矩阵分析

矫希国　路来君　编著

NEUPRESS
东北大学出版社

矩阵分析

矫希国　路来君　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目(C I P)数据

矩阵分析/矫希国,路来君编著. —沈阳:东北大学出版社,1994.12

ISBN 7-81006-898-9

Ⅰ. 矩…

Ⅱ. ①矫… ②路…

Ⅲ. 矩阵分析

Ⅳ. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 1475 号

东北大学出版社出版

(沈阳·南湖 110006)

沈阳第十印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

1994 年 12 月第 1 版　　1996 年 6 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32　　印张:8

字数:208 千字　　印 数:1～1000 册

定 价:8.80 元

目　　录

第1章　矩阵定义及其运算

在线性代数中，矩阵是非常重要的一个组成部分，尤其是在今天的一些数学分支中的许多问题，用矩阵来处理就显得非常方便而简单。

我们约定，本书中的所有讨论，除了特别说明外，都是在实数域 R 的范围内。

§1·1　矩阵的定义

定义 1·1·1　把 $m\times n$ 个实数列成的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫作一个 $m\times n$ 阶矩阵。一般用大写字母 $A,B,C,\cdots\cdots$ 来表示。横的各行叫作矩阵的行；纵的各列叫作矩阵的列，其中的 a_{ij} 叫作该矩阵的第 i 行第 j 列的元素。这样，上面的矩阵就可记为 $A,A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$。当 $m=n$ 时就简称为 n 阶矩阵，或 n 阶方阵。

如果两个同阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的所有对应位置上的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij},i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$，就说矩阵 A 与矩阵 B 相等，记为 $A=B$。

下面给出矩阵运算的规则。

矩阵加法：设有两个 $m\times n$ 矩阵 A,B，定义矩阵

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

为 A 与 B 之和。

矩阵乘法：设有矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，定义 $m\times p$ 阶矩阵

$$AB=\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}\right)_{m\times p}$$

为 A 与 B 的乘积。

如果 A 为 n 阶方阵，记

$$A^2=AA$$

一般地，记

$$A^m=\overbrace{A\cdots A}^{m\text{个}}$$

数与矩阵相乘：设有矩阵 $A_{m\times n}$ 及实数 β，β 乘 A 定义为

$$\beta A=(\beta a_{ij})_{m\times n}$$

从矩阵的乘法可以看出，当两个矩阵 A 与 B 可乘，即 AB 有意义时，但 BA 不一定有意义；即使 BA 有意义也不一定有 $BA=AB$。

由矩阵的运算定义，可以直接验证下列性质：

交换律： $A+B=B+A$

结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$

$(AB)C=A(BC)$

分配律： $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$(A+B)C=AC+BC$

$C(A+B)=CA+CB$

其中 α，β 为任何实数。

如果一个 n 阶方阵在 (i,j) 位置上的元素为

$$a_{ij}=\delta_{ij}\text{①}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\qquad i,j=1,\cdots,n$$

就称这样的 n 阶方阵为单位矩阵，用 I_n 表示，一般简记为 I。

① δ_{ij} 叫做 Kronecker 符号，i，j 取自然数。

如果一个$m\times n$阶矩阵的所有元素全为0，就称它为零矩阵，记为$\mathbf{0}_{m\times n}$。

对于一个$m\times n$阶矩阵A来说，显然有

$$I_mA=AI_n=A$$

$$A\mathbf{0}_{n\times p}=\mathbf{0}_{m\times p}$$

$$\mathbf{0}_{t\times m}A=\mathbf{0}_{t\times n}$$

若n阶方阵$A=a_{ij}$中的元素满足条件$a_{ij}=0$，当$i\neq j$时，$i,j=1,\cdots,n$，则称A为n阶对角矩阵，简称对角矩阵；

若A中的元素满足条件$a_{ij}=0$，当$i-j>0(i-j<0)$时，$i,j=1,\cdots,n$，则称A为n阶上(下)三角矩阵，简称上(下)三角矩阵；

若A中的元素满足条件$a_{ij}=0$，当$i-j>1(j-i>1)$时，$i,j=1,\cdots,n$，则称A为n阶上(下)Hessenberg三角矩阵，简称为上(下)H矩阵；

若A中的元素满足条件$a_{ij}=a_{ji}\quad i,j=1,\cdots,n$，则称$A$为$n$阶对称矩阵，简称为对称矩阵。

§1·2 分块矩阵

在矩阵计算与应用中，如果把一个矩阵分成一些小块来计算是很方便的，特别是在后面所谓求逆矩阵与行列式的计算上效果更明显。

定义 1·2·1 设有$m\times n$阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

任取A的第$i_1,i_2,\cdots,i_s$行与第$j_1,j_2,\cdots,j_t$列，且$i_1<i_2<\cdots<i_s$，$j_1<j_2<\cdots<j_t$，则称这s行与t列相交处的元素按原来相对位置

排成的小矩阵为 A 的一个 $s\times t$ 阶子块或子阵，记为

$$A=\begin{Bmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_t \end{Bmatrix}$$

这样 A 中的一个元素 a_{ij} 就是一个 1×1 阶子块

$$A\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}$$

而矩阵 A 本身就是 $m\times n$ 阶子块

$$A\begin{Bmatrix} 1 & \cdots & m \\ 1 & \cdots & n \end{Bmatrix}$$

所谓分块矩阵就是把 A 按如下形式分成若干个子块

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 为 $m_i\times n_j$ 阶的子块，且 $\sum\limits_{i=1}^{t}m_i=m$，$\sum\limits_{j=1}^{s}n_j=n$。于是原来的矩阵就可以看成是以这些子块为元素组成的矩阵。这种以子块为元素的矩阵运算和原来矩阵的运算之间有如下关系：

1° 设有两个 $m\times n$ 阶矩阵，将它们按相同方式分块

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{ts} \end{bmatrix}$$

此处 A_{ij} 与 B_{ij} 均为 $m_i\times n_j$ 阶的子块，$\sum\limits_{i=1}^{t}m_i=m$，$\sum\limits_{j=1}^{s}n_j=n$。有

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1}+B_{t1} & A_{t2}+B_{t2} & \cdots & A_{ts}+B_{ts} \end{bmatrix}$$

2° 若 β 为任意一个实数，则

$$\beta A=\begin{bmatrix} \beta A_{11} & \beta A_{12} & \cdots & \beta A_{1s} \\ \beta A_{21} & \beta A_{22} & \cdots & \beta A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta A_{t1} & \beta A_{t2} & \cdots & \beta A_{ts} \end{bmatrix}$$

3° 如果再设 C 为 $n\times p$ 阶矩阵，且分块为

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{ts} \end{bmatrix}$$

其中 C_{ij} 为 $n_i\times p_j$ 阶子块，且 $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i=n,\ \sum\limits_{j=1}^{p} p_j=p$，则

$$D=AC=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{t1} & D_{t2} & \cdots & D_{tp} \end{bmatrix} \tag{1·2·1}$$

其中 D_{ij} 为 $m_i\times p_j$ 阶子块，且 $D_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}, i=1,\cdots,t, j=1,\cdots,t, k=1,\cdots,p$。

这三条性质只要直接计算一下便可知道是正确的。从上面的讨论可以看出，只要对矩阵进行适当的分块，那么就可以把原来的矩阵看成以子块为元素的矩阵，于是可以象普通矩阵一样进行计算。

例 1·2·1 对矩阵 A,B 进行如下分块

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ \hdashline -3 & -1 & 1\end{array}\right]=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 4 & -1 & 0 & 5\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc:c}3 & 1 & 0 & 2\\ \hdashline 0 & 2 & 3 & 4\\ 4 & -1 & 0 & 5\end{array}\right]=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad A_{21}=[-3],$$

$$A_{22}=[-1\ \ 1],\quad B_{11}=[3],\quad B_{12}=[1\ \ 0],$$

$$B_{13}=[2],\quad B_{21}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},\quad B_{22}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$B_{23}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

按公式(1·2·1)得

$$AB=$$

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[3]+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[1\ \ 0]+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[2]+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\\ [-3][3]+[-1\ \ 1]\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} & [-3][1\ \ 0]+[-1\ \ 1]\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix} & [-3][2]+[-1\ \ 1]\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{c:cc:c}7 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 4 & 6 & 8\\ \hdashline -5 & -6 & -3 & -5\end{array}\right]$$

这与不分块时计算结果是一致的。

§1·3 矩阵转置与方阵的迹

我们把互换 $m\times n$ 阶方阵 A 的行与列所得到的 $n\times m$ 阶矩阵叫作矩阵 A 的转置矩阵，记为 A'，即

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这样，当 A 为对称矩阵时有 $A=A'$。

由转置矩阵的定义，读者不难验证，只要矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 可乘，就有

$$[A_1 \quad A_2 \cdots A_k]' = A_k' \cdots A_2' A_1' \qquad (1\cdot3\cdot1)$$

若 $m\times n$ 阶矩阵 A 的列数为 1，即 $n=1$，则 A 为单列矩阵，称之为列向量，一般记为

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

而称列向量的转置为行向量，即

$$a' = [a_1 \quad a_2 \cdots a_m]$$

若 a 的所有元素全为 0，这时称 a 为零向量，记为

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

如果把 $m\times n$ 阶矩阵 A 按行分块，即

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} \qquad a_i' = [a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{in}] \qquad i = 1, \cdots, m$$

而把 $n\times p$ 阶矩阵 B 按列分块为

$$B = [b_1 \quad b_2 \cdots b_p], \quad b_j' = [b_{1j} \quad b_{2j} \cdots b_{nj}] \quad j = 1, \cdots, p$$

则由上节式(1·2·1)有

$$AB=\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \cdots b_p]=\begin{bmatrix} a_1'b_1 & a_1'b_2 & \cdots & a_1'b_p \\ a_2'b_1 & a_2'b_2 & \cdots & a_2'b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m'b_1 & a_m'b_2 & \cdots & a_m'b_p \end{bmatrix} \qquad (1\cdot3\cdot2)$$

同理,若把 A 按列分块,B 按行分块则有

$$AB=[a_1 \quad a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix}=a_1b_1'+a_2b_2'+\cdots+a_nb_n' \qquad (1\cdot3\cdot2)'$$

上面二式的形式在分块矩阵的乘法中是经常用到的。

对 $m\times n$ 阶矩阵 A 分块如下

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{bmatrix}$$

则容易验证

$$A'=\begin{bmatrix} A_{11}' & A_{22}' & \cdots & A_{t1}' \\ A_{12}' & A_{22}' & \cdots & A_{t2}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1s}' & A_{2s}' & \cdots & A_{ts}' \end{bmatrix}$$

定义 1·3·1 设 A 为 n 阶方阵,称 A 的主对角线元素 a_{11}, a_{22},…,a_{nn}之和为 A 的迹。记为

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \quad 或 \quad \mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (1\cdot3\cdot3)$$

并称元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在位置的连线为 A 的主对角线或对角线;而元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$便称为 A 的主对角线元素或对角线元素。

关于求迹运算有下列性质成立:

1° $\mathrm{tr}[a]=a$,$[a]$表示 1×1 阶矩阵,且 a 可取任何实数。

2° 设 A 为 n 阶方阵,则

$$\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\mathrm{tr}(A),\quad \alpha \text{ 为任何实数。}$$

3° 设 A、B 为 n 阶方阵,则

$$\mathrm{tr}(A\pm B)=\mathrm{tr}(A)\pm\mathrm{tr}(B)$$

这条性质可推广到多个矩阵上去。

4° 设 C 为 $m\times n$ 阶矩阵,D 为 $n\times m$ 阶矩阵,则

$$\mathrm{tr}(CD)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}d_{ji}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}d_{lk}c_{kl}=\mathrm{tr}(DC)$$

特别地,取 $D=C'$,则有

$$\mathrm{tr}(CC')=\mathrm{tr}(C'C)=\sum_{i,j=1}c_{ij}^2 \tag{1·3·4}$$

5° 设有 n 阶方阵 A 及 $n\times p$ 阶矩阵 $F=(f_1\ f_2\cdots\ f_p)$,则

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{j=1}^{p}f_j'Af_j\right)=\mathrm{tr}(AFF')$$

证明 性质 1°,2°,3°,4°由定义可直接验证,现只证明 5°。

把每个 $f_j'Af_j(j=1,\cdots,p)$看成为一个一阶方阵,由性质 4°和 3°,有

$$\sum_{j=1}^{p}f_j'Af_j=\sum_{j=1}^{p}\mathrm{tr}(f_j'Af_j)=\sum_{j=1}^{p}\mathrm{tr}(Af_jf_j')$$

$$=\mathrm{tr}\left(\sum_{j=1}^{p}Af_jf_j'\right)=\mathrm{tr}\left(A\sum_{j=1}^{p}f_jAf_j'\right)=\mathrm{tr}(AFF')$$

证毕。

§1·4 逆矩阵与矩阵的初等变换

本节先讨论在矩阵运算中非常重要的一类矩阵,即非奇异矩阵;接着再研究矩阵的初等变换。

定义 1·4·1 设 A 为 n 阶方阵,如果有 n 阶方阵 B 存在,使

$$AB=BA=I_n$$

则说 A 有逆，并称 B 为 A 的逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$。

由定义 1·4·1 不难验证，如果 A 有逆，则 A^{-1}是唯一的。当 A 有逆时就称 A 为非奇异矩阵。否则就说 A 是奇异矩阵。关于非奇异矩阵，有下面两条性质：

1° 若 A 非奇异，则

$$(A^{-1})^{-1}=A,\qquad (A')^{-1}=(A^{-1})'$$

2° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为均为非奇异矩阵，则

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

下面是矩阵的初等变换，它在矩阵应用与行列式计算中都是很重要的。

若把矩阵 $A_{m\times n}$的第 i 行乘以一个实数 $\alpha\neq 0$，相当于用矩阵

$$D_i(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1\end{bmatrix}_{m\times m}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

左乘以 $A_{m\times n}$，称之为对矩阵 A 的行施行倍法变换。并称矩阵$D_i(\alpha)$为倍法矩阵。

若把矩阵 $A_{m\times n}$的第 i 行的 μ 倍加到第 j 行上去，相当于用矩阵

$$E_{ij}=\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \mu & \cdots 1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}_{m\times m}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i\text{ 行} \\ \\ \cdots j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_{ij}=\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1\cdots & \mu & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}_{m\times m}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots j\text{ 行} \\ \\ \cdots i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

左乘以 $A_{m\times n}$，称之为对 $A_{m\times n}$的行施行消法变换。并称矩阵 E_{ij}为消法矩阵。

若互换矩阵 $A_{m\times n}$的第 i 行与第 j 行，则相当于用矩阵

$$C_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1\end{bmatrix}_{m\times m}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \cdots i\text{行}\\ \\ \cdots j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}$$

左乘以 $A_{m\times n}$，称之为对 $A_{m\times n}$的行施行排列变换，并称矩阵 C_{ij}为排列矩阵。而称排列矩阵之积为置换矩阵。

如果要对矩阵 $A_{m\times n}$的列进行上面的三种变换，那么就用相应的 n 阶矩阵 $D_i(\alpha)$，E_{ij}，C_{ij}右乘以 $A_{m\times n}$即可。

上述三种变换都叫作对矩阵 $A_{m\times n}$的初等变换；相应的变换矩阵都是对单位矩阵进行初等变换的结果，并称这三种矩阵 $D_i(\alpha)$，E_{ij}，C_{ij}均为初等矩阵。

不难看出，第三种初等变换能够通过施行若干次第一种与第二种初等变换来完成。又显然，三种初等矩阵均有逆，且其逆就是同种的初等矩阵。倍法矩阵的逆为 $D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$，消法矩阵的逆为 $E_{ij}(-\mu)$，排列矩阵的逆为其本身 C_{ij}。

下面用初等变换来分解矩阵。设有 $m\times n$ 阶矩阵 A，于是可以对 A 的行与列施行若干次初等变换而把它化成

$$D=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}r\\ m-r\end{array}\\ \begin{array}{cc}r & n-r\end{array}\end{array} \qquad (1\cdot 4\cdot 1)$$

现在来证明这个结论。若 A 为零矩阵 $0_{m\times n}$，这时相当于式 $(1\cdot4\cdot1)$中 $r=0$，所以结论成立。

如果 A 的所有元素不全为 0，不妨设 $a_{11}\neq 0$。因若不然，例如 $a_{ij}\neq 0$，那么可先互换 A 的第 1 行与第 i 行，接着再互换 A 的第 1