全国硕士研究生统一考试

历届考题名家解析

刘 斌 编

经济数学三

2004

世界图书出版公司

全国硕士研究生入学统一考试历届考题

名家解析

经济数学三

刘 斌 编

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析.经济数学三/刘斌编.
—西安:世界图书出版西安公司,2003.2
ISBN 7-5062-5325-9

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009148 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析——经济数学三

编　　著　刘　斌
责任编辑　焦毓本
总 策 划　谭隆全
封面设计　东　方

世界图书出版西安公司 出版发行
(西安市南大街 17 号　邮编 710001)
北京建工印刷厂印刷
各地新华书店经销

开本:787×1092(毫米)　1/16　印张:84(总)　字数:2086 千字(总)
2003 年 2 月修订　2003 年 2 月第 1 次印刷
印数:1~3000 册
ISBN 7-5062-5325-9
H·373 共 6 册 定价:102.00 元

出 版 说 明

历届考题就是最好的模拟试题。因为,**历史是一面镜子**。懂得昨天,才会明白今天;掌握了历史和现实,才能驾驭未来。

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活**的特点。首先,汇集了1989~2003年数学,1997~2003年政治理论,1993~2003年英语的历届研究生入学考试试题,包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四,共6册;其次,真正做到了逐题解析,分析详尽,解答规范,特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程,另外针对近几年的考题,做到先是分析——解题的基本思路、方法,然后是详解——详细、规范的答题过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有17年,共命制试卷100余份,数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求,展示出统考以来三门基础课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届,所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上,近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如:**2003年**数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题,**2003年**数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题,**2003年**数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题,**2003年**数学四的第四大题与2001年数学一的第五大题,**2003年**数学一的第十大题与1994年数学三的第九大题,**2003年**数学一的第十一大题与1992年数学三的第十三大题,**2003年**数学二的第七大题与1997年数学二的第八大题,**2003年**数学二的第十一大题与1999年数学四的第九大题,**2003年**数学三的第九大题与2002年数学三的第九大题,**2003年**数学四的第七大题与1998年数学三的第八大题,**2003年**数学四的第十大题与1999年数学三的第九大题;2002年数学一的第一大题第(4)小题与1993年数学一的第七大题,2002年数学一的第五大题与1995年数学三的第六大题,2002年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第十二大题,2002年数学一的第十一大题与1994年数学四第十一大题,2002年数学二第二大题第(2)小题与1999年数学四第二大题第(1)小题,2002年数学二第八大题与1996年数学一第三大题,2002年数学二第十一大题与1997年数学二第三大题,2002年数学三第二大题第(3)小题与2001年数学三第二大题第(4)小题,2002年数学三第十一大题与1999年数学三第

十一大题,2002 年数学三、四第十二大题与 1999 年数学四第二大题第(4)小题,2002 年数学四第六大题与 1999 年数学三、四第二大题第(2)小题,2002 年数学四第七大题与 1995 年数学四第六大题,2002 年数学四第九大题与 1994 年数学二第八大题,2001 年数学一的第一大题第(1)小题与 2000 年数学二第二大题第(5)小题,2001 年数学一的第六大题与 1997 年数学一的第三大题第(2)小题;2001 年数学一的第九大题与 1996 年数学三的第十大题,2001 年数学二的第一大题第(5)小题与 2000 年数学一的第一大题第(4)小题,2001 年数学三、四的第二大题第(1)小题与 1996 年数学一第二大题第(2)小题,2001 年数学三、四第二大题第(3)小题与 1995 年数学一第二大题第(5)小题,2001 年数学一第三大题与 1992 年数学三第四大题,2001 年数学三、四第七大题与 1996 年数学三第六大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在**最近 3 年**的数学考题中就有**多达** 30 **余道题**是与往届考题雷同的。又比如:**2003 年**政治理论第 5 题与 1993 年文科政治第 4 题和 1993 年理科政治第 5 题,**2003 年**政治理论第 7 题与 1998 年理科政治第 4 题,**2003 年**政治理论第 9 题与 1998 年文科政治第 25 题,**2003 年**政治理论第 18 题与 1998 年理科政治第 15 题和 1995 年文科政治第 24 题,**2003 年**政治理论第 19 题与 1997 年文科政治第 13 题,**2003 年**政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题,**2003 年**政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题,**2003 年**政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题等等,都是相同或非常相似的,仅 **2003 年**政治理论试题**就有 8 道考题**与往届考题是雷同的。再如:**2003 年**英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题,**2003 年**英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题,**2003 年**英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题,**2003 年**英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题,**2003 年**英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题,1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题等等,都是非常相似的,另外 **2003 年**英语作文与 2000 年英语作文都是通过两幅图的对比来揭示主题的。仅 **2003 年**英语试题**就有 6 道考题**与往届考题是雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶,具有极高的权威性。

本丛书英语、数学的编者均曾是考研命题组成员,是考研阅卷组的专家,并且一直参与考研阅卷工作。政治理论的六位作者中,有三位曾是教育部原政治理论命题组组长或命题组成员,一位是长期阅卷,并一直担任政治理论阅卷组组长。他们现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以,他们对历届考题的解析的权威性强,可信度高。

由于时间比较仓促,难免还有不当之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

全国硕士研究生入学考试试题研究组

目　次

2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 …………………………… (1)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 ……… (5)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (18)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (21)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (32)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (36)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (48)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (52)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (65)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (69)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (83)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (87)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (96)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (100)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (110)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (114)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (124)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (127)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (136)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (140)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (148)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (151)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 ………………………… (159)

1992 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (163)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 …………………… (172)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (175)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 …………………… (186)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (190)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题 …………………… (198)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题分析、详解及评注 …… (202)

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是 ________.

(2) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

(3) 设 $a>0$, $f(x)=g(x)=\begin{cases} a, 若\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, 其他, \end{cases}$ 而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_{D} f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(4) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$, $a<0$; $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$ ________.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为 ________.

(6) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时, $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ________.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在. (B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在. (D) 有可去间断点 $x=0$.

【 】

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

【　　】

(3) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

【　　】

(4) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$.　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$.　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

【　　】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

【　　】

(6) 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立.

(B) A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立.

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

【　　】

三、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin \pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x \in[\frac{1}{2}, 1)$. 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x, y)=f[x y, \frac{1}{2}(x^2-y^2)]$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2) \mathrm{d} x \mathrm{d} y,$$

其中积分区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant \pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x) g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0, f(x)+g(x)=2 e^x$.

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 试证必存在 $\xi \in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和b满足何种关系时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解,在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3,(b>0),$$

其中二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值之和为1,特征值之积为-12.

(1) 求a,b的值;

(2) 利用正交变换将二次型f化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$F(x)$是X的分布函数,求随机变量$Y=F(X)$的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量X与Y独立,其中X的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

而Y的概率密度为$f(y)$,求随机变量$U=X+Y$的概率密度$g(u)$.

2003年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题分析、详解及评注

一、[解析]

(1) $\underline{\quad \lambda > 2 \quad}$.

[分析] 当 $x \neq 0$ 可直接按公式求导，当 $x = 0$ 时要求用定义求导.

[详解] 当 $\lambda > 1$ 时，有

$$f'(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x} + x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x \neq 0, \\ 0, & 若\ x = 0, \end{cases}$$

显然当 $\lambda > 2$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$，即其导函数在 $x = 0$ 处连续.

[评注] 一般来说，分段函数在分段点的导数应按定义进行计算.

(2) $\underline{\quad 4a^6 \quad}$.

[分析] 曲线在切点的斜率为0，即 $y' = 0$，由此可确定切点的坐标应满足的条件，再根据在切点处纵坐标为零，即可找到 b^2 与 a 的关系.

[详解] 由题设，在切点处有

$$y' = 3x^2 - 3a^2 = 0，有\ x_0^2 = a^2.$$

又在此点 y 坐标为0，于是有

$$0 = x_0^3 - 3a^2x_0 + b = 0,$$

故 $\quad b^2 = x_0^2(3a^2 - x_0^2)^2 = a^2 \cdot 4a^4 = 4a^6.$

[评注] 有关切线问题应注意斜率所满足的条件，同时切点还应满足曲线方程.

(3) $\underline{\quad a^2 \quad}$.

[分析] 本题积分区域为全平面，但只有当 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y - x \leqslant 1$ 时，被积函数才不为零，因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可.

[详解] $I = \iint\limits_{D} f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y-x\leqslant 1}} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= a^2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y = a^2\int_0^1[(x+1)-x]\mathrm{d}x = a^2.$$

[评注] 若被积函数只在某区域内不为零，则二重积分的计算只需在积分区域与被积函

数不为零的区域的公共部分上积分即可.

(4) $\underline{\quad -1 \quad}$.

[分析] 这里 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 n 阶矩阵,而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2a^2$ 为数,直接通过 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可.

[详解] 由题设,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\ &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} - 2a\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{E} + (-1 - 2a + \frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

于是有 $-1 - 2a + \frac{1}{a} = 0$,即 $2a^2 + a - 1 = 0$,解得 $a = \frac{1}{2}, a = -1$. 由于 $a < 0$,故 $a = -1$.

[评注] 本题也可直接求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵:因为

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^2 = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^2 = 2a^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 2a^2(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$$

即 $\quad \boldsymbol{A}[\boldsymbol{A} - (2 - 2a^2)\boldsymbol{E}] = (2a^2 - 1)\boldsymbol{E}$,可见

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2a^2 - 1}[\boldsymbol{A} - (2 - 2a^2)\boldsymbol{E}]$$

由题设有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$,即$\frac{1}{2a^2 - 1}[\boldsymbol{A} - (2 - 2a^2)\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,由此可解得 $a = -1$.

(5) $\underline{\quad 0.9 \quad}$.

[分析] 利用相关系数的计算公式即可.

[详解] 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(Y,Z) &= \mathrm{cov}(Y,X - 0.4) = E[Y(X - 0.4)] - E(Y)E(X - 0.4)\\ &= E(XY) - 0.4E(Y) - E(Y)E(X) + 0.4E(Y)\\ &= E(XY) - E(X)E(Y) = \mathrm{cov}(X,Y),\end{aligned}$$

且 $\quad D(Z) = D(X)$.

于是 $\mathrm{cov}(Y,Z) = \dfrac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho_{XY} = 0.9$.

[评注] 注意以下运算公式:$D(X + a) = D(X)$,$\mathrm{cov}(X,Y + a) = \mathrm{cov}(X,Y)$.

(6) $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

[分析] 本题考查大数定律：一组相互独立且具有有限期望与方差的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，当方差一致有界时，其算术平均值依概率收敛于其数学期望的算术平均值：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)(n\to\infty).$$

[详解] 这里 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 满足大数定律的条件，且 $E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\frac{1}{4}+(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，因此根据大数定律有

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \text{ 依概率收敛于} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2}.$$

[评注] X 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，其数学期望与方差分别为 $E(X)=\frac{1}{\lambda},D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

二、[解析]

(1) 应选(D).

[分析] 由题设，可推出 $f(0)=0$，再利用在点 $x=0$ 处的导数定义进行讨论即可.

[详解] 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，且由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知，$f(0)=0$.

于是有 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在，故 $x=0$ 为可去间断点.

[评注 1] 本题也可用反例排除，例如 $f(x)=x$，则此时 $g(x)=\frac{x}{x}=\begin{cases}1,x\neq 0,\\0,x=0,\end{cases}$ 可排除(A)，(B)，(C) 三项，故应选(D).

[评注 2] 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A\Leftrightarrow f(x_0)=0,f'(x_0)=A$.

(2) 应选(A).

[分析] 可微必有偏导数存在，再根据取极值的必要条件即可得结论.

[详解] 可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，根据取极值的必要条件知 $f'_y(x_0,y_0)=0$，即 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零，故应选(A).

[评注 1] 本题考查了偏导数的定义，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数即 $f'_y(x_0,y_0)$；而 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数即 $f'_x(x_0,y_0)$.

[评注 2] 本题也可用排除法分析，取 $f(x,y)=x^2+y^2$，在(0,0)处可微且取得极小值，并且有 $f(0,y)=y^2$，可排除(B)，(C)，(D)，故正确选项为(A).

(3) 应选(B).

[分析] 根据绝对收敛与条件收敛的关系以及收敛级数的运算性质即可找出答案.

[详解] 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，当然也有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，再根据 $p_n = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}$ 及收敛级数的运算性质知，$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛，故应选(B).

[评注] 无穷级数的敛散性判断是常考题型，除了要求熟练掌握正项级数、交错级数和一般项级数的敛散性判定外，也不应忽视对运算性质的把握.

(4) 应选(C).

[分析] $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵的秩为 1，说明 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，由此可确定 a,b 应满足的条件.

[详解] 根据 $\mathbf{A}$ 与其伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 秩之间的关系知，秩$(\mathbf{A}) = 2$，故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0，即有 a + 2b = 0 或 a = b.$$

但当 $a = b$ 时，显然秩$(\mathbf{A}) \neq 2$，故必有 $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. 应选(C).

[评注] $n(n \geqslant 2)$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 与其伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的秩之间有下列关系：

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, r(\mathbf{A}) = n, \\ 1, r(\mathbf{A}) = n-1, \\ 0, r(\mathbf{A}) < n-1. \end{cases}$$

(5) 应选(B).

[分析] 本题涉及到线性相关、线性无关概念的理解，以及线性相关、线性无关的等价表现形式. 应注意是寻找不正确的命题.

[详解](A)：若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性无关，因为若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$，矛盾. 可见(A) 成立.

(B)：若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组，而不是对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$. 因此(B) 不成立.

(C)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则此向量组的秩为 s；反过来，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 s，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，因此(C) 成立.

(D)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其任一部分组线性无关，当然其中任意两个向量线性无关，可见(D) 也成立.

综上所述，应选(B).

[评注] 原命题与其逆否命题是等价的. 例如，原命题：若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2,$

$\cdots, k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 成立,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.其逆否命题为:若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.在平时的学习过程中,应经常注意这种原命题与其逆否命题的等价性.

(6) 应选(C).

[分析] 按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可,注意应先检查两两独立,若成立,再检验是否相互独立.

[详解] 因为

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{1}{2}, P(A_4) = \frac{1}{4},$$

且 $P(A_1A_2) = \frac{1}{4}, P(A_1A_3) = \frac{1}{4}, P(A_2A_3) = \frac{1}{4}, P(A_2A_4) = \frac{1}{4} P(A_1A_2A_3) = 0,$

可见有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3), P(A_2A_4) \neq P(A_2)P(A_4).$$

故 A_1, A_2, A_3 两两独立但不相互独立;A_2, A_3, A_4 不两两独立更不相互独立,应选(C).

[评注] 本题严格地说应假定硬币是均匀的,否则结论不一定成立.

三、**[解析]**

[分析] 只需求出极限 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,然后定义 $f(1)$ 为此极限值即可.

[详解] 因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{(1-x)\sin \pi x} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \to 1^-} \frac{-\pi - \pi\cos \pi x}{-\sin \pi x + (1-x)\pi\cos \pi x} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi^2 \sin \pi x}{-\pi\cos \pi x - \pi\cos \pi x - (1-x)\pi^2 \sin \pi x} \\
&= \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在$[\frac{1}{2}, 1)$ 上连续,因此定义

$$f(1) = \frac{1}{\pi},$$

使 $f(x)$ 在$[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

[评注] 本题实质上是一求极限问题,但以这种形式表现出来,还考查了连续的概念.在计算过程中,也可先作变量代换 $y = 1 - x$,转化为求 $y \to 0^+$ 的极限,可以适当简化.

四、[解析]

[分析]本题是典型的复合函数求偏导问题：$g = f(u,v)$，$u = xy$，$v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$，直接利用复合函数求偏导公式即可，注意利用$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

[详解] $\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$$= x^2 + y^2.$$

五、[解析]

[分析]从被积函数与积分区域可以看出，应该利用极坐标进行计算.

[详解]作极坐标变换：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，有

$$I = e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= e^{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}} re^{-r^2}\sin r^2 dr.$$

令 $t = r^2$，则

$$I = \pi e^{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt.$$

记 $A = \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt$，则

$$A = -\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t de^{-t}.$$

$$= -\left[e^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t dt\right]$$

$$= -\int_0^{\pi}\cos t de^{-t}$$

$$= -\left[e^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt\right] = e^{-\pi} + 1 - A.$$

因此 $A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$，

$$I = \frac{\pi e^{\pi}}{2}(1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2}(1 + e^{\pi}).$$