (\text{元}) \text{ 则有: } 38000 - 30000 = 8000 (\text{元})$$

所以,小亮的爸爸赚了 8000 元.

星期	一	二	三
涨幅(元)	4	6	8

用作差法求值进行判断,差为正则赚,差为负则亏.

易错警示

这是一道有关函数图象的应用和探究题,由于审题不清,理解不深刻,认为计算亏赚时,应为星期五的股价减去星期四的股价,从而得出小亮爸爸此时亏的错误结论.

同步矫正

1. 某污水处理厂的一个净化水池设有 2 个进水口和 1 个出水口,三个水口至少打开一个,每个进水口进水的速度由图 11-1-8 给出,出水口出水的速度由图 11-1-9 给出.某天 0 点到 6 点,该水池的蓄水量与时间的函数关系如图 11-1-10 所示,通过对图象的观察,小亮得出了以下三个论断:(1)0 点到 3 点只进水不出水;(2)3 到 4 点不进水只出水;(3)4 点到 6 点不进水也不出水.其中正确的是 ()

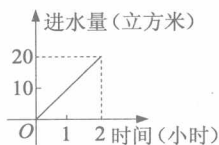


图 11-1-8

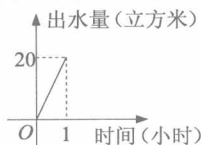


图 11-1-9

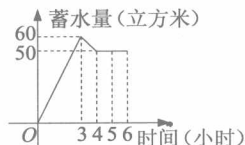


图 11-1-10

- A. (1) B. (2) C. (1)(3) D. (1)(2)(3)

2. 王教授和孙子小强星期日一起进行锻炼,来到山脚下,小强让爷爷先上山,然后追赶爷爷.如图 11-1-11 中两条线段分别表示小强和爷爷离开山脚的距离 y (米) 与爬山所用时间 x (分) 的关系 (从小强开始爬山时开始计时),看图回答下列问题:

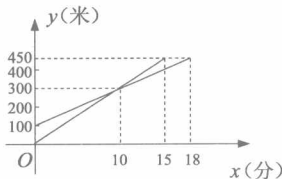


图 11-1-11

- (1) 爷爷比小强先上多少米? 山顶离山脚多少米?
 (2) 谁先爬上山顶? 小强爬上山顶用了多少分钟?
 (3) 图中两条线段的交点表示什么意思? 这时小强爬山用时多少? 离山脚多少米?
 (4) 若小强和爷爷都是匀速爬山,你能求出他们爬山的速度各是多少吗?

正确答案: 1. A 2. (1) 100 米, 450 米; (2) 小强, 15 分钟; (3) 相遇的时间和地点, 10 分钟, 300 米; (4) 小强的速度为 30 米/分, 爷爷的速度为: $\frac{450 - 100}{18} = \frac{175}{9}$ (米/分).



11.2 一次函数

例1 当 a 为何值时,函数 $y=(a^2+2a)x^{a^2-3}$ 是正比例函数.

解题思路 根据正比例函数的定义: x 的次数为1,且 $k \neq 0$ 来求解.

正确解答:根据题意,得 $\begin{cases} a^2-3=1 & \text{①} \\ a^2+2a \neq 0 & \text{②} \end{cases}$

注意 $k \neq 0$ 的条件要具备.

由①得: $a = \pm 2$; 由②得: $a \neq 0$ 且 $a \neq -2$.

所以,当 $a = 2$ 时,函数 $y=(a^2+2a)x^{a^2-3}$ 是正比例函数.

易错警示 对正比例函数的定义中 $k \neq 0$ 的条件许多初学者易忽视,因而在解本题易错得 $a = \pm 2$.

可将 $a = \pm 2$ 代入关系式后看与定义是否相符.

同步矫正

1. 已知函数 $y=(k-3)x^{k+2}$ 是正比例函数,求代数式 k^2-1 的值.

2. 若 $y=(m-3)x^{|m|-2}+2m+n$ 是正比例函数,求 m, n 的值.

正确答案:1. 0 2. $m = -3, n = 6$

例2 画正比例函数 $y = -\frac{1}{3}x$ 和 $y = 2x$ 的图象.

解题思路 正比例函数的图象是直线,由两点确定一条直线知,可取 $(0, 0), (1, k)$ 两点画图.

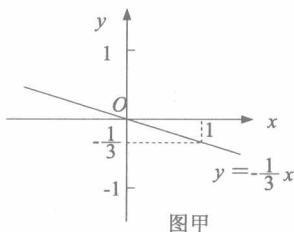
正确解答:①分别列表如下:

x	0	1
$y = -\frac{1}{3}x$	0	$-\frac{1}{3}$

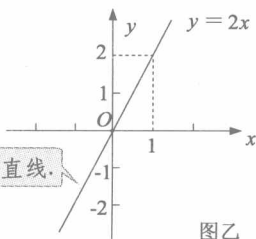
x	0	1
$y = 2x$	0	2

②描点并连线如图 11-2-1 所示:

列表有两组值即可.



图甲



图乙

图象是直线.

图 11-2-1

易错警示 初学者画正比例函数的图象时,在列表取值时常出现多取值而显繁杂的毛病,同时,连线时易错将直线画成过原点的射线.

用最简单的方法画图象.

同步矫正

1. 画正比例函数 $y = -x$ 和 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象.

2. 画出 $y = -\frac{1}{4}x$ 的图象,并借助图象找出:(1)直线上横坐标是 4 的点;(2)直线上纵坐标是 1 的点;(3)直线上到 y 轴距离等于 2 的点.

正确答案:1. 图象略 2. 图象略(1)(4, -1);(2)(-4, 1);(3)(2, - $\frac{1}{2}$)(-2, $\frac{1}{2}$).

例 3 已知正比例函数 $y = (m-1)x^{|m|-1}$.

(1)当 m 为何值时,函数的图象经过原点和第一、三象限?

(2)当 m 为何值时, y 随 x 的增大则减小?

解题思路 (1)正比例函数图象经过原点和第一、三象限时, $k > 0$,即 $m-1 > 0$;
(2)正比例函数的函数值 y 随 x 增大而减小时, $k < 0$,即 $m-1 < 0$.

正确解答:依题意得: $\begin{cases} |m|-1=1 & ① \\ m-1 \neq 0 & ② \end{cases}$

由①得: $m = \pm 2$,由②得 $m \neq 1$

所以 $m = \pm 2$

熟练掌握图象经过各象限时 k 的条件.

(1)当 $m-1 > 0$,即 $m > 1$ 时,函数图象经过原点和第一、三象限,因此 $m = 2$;

(2)当 $m-1 < 0$,即 $m < 1$ 时,函数值 y 随 x 的增大而减小,因此 $m = -2$.

易错警示 在学习正比例函数的性质时,图象经过的象限与图象是上升或下降趋势的关系初学者易混淆,同时,难于同函数值 y 随 x 的增大而增大(或减小)的规律建立联系.

结合图象来考察就比较容易.

同步矫正

1. 已知正比例函数 $y = (4+3m)x$,

(1)当 m 为何值时,函数的图象经过第二、四象限?

(2)当 m 为何值时,函数 y 随 x 的值增大而增大?

2. 已知 $y = (2m-1)x^{m-1}$ 是正比例函数,且 y 随 x 的增大而减小,则 m 的值为 ____.

正确答案:1. (1) $m < -\frac{4}{3}$; (2) $m > -\frac{4}{3}$ 2. $m = -\sqrt{2}$

例 4 已知 $y+a$ 与 $z+a$ (a 为常数)成正比例, z 是 x 的正比例函数. 试求 y 与 x 的函数关系.

解题思路 由 $y+a$ 与 $z+a$ 成正比例,可设 $y+a = k_1(z+a)$ ($k_1 \neq 0$),又由 z 是 x 的正比例函数,可设 $z = k_2x$ ($k_2 \neq 0$),把 $z = k_2x$ 代入 $y+a = k_1(z+a)$ 中,整理即可.



正确解答:由题意,可设 $y + a = k_1(z + a) (k \neq 0)$ ①, $z = k_2x (k_2 \neq 0)$ ②,将②代入

①得: $y = k_1k_2x + k_1a - a$

代入消去
 z ,即可转化.

易错警示

由于受 k 表示比例系数的定式影响,很多学生在解题时易将式①、式②中的 k_1, k_2 都设成为 k ,错误得到解析式为 $y = k^2x + (k - 1)a$.

本题两个函数关系式中的
比例系数 k_1, k_2 不一定相等.

同步矫正

1. 已知 y 与 x^2 成正比例,且当 $x = 2$ 时, $y = 5$,试确定 y 与 x 的函数关系式.
2. 已知 y 与 $x - 2$ 成正比例,且当 $x = 3$ 时, $y = 2$,求 y 与 x 的函数关系式.

正确答案: 1. $y = \frac{5}{4}x^2$ 2. $y = 2x - 4$

例 5 下列函数中,哪些是一次函数? 哪些是正比例函数?

(1) $y = -\frac{x}{2}$; (2) $y = \frac{5}{x}$; (3) $y = 6x^2 + x(1 - 6x)$; (4) $y = 1 + 7x$; (5) $y = \sqrt{2x + 3}$

解题思路

首先看每个函数的解析式能否通过恒等变形,转化为 $y = kx + b$ 的形式,如果 x 的次数是 1,且 $k \neq 0$,则是一次函数,否则就不是一次函数;如果常数项 $b = 0$,那么它就是正比例函数.

正确解答: (1) $y = -\frac{x}{2}$ 即为 $y = -\frac{1}{2}x$,其中 $k = -\frac{1}{2}, b = 0$.

$\therefore y = -\frac{x}{2}$ 是一次函数,也是正比例函数.

正比例函数是一次
函数的特殊情形.

(2) 因为正比例函数是常数与自变量积的形式,而 $\frac{5}{x}$ 是商的形式,所以 $y = \frac{5}{x}$ 不是正比例函数,也不是一次函数.

整理化简后判断.

(3) 由 $y = 6x^2 + x(1 - 6x)$ 整理得: $y = 6x^2 + x - 6x^2$,即 $y = x$.

其中 $k = 1, b = 0$,所以 $y = 6x^2 + x(1 - 6x)$ 是正比例函数,也是一次函数.

(4) $y = 1 + 7x$,即 $y = 7x + 1$,其中 $k = 7, b = 1$.

所以 $y = 1 + 7x$ 是一次函数,但不是正比例函数.

(5) $y = \sqrt{2x + 3}$ 中, $\sqrt{2x + 3}$ 表示是 $2x + 3$ 的算术平方根,它与“ $kx + b$ ”的形式不符,所以, $y = \sqrt{2x + 3}$ 不是一次函数,也不是正比例函数.

易错警示

本题是考查正比例函数,一次函数的定义.许多学生在判断时易出现这几种错误:(1)只考虑 x 的次数为 1,不考虑常数与自变量是积的形式,因而将 $y = \frac{5}{x}$ 认为是正比例函数, $y = \sqrt{2x + 3}$ 认为是一次函数;(2)没有化简整理,就进行判定,因而错将 $y = 6x^2 + x(1 - 6x)$ 认为既不是正比例函数,也不是一次函数.

熟悉函数解析式的结构特
征是解决此类问题的关键.

同步矫正

1. 下列函数关系式中,是正比例函数的是_____.(填序号)

① $y = kx$, ② $y = \frac{x}{4}$, ③ $y = kx^2$, ④ $y = \frac{1}{x}$, ⑤ $y = \frac{2}{\pi}x$

2. 下列函数中,哪些是一次函数,哪些是正比例函数?

① $y = -\frac{\sqrt{2}x+1}{3}$, ② $y = -\frac{5}{4x}$, ③ $y = 2\sqrt{3}x$, ④ $y = \frac{3}{7}x$, ⑤ $y = 2 - 3x$

正确答案: 1. ②⑤ 2. 一次函数: ①④⑤, 正比例函数: ④

例 6 已知函数 $y = (m-3)x^{3-|m|} + m + 2$

(1) 当 m 为何值时, y 是 x 的正比例函数?

(2) 当 m 为何值时, y 是 x 的一次函数?

解题思路 正比例函数必须满足是 $y = kx (k \neq 0)$ 的形式, 无常数项; 一次函数必须满足 $y = kx + b (k, b \text{ 为常数}, k \neq 0)$ 的形式.

正确解答: (1) 由题意, 得 $\begin{cases} m-3 \neq 0 & ① \\ 3-|m| = 1 & ② \\ m+2 = 0 & ③ \end{cases}$ 为正比例函数时常数项为 0.

由①得: $m \neq 3$, 由②得: $m = \pm 2$, 由③得: $m = -2$

所以 $m = -2$

因此, 当 $m = -2$ 时, $y = (m-3)x^{3-|m|} + m + 2$ 是正比例函数.

(2) 由题意, 得 $\begin{cases} m-3 \neq 0 & ① \\ 3-|m| = 1 & ② \end{cases}$ 为一次函数时 $k \neq 0$.

由①得: $m \neq 3$, 由②得 $m = \pm 2 \therefore m = \pm 2$

所以当 $m = \pm 2$ 时, $y = (m-3)x^{3-|m|} + m + 2$ 是一次函数.

易错警示 对于 $y = kx + b$ 的形式: 当 $k \neq 0, b = 0$ 时, 为正比例函数, 其中 $b = 0$ 的条件在确定函数关系为正比例函数时, 易忽视; 而当 $b \neq 0$ 时, 又忘记 $k \neq 0$ 的条件, 致使在解答本题第(1)问时, 得到错误答案 $m = \pm 2$, 解答第(2)问时, 又丢掉 $m \neq 3$ 的条件.

同步矫正

1. 已知: $y = (m+1)x^{|m|} + m^2 - 2$ 是一次函数, 求 m 的值及函数关系式.

2. 已知 $y = (k-1)x + k^2 - 4$ 是一次函数, 求 k 的取值范围.

正确答案: 1. $m = 1, y = 2x - 1$ 2. $k \neq 1$

例 7 函数 $y = (m+3)x^{2m+1} + 4x - 5 (x \neq 0)$ 是一个关于 x 的一次函数, 求 m 的值.

解题思路 根据一次函数解析式的特征, 结合本题已知条件, 必须分三种情况进行讨论: (1) $(m+3)x^{2m+1}$ 是一次项, 此时 $2m+1 = 1$ 且 $m+3+4 \neq 0$; (2) 若 $2m+1 \neq 1$, 则 $m+3 = 0$; (3) 由于 $x \neq 0$, 所以 $2m+1 = 0$.