



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学教育系列教材

# 数学教育概论

(第二版)

张奠宙 宋乃庆 主编



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材  
数学教育系列教材

# 数学教育概论

(第二版)

张奠宙 宋乃庆 主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是“数学教育系列教材”(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)之一,是关于数学教育基本理论与实践的概述,帮助具有数学专业知识的学生获得有关数学教育的基本知识和技能。

全书分为理论篇和实践篇。在第一版的基础上,文字内容和编排顺序作了适当的调整,加入了一些“与时俱进”的内容(如课程改革),个别章节的内容做了较大的变动,如波利亚的解题理论、数学教育技术、学习心理学与数学教育、数学史与数学教育、数学教学原则、数学活动经验、数学本质的揭示等。

本书的读者对象是高等师范院校数学系的学生以及有志于从事数学教育的大学生,也十分适合作为中小学教师培训和继续教育用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学教育概论/张奠宙,宋乃庆主编. —2版. —北京:  
高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-024867-8

I. 数… II. ①张…②宋… III. 数学教学-教育学-高等教育-教材 IV. O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 176493 号

策划编辑 马丽 责任编辑 李华英 封面设计 于文燕  
责任绘图 杜晓丹 版式设计 范晓红 责任校对 杨雪莲  
责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
总 机 010-58581000  
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京印刷一厂

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16  
印 张 22  
字 数 400 000

版 次 2004 年 10 月第 1 版  
2009 年 1 月第 2 版  
印 次 2009 年 1 月第 1 次印刷  
定 价 27.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24867-00

# 《数学教育概论》(第二版)编者

## 主编:

张奠宙(华东师范大学)

宋乃庆(西南大学)

## 编者:

张景中(中国科学院成都分院、广州大学)

罗增儒(陕西师范大学)

刘 静(西南大学)

马岷兴(四川师范大学)

巩子坤(杭州师范大学)

杜玉祥(山东泰山学院)

曾 铮(肇庆学院)

李忠如(西南大学)

王林全(华南师范大学)

任子朝(国家考试中心)

李 俊(华东师范大学)

曹 新(赣南师范学院)

张思明(北京大学附中)

张艳霞(邯郸学院)

## 参与写作和提供资料者:

戴再平(浙江教育学院)

张 雄(陕西教育学院)

俞求是(人民教育出版社)

邵光华(曲阜师范大学)

康 武(深圳大学)

马 复(南京师范大学)

但 琦(原西南大学博士生)

李 渺(华中师范大学)

李士锜(华东师范大学)

丁丰朝(贵阳学院)

夏小刚(贵州师范大学)

林永伟(杭州师范大学)

黄 翔(重庆师范大学)

黄荣金(澳门大学)

张 楠(原西南大学博士生)

蔡炯辉(云南玉溪师范学院)

## 第二版前言

《数学教育概论》出版以来,因其新设的框架体系,理论与实践相结合的编排方式,大量来自中学第一线的案例,受到读者的欢迎。不过,第一版是多人的手笔,文风各不相同,叙述不周、文字疏漏之处颇多,在此向广大读者表示歉意。

2006年冬,数学教育高级研讨班在重庆举行。与会的各位同行对本书提出了许多中肯的批评建议,遂有修订之意。高等教育出版社也有意不断锤炼此教材,将其打造成新世纪高等院校数学教育教材中的“保留节目”。于是修订工作随之启动。

经与原书的有关作者商量,决定第二版修订的原则是小步调整,不作大的改动。首先是文字整理,尽量把不通顺的文字,前后脱节的叙述,乃至出现的错误,一一加以改正。另外,一些“与时俱进”的内容(如课程改革)则必须补充调整,个别章节的内容不得不做一些稍大的变动。

这次修订的一个重点是把“理论篇”和“实践篇”的编排理顺。根据读者的建议,在绪论之后,还是先写理论篇,把实践篇放在后面,至于实际的使用次序,则由任课教师决定。

实践篇共四章。先是“听”别人上课,然后是“学”别人上课,接着是“写”教案和说课,最后是试验性地“讲”课。这样的安排是否合适,还有待教学实践的检验。

修订工作伊始,枣庄学院的巩子坤同志有丰富的教学经验,又刚刚在西南师范大学取得博士学位,表示愿意参与修订工作,理论篇的文字整理工作就交给他了。不久,他调往杭州师范大学工作。

2007年上半年,赣南师范学院的曹新老师、邯郸学院的张艳霞老师都在华东师范大学访问,时间比较充裕,又是讲授本课程的一线教师,做实践篇的修订工作非常合适。他们很快拿出了修改稿。

一些改动大的章节,我则不断做了些准备。

2007年很快过去了,我先是协助宋乃庆教授完成《小学数学教育概论》的统稿工作,然后投入《小学数学研究》的编写,这耗费了大量的精力。进入2008年,本书修改定稿工作终于排上日程。

我除了也做文字校订外,主要做的改动是原书理论篇的“研究专题”和“课程改革”两部分。原来的第八章涉及义务教育数学课程改革,由于此后发生的争论和义务教育数学课程标准的修订,我们自然要根据新的情况进行修改。动作更大的是原来的第七章数学教育的一些基本课题。我觉得这一章内容太多。遂将它拆为“数学教育的核心内容”和“数学教育研究的一些特定课题”两章。前者是论述数学教育的一般原理,从目标、原则、知识、能力、思想方法、活动经验、教学模式到德育,阐述数学教育的特定规律。后者则是一些特定需要关注的数学教育课题。这两章的内容也有相当的变化。例如,数学教育原则根据数学特点作了新的界定说明。“数学活动经验”是新提出的概念,我们也作了论述。

数学教育技术延请张景中院士执笔,较之前有大幅修改和补充,为本书增色不少。

稿子修改过程中,杭州师范大学的林永伟老师通读了稿件,提出了许多修改建议。

稿子改动较大的还有:

- 波利亚的解题理论以及数学教育技术两节,巩子坤作了大的修改;
- 学习心理学与数学教育,参考李士铸在《数学教育导论》中的相关文字;
- 数学史与数学教育,林永伟作了许多修改;
- 实践篇中新增加的文字,由曹新、张艳霞完成;
- 其他新增的章节,如“数学教育原则”、“数学活动经验”、“数学本质的揭示”等,均由我来完成。建构主义理论,我几乎重写。与一般的观点不同,没有全盘否定,而是批判地吸收。这也许会引起争论,期待同行的批评指正。

此次修订虽进行了很细致的工作,但书中仍难免有错误和不完善之处,敬请各位同行批评指正。

张奠宙

华东师范大学数学教育研究所

2008年3月

# 第一版前言

21 世纪的中国,进入全面建设小康社会的阶段。教育飞速发展,九年义务教育基本普及。教师教育面临新的改革与发展。2002 年 8 月,国际数学家大会在北京召开,数学科学的进步再次成为全球社会关注的焦点。如何发展中国的数学教育,历史地摆在高等师范院校数学教育工作者的面前。

早在 2001 年秋于成都四川师大举行数学教育高级研讨班的时候,大家就有意编写一套符合时代需要的数学教育相关教材。此后不久,恰逢“十五”国家级规划教材启动。于是,我们联合全国主要高师院校的数学教育专家,经西南师范大学,共同申报《数学教育系列教材》“十五”规划教材。经过激烈的竞争和严格评审,申报终于成功。据信,这是首次“学科教育”类教材列入国家规划教材。

2002 年 8 月,西南师范大学主办的国际数学家大会的卫星会议——“21 世纪数学课程与教学改革国际会议”在重庆召开。会议期间,与会的高师院校代表多次聚会磋商,讨论如何落实这一“系列教材”的编写任务。大家一致认为,这是我国数学教育界的一次重要的学科建设项目,必须联合全国的力量共同完成。于是,我们用“标书”的形式向全国同行征求作者。经过半年的函件来往,终于确定了作者队伍。2003 年底,大部分初稿陆续完成。

《数学教育概论》是这套系列教材的核心部分。我们拟定了编写纲要,提出如下编写的指导思想。

第一,要进行学科定位。近一百年来,数学教育学已经发展成为一个具有丰富的科学学科。国际上普遍使用“数学教育(mathematics education)”这一名词。相形之下,过去使用的“数学教材教法”名称,带有现成条规解释的性质,类似一本“说明书”,缺乏学术形态,难以表述一门学科的科学内涵。因此,我们将本书定名为《数学教育概论》,力图建立一门比较系统的科学体系。

第二,要与时俱进,立足改革。进入 21 世纪之后,数学教育的环境,以及数学教育学的理论与实践都有了巨大的变化。书中设立专章论述“与时俱进的数学教育”,以及“中国数学课程的改革”,努力为当前的数学教育改革提供支撑。

第三,面向教学实践。本书分为“实践篇”和“理论篇”。这是一个大胆的尝试,也是长期教学经验的总结。对于缺乏教学经验的高师本科生而言,观察、欣

赏、研究各种教学案例,尝试编制教案,以及走上讲台的演习等等,都是学习“数学教育理论”不可缺少的步骤。我们在今后的教学实践中不断完善这一设想。与此同时,我们也专门介绍国际著名的一些数学教育理论,包括中国的“注重双基”的数学教育,努力把理论和实践结合起来。

第四,在第七章进行关于数学教育的若干专题的研究。数学教育是一门科学学科,涉及许多专题,需要进行理论探讨。对数学教育目标,数学能力,数学教学模式等问题,我们力求从学术上进行概要的论证,包括提出一些不同的见解,供读者进行讨论思考。有些专题,如数学优秀生的选拔,数学后进生的培养等等,在以前很少涉及,但是在实践上却十分重要。当然,这些专题都有专著进行探讨。这里只是“概论”,为读者做一些入门的介绍,不可能深究。

第五,重视解题,以及数学教育研究。中国是数学解题大国。数学问题解决又是国际上一种重要的研究潮流。数学考试一向是社会关注的焦点。因此本书设立专章进行介绍和评述。在第十章我们设立专章论述“数学教育研究”。数学教师既是一个实践者,也是一位研究者。为了提高教学质量,进行教学研究是必由之路。我们在该章设立一节介绍国内外一些优秀的论文、研究报告和教案实例,供读者揣摩研究。限于篇幅,论文的全文放入光盘。

最后,谈到本书的文风。由于本书的读者是缺乏数学教学经验的大学生,我们在叙述上力求通俗易懂,生动有趣,求真务实。特别是本书大量使用教学案例,希望能够大幅度增强可读性,改变数学教育著作难读难懂的局面。与此同时,力戒“学院式”的论述,竭力避免使用晦涩的语言。

关于本书的使用,理想的做法是按照以下的教学顺序:实践篇—教学实习—理论篇—进一步的选修课。但是这样安排教育实习可能有困难,在理论篇之后进行也未尝不可。

由上可知,《数学教育概论》是一本改革力度比较大的教材。它也许符合数学教育改革的大方向,却未必能够做得令大家满意。这份教材毕竟还不成熟,特别是还没有经过教学实践的检验,我们的心中不免忐忑。因此我们热切希望专家和读者能够关爱这一改革的成果,不吝批评指正。

我们于2004年3月在西南师范大学对本教材进行统稿,参加的有张莫宙、宋乃庆、罗增儒、王林全、李忠如、刘静等。大家知道,将许多不同作者用不同风格写成的初稿,整合为一本前后一致,浑然一体的著作,并非易事。在这过程中,对有些初稿进行修改的幅度很大,特别是一些重要观点的把握和陈述,主要由主编负责。有些修改甚至和原稿的观点相左。这些,期望得到有关同志的谅解。统稿之后,西南师范大学数学教育方向的博士生和硕士生对原稿进行了通读,提出了许多宝贵的意见,在此表示深切的感谢。



本书大量引用许多著作、论文、课例,我们都尽量注明出处,深以为谢。许多中学老师的名字出现在教材之中,借此对耕耘在数学教学第一线的老师们的工作深表敬意。由于时间仓促,疏漏在所难免,敬请原谅。

高等教育出版社的李艳馥同志为本书的出版做了许多具体工作,彼此合作愉快。

主编:张奠宙 宋乃庆

2004年8月

# 目 录

<b>第一章 绪论:为什么要学习数学教育学</b> .....	1
第一节 数学教育成为一个专业的历史 .....	1
第二节 数学教育成为一门科学学科的历史 .....	3
第三节 数学教育研究热点的演变 .....	5
第四节 几个数学教育研究的案例 .....	6

## 理 论 篇

<b>第二章 与时俱进的数学教育</b> .....	17
第一节 20 世纪数学观的变化 .....	17
第二节 作为社会文化的数学教育 .....	21
第三节 20 世纪我国数学教育观的变化 .....	27
第四节 国际视野下的中国数学教育 .....	32
第五节 改革中的中国数学教育 .....	36
附录:我国影响较大的几次数学教改实验 .....	38
<b>第三章 数学教育的基本理论</b> .....	42
第一节 弗赖登塔尔的数学教育理论 .....	42
第二节 波利亚的解题理论 .....	46
第三节 建构主义的数学教育理论 .....	56
第四节 我国“双基”数学教学 .....	60
<b>第四章 数学教育的核心内容</b> .....	74
第一节 数学教育目标的确定 .....	74
第二节 数学教学原则 .....	77
第三节 数学知识的教学 .....	81
第四节 数学能力的界定 .....	84
第五节 数学思想方法的教学 .....	88
第六节 数学活动经验 .....	92

第七节	数学教学模式 .....	96
第八节	数学教学的德育功能 .....	100
<b>第五章</b>	<b>数学教育研究的一些特定课题 .....</b>	<b>107</b>
第一节	数学教学中数学本质的揭示 .....	107
第二节	学习心理学与数学教育 .....	109
第三节	数学史与数学教育 .....	114
第四节	数学教育技术 .....	119
第五节	数学优秀生的培养与数学竞赛 .....	136
第六节	数学学差生的诊断与转化 .....	143
附录:	数学学差生诊断与转化个案 .....	148
<b>第六章</b>	<b>数学课程的制定与改革 .....</b>	<b>153</b>
第一节	中外数学课程改革简史 .....	153
第二节	《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》的制定与实验 .....	156
第三节	关于义务教育数学课程标准的争论与修订 .....	159
第四节	《普通高中数学课程标准(实验)》的基本理念 .....	162
第五节	《普通高中数学课程标准(实验)》对有关数学内容的 取舍和处理 .....	164
第六节	数学建模与数学课程 .....	168
第七节	研究性学习与数学课程 .....	171
第八节	社会主义市场经济与中学数学 .....	174
<b>第七章</b>	<b>数学问题与数学考试 .....</b>	<b>178</b>
第一节	数学问题和数学解题 .....	178
第二节	数学应用题、情境题、开放题 .....	184
第三节	数学问题解决的教学 .....	191
第四节	数学考试中的命题探讨 .....	195
<b>第八章</b>	<b>数学教育研究 .....</b>	<b>206</b>
第一节	数学教育研究的有关认识 .....	206
第二节	数学教育论文习作 .....	211

## 实 践 篇

<b>第九章</b>	<b>数学课堂教学观摩与评析 .....</b>	<b>219</b>
第一节	师范生走向课堂执教时的困惑 .....	219
第二节	案例学习——数学弄懂了还要知道怎么教 .....	222

---

第三节	一些特定类型的课例赏析·····	231
第四节	一些案例(课堂教学片段)的评析·····	262
<b>第十章</b>	<b>数学课堂教学基本技能训练·····</b>	<b>275</b>
第一节	如何吸引学生·····	276
第二节	如何启发学生·····	278
第三节	如何与学生交流·····	279
第四节	如何组织学生·····	288
第五节	形成教学艺术风格·····	289
<b>第十一章</b>	<b>数学教学设计·····</b>	<b>295</b>
第一节	教案三要素·····	295
第二节	数学教学目标的确定·····	301
第三节	设计意图的形成·····	307
第四节	教学过程的展示·····	310
第五节	优秀教学设计的基本要求·····	319
<b>第十二章</b>	<b>数学教育实习前的准备·····</b>	<b>323</b>
第一节	从学生到教师身份的转换·····	323
第二节	学习说课·····	327
第三节	参与微格教学·····	332

# 第一章 绪论：为什么要学习数学教育学

读者打开本书，也许首先会问：作为一个数学教师，为什么要学习数学教育学？常见的疑问有以下三种：

- “数学老师是讲数学的，只要懂得数学就一定能够上好数学课，何必学数学教育？”

- “我从小学一年级就上数学课，怎么上数学课还能不知道？”

- “教育学就那么几条规律，我都知道了，数学教育还会有什么新花样？”

本章我们将陆续回答这些问题。

## 第一节 数学教育成为一个专业的历史

数学教师是一种职业，是一种需要特殊培养的专业人士。让我们来回顾一下历史。

在古代，学校（尤其是政府开办的学校）教育的主要目的是培养大大小小的官吏、僧侣和文职人员。为了将学生培养成统治者，“读、写、算”（西方称之为3R's教育，即Reading, Writing, Arithmetic<sup>[1]</sup>）是最基本的。无论在古埃及、巴比伦和中国等文明古国，还是在稍后崛起的古希腊和古罗马，经世致用的数学都是学校启蒙教育中一个必不可少的内容。

在西方，数学教育的目的主要是为了训练学生的心智，在“七艺”教育（文法、修辞、逻辑学、算术、几何、天文、音乐）中，几何和天文学的地位排在文法、修辞与逻辑学之后<sup>[1]</sup>。在中国，古代算学以测量田亩、计算税收等为目的，主要用于国家管理。汉代以后，独尊儒术。虽然数学也属“六艺”教育（礼、乐、射、御、书、数）之一艺，但正如南北朝时期的颜之推所说“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道定律历者皆学通之，然可以兼明，不可以专业”，甚至于出现了“后世数则委之商贾贩鬻辈，学士大夫耻言之，皆以为不足学，故传者益鲜”的局面<sup>[2]</sup>。可见，中国古代数学教育的主要目的是为了经世致用，地位不高。唐代还曾设“算学博士”，宋时已废。明清两代，知识分子只攻四书五经，数学几乎停止发展，数学教育更谈不上。

进入19世纪，西方国家的科学技术迅速发展，但传统的人文学科依然在学校教育中占领着统治地位。于是，古典教育和科学教育之间展开了一场比以往

任何时候都更为激烈的斗争。坚持古典教育的人,自诩其教学几门课程便能给予人的心智以一般的训练,并使得能力能够迁移到后来的学习中去。他们攻击科学教育课程只重视琐碎的事实,担负不起道德培养的重任。而倡导科学教育的人则强烈要求将近代科学引进学校教育,坚持自然科学知识应占最重要的地位,应以实用的知识代替那些传统的不切实际的装饰性知识。这场斗争中,科学教育思想首先在产业革命的发祥地——英国战胜了古典教育思想,接着,在其他工业大国,如德国、法国和美国,也都相继建立起以科学为中心的学校课程体系。数学因其与自然科学有着密不可分的联系,从此在学校教育中占有了重要地位。

这一历史时期,中国的社会、学校教育也发生了极大的变化。早在明末清初,西方传教士就带来了《几何原本》等数学著作。这种不用筹算,不用珠算,而用笔算的抽象的系统的数学,令中国数学家耳目一新。徐光启非常推崇《几何原本》,他认为这是一本训练思维的好书,“举世无一人不当学<sup>[3]</sup>”。不过,当时能够读懂《几何原本》的人很少。

1840年鸦片战争以后,中国社会开始沦为半殖民地半封建社会。当时,来华的西方传教士不再满足于翻译介绍西方数学,它们在中国兴办教会学校,编写宗教用书和数理化教科书。用美国传教士狄考文的话说,就是“如果我们取儒学的地位而代之,我们就要准备好自己的人们,用基督教和科学来教育他们,使他们能胜过中国的旧士大夫,因而取得旧士大夫阶级所占的统治地位<sup>[2]</sup>”。与此同时,清朝统治者中的有识之士也注意到了办学之重要。林则徐提出的“师夷长技以制夷”的主张,得到许多朝野人士的响应。闽浙总督和船政大臣沈葆楨启奏皇帝:“水师之强弱,以炮船为宗;炮船之巧拙,以算学为本。<sup>[3]</sup>”但是,真正在学校中普及数学是在辛亥革命,特别是“五四”运动以后的事情。

根据 Jeremy Kilpatrick 在《一份数学教育研究的历史》<sup>[4]</sup>中的介绍,除了数学



克莱因(Felix Klein,  
1849—1925)

还要懂得教学法才能胜任数学教师工作,这一点直到19世纪末才被人们充分认识到。诸如“会数学不一定会教数学”,“数学教师是有别于数学家的另一种职业”这样的观念开始逐渐被认同。为了满足社会对教师尤其是受过良好训练的教师的需求,在一些国家的大学里,除了要求未来的教师学习数学课程,还安排他们学习数学教学法,了解一些课堂教学的原理、课堂管理的技能等。

众所周知,1911年,哥廷根大学的Rudolf Schimmack成为第一个数学教育博士,其导师是德国著名数学家克莱因(Felix Klein, 1849—1925)。克莱因是

一代几何学权威。1872年发表了著名的几何学“爱尔朗根纲领”，用运动群下的不变量对几何学进行分类，成为划时代的数学里程碑。他后来是世界数学中心——哥廷根大学的数学领导人。事实上，在我们的大学里，确实有一些优秀的数学家是优秀的教育工作者，但是，也有一些数学研究作的很好，讲课却并不令人满意。数学教育是一门学问，我们应该走克莱因指出的道路。下一节我们还要进一步阐述他在数学教育上的贡献。

进入20世纪，各国培养教师计划中重视和加强教学法培训的倾向更加明显了，数学教育逐渐成长为一个需要具备一定特殊技能的专业。

## 第二节 数学教育成为一门科学学科的历史

Jeremy Kilpatrick 在上文中还指出：专业人员对学校数学教育的有关现象开展研究大约起于一百年前。有两门学科对数学教育研究有过根本性的影响，它们就是数学和心理学。下面，我们分别以克莱因和皮亚杰(Jean Piaget, 1896—1980)为例，说明数学家和心理学家所产生的影响。

1908年，在第四届国际数学家大会上成立了国际数学联盟(IMU)的一个新的下属组织——国际数学教育委员会(ICMI)，克莱因当选为该委员会的第一任主席。他是一位热心倡导数学教育改革的数学家，在1900年之后，他在演讲和著作中一再强调<sup>[5,6]</sup>：

(1) 数学教师应具备较高的数学观点，只有观点高了，事物才能显得明了而简单。一个称职的教师应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程以及数学教育演化的经过。

(2) 教育应该是发生性的，所以空间的直观，数学上的应用，函数的概念是非常必要的。教几何学，在教科书的卷首上应该写上“欧几里得不是为孩子写这本书的”。

(3) 应该用综合起来的一般概念和方法来解决问题，而不要去深钻那种特殊的解法。

(4) 应该把算术、代数和几何学方面的内容，用几何的形式以函数为中心观念综合起来。

他的改革计划主要是关于教学内容的，虽然一百年过去了，但在我们当前的课程改革进程中，他的很多观点依然能引起我们的共鸣。也许是过于超前，这些



皮亚杰(Jean Piaget,  
1896—1980)

改革建议并没有被当时的普鲁士政府所采纳,但是体现这些改革思想的《近代主义数学教科书》于1915年被日本翻译出版,用作教材。

数学家对数学教育的影响主要体现在教学内容的选取和安排上,心理学家的影响则主要体现在研究方法指导上。不过,像皮亚杰等心理学家对一部分小学数学内容也进行过深入而细致的研究,对这些内容的教学提出了他们的看法。

我们知道,实验心理学要求以数据(证据)为基础得出结论。法国第一个心理实验室的主任 Alfred Binet 曾经提出教育研究有三种主要方法:问卷、观察和实验<sup>[4]</sup>。之后,曾经在 Alfred Binet 实验室工作过的瑞士心理学家皮亚杰曾就儿童的数、度量 and 机会等概念使用他创立的临床法(因该方法与精神病的诊疗过程相似而得名)作过经典的研究。皮亚杰的研究通常是一个研究者和一个儿童坐在一个安静的房间里进行的,桌上摆放着一些研究者事先准备好的材料。首先,研究者给儿童一项认知任务(问题),儿童作出一个回答以后,研究者根据这个回答继续向儿童提出另一个问题,有时只是在同一个背景下改变一下任务,有时则是在一个新的背景下提供一个类似的任务,有时则是追问理由等等,如此继续下去,希望能够比较深入地了解儿童的认知结构和过程。现在我们也常称这样的研究形式为访谈。

我国心理学工作者曹子方曾经运用皮亚杰的方法,对幼儿计数的认知发展做过具体研究(表1-1)<sup>[7]</sup>。结果发现,3~7岁幼儿计数能力的发展顺序是:口头数数,按物点数,说出总数,按数取物。所谓“口头数数”是指幼儿只是像背儿歌似的“唱数”,一般只会从“1”开始,不会倒着数;“按物点数”是指幼儿能够做到口手一致地点数,在这之前,儿童会出现口手点数速度不一致、手无规则地乱点数等现象;“说出总数”自然是按物点数后能够说出所数对象的总数,在这之前,有的儿童会将数到的那个数的下一个数说成是总数,有的则点数完后不管结果,总是报某一个固定的数作为总数;最后“按数取物”是按一定的数目拿出同样多的物体。

表1-1 杭州地区幼儿计数的平均成绩(达到的范围)

儿童年龄	3岁	4岁	5岁	6岁
口头数数	7	22	59	100
按物点数	4	20	50	100
说出总数	3	15	47	100
按数取物	3	9	37	100



数数这么一个每个人都经历过的概念发展过程,在使用科学方法加以研究之后才变得如此清晰。这些结果是我们把自己关在书房里做思辨式的研究所不可能发现的。

这就表明,数学教学需要进行科学的研究,取得深刻的理性认识。只凭自己在中小学的一些经验是远远不够的。我们这里举的例子还只涉及幼儿的数学教育心理,至于中学生的数学教育心理,则更为复杂。许多数学教育的科学问题,包括数学高级思维的心理学研究,还远远没有弄清楚,等待我们年轻的数学教育工作者去研究、开拓。

### 第三节 数学教育研究热点的演变

数学教育研究开展的时间还不长。2000年,在第九届国际数学教育大会(ICME-9)上,Mogens Niss作了题为《数学教育研究的主要问题与趋势》<sup>[8]</sup>的大会报告,他说:“1972年,在第二届国际数学教育大会(ICME-2)上,Geoffrey Howson称数学教育还只是处在形成期,就像一个孩子,一个青少年,但是,现在我们可以称数学教育为年轻人了,可以考虑和探讨数学教育的发展、特点和成就了。”

在报告中,他首先回顾了历史上数学教育研究过的问题和对象。他发现,首先,数学教育研究关注的对象年龄范围在逐渐扩大,从主要关注中学教育到小学和中学以后的教育,到教师教育、学前教育、大学教育,再到研究生教育,研究已经涉及各个年龄层次和群体的数学教育问题。其次,他发现数学教育研究关注的问题范围在拓展。从课程问题(教什么,怎么呈现)到教师教育问题(如何做好教师的职前和在职培训),到学习问题(怎么学,真实的学习过程和学习结果是怎样的,导致错误的因素和机制是什么,概念是如何形成的,如何培养问题解决的良好行为和策略,认知发展的结构和过程是怎样的,学习数学的情感问题,学生对数学的看法等等),到课堂教学问题(课堂上怎么教,师生之间、生生之间如何互相影响和交流),到社会、文化、语言问题(社会经济、科技、政治、文化、性别、宗教、母语、习惯、传统、民族数学、日常数学等方面对数学教育的影响)和评价问题(课堂内外的评价以及应该如何评价),研究涉及的领域相当广泛。如果说得更小更具体一点的话,数学教育研究关注过符号化和形式化、问题解决、应用和建模、证明和论证、各个学习领域(代数、几何、微积分、概率统计)的教与学和各个教育层次(从学前到研究生)的数学教育问题。

接着,他提到了数学教育研究方法的多样性。比如,可以通过说理来阐明