快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

高等数学
学习指导

主　编　张丽娟　赵春燕　杨春玲

- 课后习题 精析 精解
- 同步训练 勤学 勤练

XUEXI
ZHIDAO

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导

KUAILE DABEN

YOUXIUJIAOCAIFUDAO

高等数学学习指导

主　编　张丽娟　赵春燕　杨春玲

副主编　姚　君　王　葳　张亚平

主　审　母丽华

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书可供在校非数学类大学生学习“高等数学”课程使用。全书体例简明，总结精练，能够满足广大学生课堂教学使用要求，同时也可供参加硕士研究生考试的广大考生复习之用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/张丽娟，赵春燕，杨春玲主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2008.3
ISBN 978-7-81133-269-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②赵…③杨　Ⅲ.①数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.TH111

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 078235 号

出版发行　哈尔滨工程大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码　150001
发行电话　0451 - 82519328
传　　真　0451 - 82519699
经　　销　新华书店
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　14.75
字　　数　305 千字
版　　次　2008 年 9 月第 1 版
印　　次　2008 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　28.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

高等数学是我院工科与管理专业的一门重要基础课，它是为培养我国现代化建设所需要的高质量专门人才服务的。通过本课程的学习，使学生获得微积分(包括一元微积分、向量代数、空间解析几何、多元微积分、无穷级数、常微分方程等)方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，在传授知识的同时，要通过各个教学环节逐步培养学生具有抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力，提高学生的科学素养。

本书按照同济大学数学教研室所编的《微积分》(第二版)的章节顺序，共九章，每章分为三个部分：

(1)**本章知识点**　对每章的内容做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点和难点，从释疑解难入手，分析概念，克服难点。

(2)**典型例题分析**　通过典型例题介绍解题方法，注重分析和一解多解，使读者在巩固基本概念的基础上掌握高等数学解题方法和技巧。

(3)**模拟检测题**　精心设计基础知识模拟检测题，力求通过练习使读者掌握考点。

书后附有模拟检测题答案与提示，对模拟检测题进行了简答。(附在后面)。

本书第一章由王葳编写，第二、四章由赵春燕编写，第三章由姚君编写，第五、六章由杨春玲编写，第七、八章由张丽娟编写，第九章由张亚平编写；全书由张丽娟统稿，母丽华审稿。

本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导书，也可作为研究生入学考试的参考资料。

限于编者水平及撰稿时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以便修改。

编　者
2008 年 2 月

目　　录

第一章　极限与连续

一、本章知识要点

(一)基础知识脉络

- 极限与连续
  - 极限定义
    - 数列极限(ε—N 定义)
    - 函数极限(ε—δ 定义,ε—X 定义
  - 极限存在准则
    - 单调有界准则
    - 夹逼准则
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$
  - 无穷小或无穷大
    - 定义、性质
    - 阶的比较
  - 连续
    - 连续的定义
    - 间断点的分类
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性定理
      - 最大、最小值定理
      - 介值定理

(二)基本要求

1. 理解极限的概念(对此不作过高要求),掌握极限四则运算法则;
2. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限;
3. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限;
4. 理解函数在一点连续的概念,了解间断点的概念,并会判别其间断的类型;
5. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

(三)重点与难点

重点:极限概念、求极限的方法、两个重要极限,函数连续的定义、间断点的分类、连续函数的性质.

难点:极限概念和极限存在的充要条件,求极限的方法;综合题中运用极限和闭区间连续函数的性质.

(四)重要知识点

1. 极限定义

(1)数列极限(ε—N 语言)

设 $a\in R$,若$\forall$(对任意的)$\cup(a,\varepsilon)$,$\exists$(存在)$N\in N^{*}$,当 $n>N$ 时,总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于 a,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

若这样的常数 a 不存在,就说数列没有极限,或称数列发散.

(2)函数在有限点处的极限($\varepsilon-\delta$ 语言)

设 $f(x)$在区间 I 上有定义,$A\in R$,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

(3)函数在无穷大处的极限($\varepsilon-X$ 语言)

设 $f(x)$在区间 I 上有定义,$A\in R$,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

(4)左极限,右极限

若将定义(2)中 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0(x_0<x<x_0+\delta)$,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左(右)极限,记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,$$

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

2. 无穷小、无穷大、无穷小的性质

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $x\to x_0(x\to\infty)$时,函数 $f(x)$是无穷小.

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$,则称 $x\to x_0(x\to\infty)$时,函数 $f(x)$是无穷大.

对于数列情形可用类似的方法定义无穷小或无穷大.

(3)有限个无穷小的和仍为无穷小.

(4)有限个无穷小的积仍为无穷小.

(5)有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

(6)在自变量同一变化过程,无穷小的倒数为无穷大.反之无穷大的倒数为无穷小.

注意 无穷个无穷小的和不一定为无穷小.

例如 $\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2},\cdots,\frac{n}{n^2}$均为当 $n\to\infty$时的无穷小,而

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots,+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

3. 极限的性质及运算法则

(1)极限唯一性 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$)存在,那么极限唯一.

(2)局部有界性.

①如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,那么在$\bigcup(x_0,\delta)$内,函数 $f(x)$有界.

②如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,那么必存在 $X>0$,使得 $f(x)$在无穷区间$(X,+\infty)$和$(-\infty,-X)$内均是有界的.

③收敛数列必有界.

注意

1. 有界是数列收敛的必要条件,非充分条件.例如,数列 $x_n=(-1)^{n+1}$是有界的,但当 $n\to\infty$时它没有极限.

2. 数列无界,并不意味它趋向无穷大,例如数列$(2^{(-1)^n})_{n=1}^{\infty}$,即$\frac{1}{2},2^2,\frac{1}{2^3},2^4,\cdots,\frac{1}{2^{2n-1}},2^{2n}$,

…，其奇数项与 0 任意接近，而偶数项却无限远离原点，这个数列是无界的，但不是无穷大.

(3)局部保号性　若 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant 0$(或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant 0$)；反过来，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$(或 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x)<0$)，则一定存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

此性质对数列仍然成立.

(4)函数极限的归并性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在 $f(x)$ 的定义域中必存在一个收敛的数列，满足 $X_n\neq X_0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=x_0$ 使得此数列相对应下函数值数列 $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(收敛数列的归并性)如果数列收敛，那么它的子数列也收敛并且收敛于同一值.

(5)极限与无穷小的关系　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是指在同一极限过程下的无穷小.

(6)极限存在的充要条件是左右极限存在且相等.

即 $$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

(7)设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，则 $\lambda f(x)\pm\mu g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限均存在并且分别等于 $\lambda A\pm\mu B$，AB，$\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

4. 极限存在准则及两个重要极限

(1)夹逼准则　若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，且 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

或若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

(2)单调有界准则　单调有界数列必有极限.

(3)重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$(或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$).

5. 无穷小的比较及等价无穷小的代换

(1)设变量 α 与 β 都是在同一自变量变化过程中的无穷小，而 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限，如果

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低价的无穷小；

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是 α 的同阶无穷小；

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 比 α 的等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\alpha|}{|x|^k}=c(c\neq 0)$，则称当 $x\to 0$ 时，α 是 x 的 k 阶无穷小.

(2)等价无穷小代换定理　若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注意 上述极限均为同一极限过程.

(3)当 $x\to 0$ 时常用代换的等价无穷小：

$\sin x\sim x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$a^x-1\sim x\ln a$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

注意 一般来说，在利用等价无穷小代换作简化运算时，在乘积、商的形式中可以互相代替；若分子或分母为代数和，可将代数和作为整体进行代换，不可以分别代换.

6. 连续性的定义

(1)函数在某点连续定义的几种描述

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义

①若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

②若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

③若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 x_0 处右连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 x_0 处左连续.

$f(x)$在 x_0 处连续的充要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)函数在区间上连续

若函数 $f(x)$在某区间上每一点连续(如果这个区间有端点，在左端点右连续，在右端点左连续)，则称函数 $f(x)$在该区间上连续.

7. 间断点定义及分类

(1)函数在 $x=x_0$ 处间断的几种情形

①函数在 $x=x_0$ 处无定义.

②函数在 $x=x_0$ 处极限不存在，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0}\neq f(x_0)$.

上述几种情形皆为在 $x=x_0$ 处间断.

(2)间断点的分类

①若 x_0 是 $f(x)$的间断点，且 $f(x_0^-)$与 $f(x_0^+)$都存在，则称 x_0 为函数的第一类间断点.

②非第一类间断点的间断点，称为第二类间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个不存在.

$$\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点} & \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{存在}\begin{cases}f(x_0)\text{无定义}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0),\end{cases}\\ \text{跳跃间断点} & \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x),\end{cases}$$

$$\text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷间断点} & \text{如 } y=\dfrac{1}{x-1}\text{在 } x=1\text{ 处}\\ \text{振荡间断点} & \text{如 } y=\cos\dfrac{1}{x}\text{在 } x=0\text{ 处},\\ \text{其他间断点.}\end{cases}$$

8. 连续函数的性质与初等函数的连续性

(1)有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数.

(2)单值单调连续函数的反函数在其对应区间上也为单值单调的连续函数.

(3)连续函数的复合函数仍为连续函数.

(4)基本初等函数及一切初等函数在其定义区间上连续.

9. 闭区间上连续函数的性质

(1)有界性定理　若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2)最大值最小值定理　在闭区间上连续函数一定有最大最小值.

(3)零点定理　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,其中 ξ 满足 $a<\xi<b$.

(4)介值定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=C$.

(五)释疑解难

问题 1.1　怎样证明数列发散?

答　证明数列$\{x_n\}$发散的常用方法有二:

(1)找出$\{x_n\}$的两个有不同极限的子列;

(2)找出$\{x_n\}$的一个发散子列.

例如:数列$\{x_n\}=\{3^{n(-1)^n}\}$是发散的,这是因为子列 $x_{2k}=3^{2k}\to\infty(k\to\infty)$,$x_{2k}$为发散数列;

数列$\{x_n\}=\left\{\cos\dfrac{n}{4}\pi\right\}$是发散的,这是因为子列 $x_{8k}=\cos 2k\pi=1\to 1\quad(k\to\infty)$,而子列 $x_{8k+2}=\cos\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi=0\to 0$.

问题 1.2　下面的极限运算是否正确?

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$$

答　不正确,虽然结果正确,但是表达式是错误的.

因为$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,由无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小,所以$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

问题 1.3　如何求形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的幂指函数的极限?

答　求解幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}\quad(u(x)>0$,且 $u(x)\neq 1)$的极限时,先要将函数变形,利用等式 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$将函数转换为指数函数,如果极限 $\lim v(x)\ln u(x)$存在,由指数函数的连续性,可知 $\lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}$. 如果 $\lim u(x)=a>0$,$\lim v(x)=b$,则有 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b=[\lim u(x)]^{\lim v(x)}$.

问题 1.4　以下关于无穷小量的命题是否正确?

(1)无穷小量就是绝对值很小的数.

(2)数零是无穷小量.

(3)x^3 为无穷小量.

答　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$是 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小量. 非零常数(即使其绝对值很小)在自变量的任何变化趋势下,都不以 0 为极限。因此,绝对值多么小的非零常数都不

是无穷小量，故命题(1)不正确.

数零在自变量的任何变化趋势下都以零为极限，故 $y=0$ 是自变量的任一变化趋势下的无穷小量，故命题(2)正确.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} x^3=\begin{cases}0 & x_0=0\\ 0 & x_0\neq 0,\end{cases}$ 所以当 $x_0=0$ 时，x^3 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量；当 $x_0\neq 0$ 时，x^3 不是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 不能脱离自变量的变化过程来谈某变量为无穷小量或无穷大量，故命题(3)不正确.

问题 1.5　讨论函数极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？

答　若 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 的两侧变化趋势一致，就不必要考虑左、右极限；若两侧变化趋势可能有差别，则应分别讨论左、右极限。例如求分段函数在分段点处的极限时，必须讨论左、右极限；有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样，例如 $\tan x$ 在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时左、右极限不一样；有些指数函数、反三角函数也有类似情况，例如 $e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的左、右极限都不一样.

问题 1.6　讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0,\\ x-1 & x<0\end{cases}$ 的连续性，下面的解题过程是否正确？

因为函数 $y=x+1$ 和 $y=x-1$ 是初等函数，故 $y=x+1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内连续，$y=x-1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内连续，$f(x)$ 在 R 上连续.

答　显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，错误在于 $y=x+1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 点的连续性是指右连续，因此也只能推得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是右连续的. 但是 $x=0$ 是 $f(x)$ 的定义域内部的点，所以应该考虑函数在该点处是否是既是左连续，又是右连续，从而推得函数在该点处是否连续.

显然，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1\neq 1=f(0)$

所以函数在 $x=0$ 处并非左连续，即函数在 $x=0$ 处不连续. 在讨论分段函数的连续性时，在函数的分段点处一定要分别讨论函数在这些点处的左右连续性.

二、典型题例分析

例 1.1　设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 2 & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$

分析　这是两个分段函数的复合，其中的关键是确定中间变量的值域.

解　因为 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |g(x)|\leqslant 1\\ 0 & |g(x)|>1\end{cases}$，所以，关键问题是找出使 $|g(x)|\leqslant 1$ 或 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围.

因为 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，所以只有在 $|x|\leqslant 2$ 时，才有可能使 $|g(x)|\leqslant 1$，要 $|g(x)|\leqslant 1$，即 $|2-x^2|\leqslant 1$，解得 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$.

当 $|x|<1$ 或 $\sqrt{3}<|x|\leqslant 2$ 时，有 $|2-x^2|>1$

所以　$f[g(x)]=\begin{cases}1 & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0 & |x|<1\text{ 或 }|x|>\sqrt{3}\end{cases}$

例 1.2　(1998，Ⅰ)　设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析　解出 $\varphi(x)$ 然后确定其定义域.

解　$f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$

又因为　$f[\varphi(x)]=1-x$，所以 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$

所以　$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$　由 $\varphi(x)\geqslant 0$ 可得

$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$

即　　$\{x|x\leqslant 0\}$ 或 $(-\infty,0]$.

例 1.3　用"$\varepsilon-N$"的方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

证明　$\forall\varepsilon>0$，要找 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}<\varepsilon$$

事实上只需 $\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdots\frac{n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{-1}}{n^{n-1}}=\frac{1}{n}<\varepsilon$

即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，只需取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，则当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\varepsilon\text{，即}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

例 1.4　证明函数 $f(x)=x\sin x$ 当 $x\to+\infty$ 时，无极限也非无穷大.

证明　取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x_n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$

又取 $x_n=2n\pi$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x_n\to+\infty}f(x_n)=0$

由此可知，$f(x)$ 无极限也非无穷大.

例 1.5　设 $a>0,a_1>0,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n}),(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，　(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明　(1)由于 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}>0$.

$\Rightarrow a_n\geqslant\sqrt{a}$　$(n\geqslant 2)$，所以 $\{a_n\}$ 有下界.

又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})-a_n=\frac{a-a_2^2}{2a_n}\leqslant 0$.

即 $\{a_n\}$ 单调下降；

故由单调有界数列必有极限知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$，则有 $\beta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{a}{\beta})$

解得　$\beta=\sqrt{a}$　(由于 $a>0$，负值舍去)，故

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

例 1.6 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n!)}}$

解 $0\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n!)}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2n\cdot(2n-1)\cdots(n+1)n\cdot(n-1)\cdots1}}<\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\dfrac{1}{n}$

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n!)}}=0.$

例 1.7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})$

解 因为 $x\neq0$ 时，$\left|\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})\right|\leqslant x^2\sin\dfrac{1}{x}\leqslant x^2$

则 $0\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})\right|\leqslant|x|$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{1}{x}\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})\right|=0.$

例 1.8 （1998，Ⅰ） 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

例 1.9 （1997，Ⅰ） 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{3\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}}$

$$=\frac{3+0}{2\cdot1}=\frac{3}{2}.$$

例 1.10 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$ (2) （1995，Ⅰ） $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

(3) （1996，Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(2\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $t\to0$

原式$=\lim\limits_{t\to0}(\cos t)^{\frac{1}{t}}(1+2\sin t)^{\frac{1}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{t}}[(1+2\sin t)^{\frac{1}{2\sin t}}]^{\frac{2\sin t}{t}}$

$=e^2$.

(2)　原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}$

$=e^6$.

(3)　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\frac{3}{x})\cdot\frac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})}{\ln(1+\frac{3}{x})}-\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\cdot\frac{\sin\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\frac{3}{x})-\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})$

$=3-1=2$.

例 1.11　求极限

(1)　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$　　(2)　(2000，Ⅰ)$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]$

解　(1)　由于$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$

则当$x\to 1$时函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限不存在但不为$\infty$.

(2)　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{1+e^{-\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right]=0+1=1.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{2+0}{1+0}-1=1.$

故　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1.$

例 1.12　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})$

解　令　$\frac{1}{x}=t$.　则$t\to 0$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-\sin t\cos t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$.

例 1.13　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$　($p>,q>0,p,q$ 为常数).

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+p^2}-p)(\sqrt{x^2+p^2}+p)(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{(\sqrt{x^2+q^2}-q)(\sqrt{x^2+q^2}+q)(\sqrt{x^2+p^2}+p)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{x^2(\sqrt{x^2+p^2}+p)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q)}{\sqrt{x^2+p^2}+p)}=\frac{q}{p}$$

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4-\frac{3}{x^2})^3(3-\frac{2}{x})^4}{(6+\frac{7}{x^2})^5}=\dfrac{4^3\cdot 3^4}{6^5}=\dfrac{2}{3}$

例 1.15 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\sin x-x}=1.$

例 1.16 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{x}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}(1+x)=\dfrac{1}{2}$

例 1.17 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{x^2})^{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}}=\dfrac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$

例 1.18 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a,b 之值.

解 当 $x\to 2$ 时，$x^2-x-2\to 0$，且分式极限存在，所以分子的极限必为 0，即$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$

由此得 $4+2a+b=0$ 即 $b=-2a-4$.

所以 $x^2+ax+b=x^2+ax-2a-4=(x-2)(x+a+2)$

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+a+2}{x+1}=\dfrac{a+4}{3}=2$

即 $a=2$，从而 $b=-8$.

例 1.19 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\text{，问 } a \text{ 为何值时，}\lim\limits_{x\to 0}f(x)\text{存在？}\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$

解 由于$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$

所以当 $a=1$ 时，即$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.

例 1.20 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$

例 1.21　讨论下列函数的连续性，指出其间断点，再说明其类型．

(1)　$y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$　(2)　$y=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$　(3)　(1998，Ⅱ)　$y=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}},x\in(0,2\pi)$

解　(1)　在 $x=0,x=1$ 处函数无定义，故 $x=0,x=1$ 为函数的间断点．

由于 $x\to0$ 时　$\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}\to\infty$　，∴　$x=0$ 为第二类间断点．

而 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2}$

∴　$x=1$ 为第一类可去间断点．

(2)　$x=1$ 为函数的间断点

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$

∴　$x=1$ 为第一类跳跃间断点．

(3)　先求函数 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,2\pi)$ 内的零点和间断点，其零点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$；无穷间断点为 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$，它们皆是 $f(x)$ 的间断点，即 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处，$f(\frac{\pi}{4}+0)=+\infty$，$x=\frac{\pi}{4}$ 为第二类无穷间断点．

在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 处，$f(\frac{5\pi}{4}+0)=+\infty$，故 $x=\frac{5\pi}{4}$ 也为第二类无穷间断点．

在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\frac{3\pi}{4}$ 为第一类可去间断点．

在 $x=\frac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\frac{7\pi}{4}$ 为第一类可去间断点．

例 1.22　设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant1\\ 2-x & x>1\end{cases}$，和 $g(x)=\begin{cases}x & x\leqslant1\\ x+4 & x>1\end{cases}$，讨论 $f[g(x)]$ 的连续性．

解　$x\leqslant1$ 时　$g(x)\leqslant1$，　$x>1$ 时　$g(x)>1$，

所以　$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x) & g(x)\leqslant1,\\ 2-g(x) & g(x)>1\end{cases}$

$=\begin{cases}x^2 & x\leqslant1,\\ -2-x & x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^+}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to1^+}(-2-x)=-3$

$\lim\limits_{x\to1^-}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1.$　∴　$x=1$ 为第一类跳跃间断点．