内蒙古大学学术丛书

CONTRIBUTIONS TO THE FOUNDING OF THE THEORY OF TRANSFINITE NUMBERS

超穷数理论基础文稿

格奥尔格·康托 著
陈 杰 刘晓力 译

"Hypotheses non fingo."

"Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribe fideles ab ipsius nature voce latas et prolatas excipimus et describimus."

"Veniet tempus, quo ista que nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris avi diligentia."

内蒙古大学出版社

内蒙古大学学术丛书

超穷数理论基础文稿

格奥尔格·康托　著
陈　杰　刘晓力　译

内蒙古大学出版社

CONTRIBUTIONS TO
THE FOUNDING OF THE THEORY OF
TRANSFINITE NUMBERS
BY
GEORGE CANTOR

本书译自英译本，原书由菲利蒲·朱得因(P. E. B. Jourdain)作序，作注译成英文，纽约多佛出版社 1915 年第一版。

超穷数理基础文稿

陈杰　刘晓力　译

内蒙古大学出版社出版发行
(呼和浩特市大学西路 1 号)
内蒙古自治区新华书店经销
内蒙古大学印刷厂印刷

开本:850×1168/32　印张:6.25　字数:152 千
1995 年 9 月第 1 版　1995 年 9 月第 1 次印刷
印数:1—1000 册
ISBN 7—81015—556—3/O·38
定价:7.00 元

内 容 简 介

本书是德国数学家 G·Cantor 关于超穷数理论的一部名著，原文用德文写成，这里的中译本是根据 1915 年纽约多佛出版社的英译本译成的。本书由 G·Cantor 于 1895 和 1897 年在 Mathematsche Annalen 上发表的两篇论文构成，是 G·Cantor 关于超穷数理论研究二十多年工作的总结。第一部分为“全序集的研究”(1895)，第二部分为“良序集的研究”(1897)，内容分别为超穷基数和超穷序数理论。

本书的引言部分是英译者 P.E.B.Jourdain 对超穷数理论创立过程的历史追溯，书后的附注是对 1897 年以后超穷数理论发展所作的一个扼要介绍。

中 译 者 言

本书是一部数学经典，它记录了百年前数学领域的一项惊人成就同时也是数学和哲学思想史上一场深刻的革命，这就是格奥尔格.康托(George Cantor)惊世骇俗的超穷数理论的创立。

对康托来说，“无穷”是实有的。它们可以不同，可以比较大小，可以进行数学运算，乃至可以对它们进行（超穷）数学归纳，等等。康托关于无穷的研究从根本上背离了传统，因此一开始就在数学正统派营垒里引起激烈的争论，甚至遭受严厉的谴责。数学权威克朗内克（Leopold Kronecker）把康托说成是科学的骗子和叛徒，庞加莱（Henri Poincaré）则把超穷数论看成是数学发展史上的一场“疾病”。对康托的反对也来自哲学家和神学家。一个长达几十年的学术大辩论由此引发，许多年内，康托的名字就意味着论辩和对立。这使人想起，历史上，哥白尼(Nicolai Copernicus) 以他惊人的理论去校正亚里士多德(Aristotle) 的地心说时，曾经历过痛苦的过程，并付出了血与火的代价。康托的超穷数理论遭受同时代人严厉的审查和批判，其实是完全自然的。当论战的硝烟沉落时，希尔伯特(David Hilbert) 称赞康托的超穷算术是“数学思想最惊人的产物”，并声称：“没有人能把我们从康托为我们建立的新乐园中驱逐出去”。罗素（Bertrand,A.W.Russell）则把康托的工作说成“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的成就”。由康托工作所引起的哲学革命的影响甚至要超过由它引起的数学革命的影响。除去科学思想上的伟大意义，康托的理论还直接导致现代集合论的建立，也极大的刺激和推动了数理逻辑的大发展。而逻辑和现代集合论则构成了全部数学的基础。

本书是从朱得因（Philip E.B.Jourdain）的英译本转译的。

原文是康托分别于 1895 和 1897 年发表在《数学年鉴》(*Mathematische Annalen*) 上题为"Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"，Ⅰ和Ⅱ的两篇论文。这是康托二十多年关于超穷数理论研究的最后总结，也是这个不朽理论的定形文稿。按康托的原题，本书应译作《超穷集合论基础文稿》，朱得因以他在英译本"前言"中所说的理由，把本书译为《超穷数理论基础文稿》，我们沿用了英译本的书名。

本书从英译本转译有两方面的原因。一方面是因为我们没有找到上世纪的《数学年鉴》，即康托原文的出处；更重要的是，英译者得益于康托本人给他的一封长信，为英译本加了一个长篇"引言"，追踪了康托集合论产生和发展的详细过程，他还加了一个"附录"，扼要介绍了 1897 年到 1915 年英译本出版这段时间超穷数理论的进一步发展，这些对了解康托的工作无疑是有益的。

译者就翻译过程中遇到的一些问题，曾请教了康宏逵、郑毓信、袁向东、吴持哲几位先生，在此谨向他们表示诚挚的谢意。我们还要感谢内蒙古大学出版社的同志们，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动。

陈杰　刘晓力

1994 年 *10* 月于内蒙古大学

目　　录

前　　言

本书包括格奥尔格·康托的两篇非常重要的论文,题为“Beiträge zur Begründung der transfinten Mengenlehre”，分别于1895年和1897年[①]发表在《数学年鉴》(*Mathematische Annalen*)上。由于这两篇论文中主要研究的是各类超穷基数和超穷序数，而不是通常意义下的“集合论”(the theory of aggregates或the theory of sets)——集合元素是与一维或多维空间中几何意义的“点”对应的那些实数或复数——我认为使用本书现在这个译名(《超穷数理论基础文稿》)较为恰当。

这两篇论文是康托自1870年开始发表的长篇系列文章中若干最重要成果的最终的逻辑精练。要想体会康托在超穷数方面所做工作的极端重要性，我认为有必要对康托关于点集理论的早期研究进行专门的全面考察。正是这些研究第一次表明对超穷数的需要，而且也只有对这些研究进行考察，我们中的大多数才有可能对超穷数引进的所谓任意性，甚至不可靠性消除怀疑。不但如此，我们还有必要，特别是通过魏尔斯特拉斯等人的工作去追溯导致康托工作的那些研究的历史过程。因此，我在本书前面加了一个引言，回顾了十九世纪函数论的一部分进展，比较详细地谈到了魏尔斯特拉斯及其他人的基础性研究，以及康托在1870年到1905年间所做的工作。书后的附注对1897年以后超穷数理论的发展作了一个扼要的介绍。引言和附注所用的资料，极大地受益于许多年前康托教授寄给我的一封关于集合论的长信。

由康托的工作所引起的哲学革命的影响恐怕要超过由它所引

①Vol. xlvi, 1895, pp.481–512;　Vol. xlix, 1897, pp.207–246.

起的数学革命的影响。除了少数例外，数学家们愉快地接受了康托这个不朽理论的基础，对它寄予希望，仔细考察并使之更加完善；但是许多哲学家却反对它。这恐怕是由于他们中很少有人能真正理解它。我希望本书有助于使数学家和哲学家都能对康托的理论有一个更好的认识。

最深刻地影响着现代纯粹数学，间接地也影响着与之密切相关的现代逻辑和哲学的最值得称道的三个人是卡尔·魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass)、理查德·狄特金(Richard Dedekind)和格奥尔格·康托。狄特金的大部分工作沿着与康托相平行的方向展开，把狄特金的《连续性和无理数》、《数的性质及其意义》和康托的工作加以比较将会是很有意思的。狄特金这几部著作出色的英译本已由本书的出版商出版。① 这里所介绍的康托的论文已有法文译本，② 但至今还没有英文译本。由于顺利地获准翻译出版此书，我要感谢莱比锡和柏林的 B·G·Teubner 先生们以及《数学年鉴》的出版者们。

P·E·B·朱得因

① 《关于数论的随笔》(Ⅰ·《连续性和无理数》，Ⅱ·《数的性质及其意义》)，W·W·贝曼(W·W·Beman)译，芝加哥，1901 年，简称《数的随笔》。

②F·马洛特(F·Marotte)，《关于超穷数理论的基础》，巴黎，1899年。

引　言

I

想要通过个别人而又可靠地追溯从十九世纪直到今天仍深刻地影响着纯粹数学分析的主要概念的起源，人们不能不想到J.B.J.富利叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768－1830）的工作。富利叶是一流的物理学家，他非常明确地表述过自己对数学的见解，即数学只有通过其有助于解决物理问题才能证明自身的合理性。然而，函数、函数的“连续性”、无穷级数和积分的“收敛性”等一般数学概念，最初却是富利叶作为对热传导问题的一种粗糙的解的副产品提出来的。这也刺激了函数论的形成和发展。这个视野开阔的物理学家，当他认识到数学是用来对大量复杂的数据进行适当逻辑处理的卓有成效的手段，认识到只有当完全弄清楚有关我们所使用的方法和所得出的结论的每一个细节之后才能确信其逻辑的可靠性时，他认可了这种产生于物理学概念的数学方法的精细发展。纯粹数学家懂得，纯粹数学本身最终与哲学息息相关。但是，我们没有必要在这里论证纯粹数学的合理性，而只须指出它在物理学概念中的起源。不过我们也已经指出了，物理学甚至可以论证纯粹数学的许多最现代的发展的合理性。

Ⅱ

十九世纪，函数论的两大分支发展起来并逐渐分离。一方面，狄里赫莱（Dirichlet）给出了富利叶关于三角级数的结果的严格基础，它导致了对一元实变量（单值）函数的一般概念和函数（特别是三角）展开问题的研究。另一方面，柯西（Louis Cauchy，1789－1857）逐步认识到单变量复变函数的一种特殊概念的重要性，而且在很大程度上独立于柯西、魏尔斯特拉斯建立了他的复变函数的解析理论。

黎曼（Riemann）受到柯西和狄里赫莱研究方向的影响，继续进行关于复变函数论的研究，并大大发展了柯西的工作，同时在1884年的“大学授课资格论文”中，他还尽可能地推广了狄里赫莱关于一元实变量函数展成三角级数问题的不彻底的解。

黎曼在这两方面的工作给汉克尔（Hankel）留下了深刻印象。在1870年的一篇论文中，汉克尔企图揭示一元实变函数理论必然导致一些限制和扩充，由这些限制和扩充，我们才开始了复变函数黎曼理论的研究。汉克尔的这些工作，使他赢得了一元实变函数理论奠基人的称号。大约与此同时，在黎曼的“大学授课资格论文”的直接影响下，海涅（Heine）开始对三角级数进行一系列新的研究。

不久，在格奥尔格.康托研究了汉克尔的论文并将它应用于三角级数展开的唯一性定理时，我们终于见到康托关于无理数和点集或数集的“导集”的概念，而导集的概念是魏尔斯特拉斯为了严格处理他在柏林关于解析函数的讲座中提出的一些基本问题时引入的。从此，点集理论很快成为一门极其重要的独立理论。1882年，康托终于独立于集合的涵义，定义了第一次出现在数

学中的“超穷数”概念。

Ⅲ

十九世纪关于弦振动问题的研究① 引起了一些人的争论。一方面，达朗贝尔（D'Alembert）主张，由弦振动问题导出的偏微分方程的通解中的任意函数应该具有某些特定性质，使得它们能够与当时已知的可以解析表示的函数相一致，从而防止函数在每一点都是完全任意的。另一方面，欧拉（Euler）则对某些这种“任意”函数进入分析进行辩解。后来，贝努里（Daniel Bernoulli）给出了方程的一个无穷三角级数形式的解，并宣称在一定的物理背景下他的解与达朗贝尔的解具有同样的一般性。但欧拉指出，这仅当一个任意函数②$\varphi(x)$能够表示成如下形式的级数时才是对的:

$$\varphi(x)=\sum_{\nu} a_{\nu} \sin \frac{\nu \pi x}{l} .$$

实际上，$\varphi(x)$ 甚至未必总能展成一个幂级数，这一点也是首先由富利叶在研究同一个数学问题时指出的。这方面最早的

---

①参考我在《数学和物理学成就》（*Archiv der Mathematik und physik*）第三辑，Vol.x，1906，pp.225—256 和 Isis，Vol.i，1914，pp.670—677 中的文章。这个引言的大部分选自我的《超穷数的发展》，载于上述《文集》第三辑，Vol.x，pp.254— 281；Vol. xiv，1909，pp.289— 311；Vol. xvi，1910，pp. 21— 43；Vol.xxii，1913，pp.1—12.

②关于欧拉所说的“任意函数”，就是他称之为“不连续”的那种函数。但这并不指我们现在（柯西之后）所说的那种不连续函数，参见我发表在 Isis Voi.I，1914，pp.661—703 上的文章。

工作见于1807年他写给法兰西科学院关于热传导的通信。富利叶还确定了三角级数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+a_1\sin x$$
$$+a_2\sin 2x+\ldots$$

的系数具有如下形式：

$$b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(t)\cos(\nu t)\,dt$$

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(t)\sin(\nu t)\,dt$$

这一结果很可能独立于先前欧拉和拉格朗日关于一个有穷的三角级数系数的类似结果。富利叶还给出了关于他的级数收敛性的一个几何证明，尽管形式上并不能说是严格的，但其中包含了狄里赫莱证明的萌芽。

第一个严格表述富利叶级数的是狄里赫莱（Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805—1859）① 他把级数的前 n 项和表示成一个定积分，然后证明当 n 趋于无穷且当这个函数满足某些条件时，积分的极限就是三角级数表示的那个函数。1864年李普西兹（Lipschitz）把这些条件稍稍减弱了一些。

这样，富利叶的工作导致人们对某些与代数函数有着完全不

①．"关于在给定的范围内表达任意函数的三角级数的收敛性问题，"《数学杂志》（*Journ für Math*），vol.iv 1829，pp.157—169；《全集》vol.i，pp.117—132.

同特性的函数进行考察和严格处理。在这之前，人们不约而同地把那些代数函数看成是分析中能够出现的仅有的函数类型。从此以后，研究这些非代数函数就成为分析的任务之一了。

十九世纪初期，一种更特殊的虚变量，或称复变量的一元函数理论发展起来了。高斯(Carl Friedrich Gauss 1777-1855)至少部分地熟悉这一理论，但是他没有发表过自己的成果，所以这一理论的建立归功于了柯西。① 柯西不象高斯那样具有远见，富于洞察力，这一理论发展比较缓慢，柯西本人对"虚数"的偏见也是迟迟才有所克服。回顾1814年到1846年这段历史，我们可以看到，一开始富利叶的思想对柯西的观念产生了强烈影响，后来柯西对其他人的新思想越来越不敏感，与此同时这位气量狭小的天才做出了大量的成果。柯西总是以能在法兰西科学院每周一次的会议上提出论文而自豪。他之所以这样，恐怕部分地应归因于他的多产作品并不都是那么重要的。不但如此，柯西似乎基本上没有认识到一元复变函数理论的极端重要性。而他却为该理论的建立做了大量的工作。这一任务自然地落在了布里奥（Briot），布凯（Bouquet），皮瑟（Puiseux）和其他人的身上，而黎曼又以最令人惊异的方式发展了这一理论。

黎曼或许应该感谢他的老师狄里赫莱影响他致力于位势理论和三角级数两方面的研究。前者是一元复变函数论早期发展(1851)所使用的主要工具。黎曼在一篇关于函数可否由三角级数表示的论文（1854年就有人读过，但直到他逝世后才发表）中，不仅奠定了三角级数一切现代理论研究的基础，而且引发了汉克尔的研究方法，从而宣告了一元实变函数论作为一门独立学科的诞生。汉克尔研究的动力来源于对黎曼的一元复变函数论基

①参见朱得因的《柯西和高斯的函数论》，*Bibl. Math.* (3) Vol.vi， 1905，pp.190-207.

础的思考。汉克尔的目的是要指出，数学如何迫切地需要我们超出狄里赫莱曾间接地阐述过的函数的最一般概念而引进复变量概念，从而最终导致黎曼就职演讲中作为出发点的那个函数概念。为此目的，汉克尔于 1870 年在对狄里赫莱构想的各种可能性进行充分考察之后，开始撰写他的论文《无穷振荡且不连续的函数的研究；关于建立一般函数概念的文稿》。

黎曼在 1854 年的论文中，从如下一个狄里赫莱只解决了它的一种特殊情形的一般问题入手：如果一个函数可以展成一个三角级数，当自变量连续变化时，这个函数的值将发生什么变化？(就是说，函数能以何种最一般的方式变成不连续并具有极大极小值)。富利叶已经注意到，当自变量是实变量时，富利叶级数可能只对 x 的实数值收敛。黎曼的问题没有得到完全的解答，也许正是由于这一点，他的结果未在生前发表；然而幸运的是，我们特别关心的部分（它似乎实现了（而且不只是实现了）狄里赫莱修正无穷小分析原理的企图）是他给出了一个函数 f(x)可积的充分必要条件。这是黎曼的研究工作的必要前提。这样，黎曼就能给予积分法以一种较柯西甚至较狄里赫莱广得多的含义。事实上黎曼构造了一个可积函数，它在独立变量的任何两个任意接近的限之间都有无穷多个不连续点。这个函数的构造如下：设 x 是一个实变量，(x) 表示 x 对距它最近的那个整数的（正的或负的）增量，如果 x 恰在两个整数之间，则 (x) 为零，这样，(x) 是 x 的一个单值函数，它在$n+\frac{1}{2}$处不连续，(其中 n 是一个整数，正的，负的或零)并且分别以$\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$为上下界。进一步，对于整数 v，(vx)是在点$\nu x=n+\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{\nu}(n+\frac{1}{2})$处不连续的函数。于是，级数

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu x)}{\nu^2}$$

对所有形如 x＝p／2n 的 x 值都不连续，其中 p 是一个与 n 互素的奇数，$\frac{1}{\nu^2}$是为了保证级数对所有的 x 都收敛而附加的因子。正是这种方法，1870 年由汉克尔在某些方面作了推广。在黎曼的例子中出现的是一个分析表达式，因而它是在欧拉意义上一个"函数"，但由于它有那么多奇点，因而不具有黎曼的"复变函数"的那些一般特性。受到这个例子的启示，汉克尔给出了一种方法，可以构成在每个有理点上具有奇异性的分析表达式。这样，在某些保留下，他可以说，每个狄里赫莱意义下的"函数"也是欧拉意义下的"函数"。

然而，对康托影响最大的似乎不是黎曼、汉克尔以及他们的后继者（尽管这些人的工作与康托在某些方面的工作密切相关），而是和黎曼同时代的魏尔斯特拉斯，他以非常不同并且更严格的方法研究了复变解析函数论中许多相同的问题。

IV

卡尔.魏尔斯特拉斯在 1857 年进入柏林科学院的演讲中说过，1839 年－1840 年冬，在老师古德曼(Gudermann)的影响下，他第一次接触到椭圆函数理论，就强烈地被分析的这一分支吸引着。"现在，在数学的任何领域总是高瞻远瞩的阿贝尔（Niels Henrik Abel）建立了一个定理，它包括了产生于代数微分的积分中所有的超越性，而这一定理对于这些超越性所具有的重要意