

体育运动学校教材

数学

(第二册)

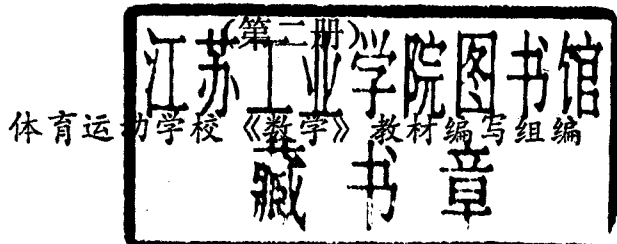
体育运动学校《数学》教材编写组编



人民体育出版社

体育运动学校教材

数 学



人民体育出版社

(京)新登字040号

体育运动学校教材

数 学

(第二册)

体育运动学校《数学》教材编写组编

人民体育出版社 出版

中国铁道出版社印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行

*

787×1092毫米 32开本 6.75印张 120千字

1987年6月第1版

1992年6月第2版 1992年6月第6次印刷

印数: 63,551—78,850册

*

ISBN7-5009-0737-0/G·706 (课) 定价: 1.80元

前 言

这套教材是为适应体育、教育事业的发展,进一步提高体育运动学校教学质量,培养德、智、体全面发展的优秀体育运动后备人才和合格的中等体育专业人员的需要,遵照1990年全国职业技术教育工作会议和全国体育运动学校工作会议精神,根据国家体委制定的《三年制中等体育专业教学计划》和《体育运动学校数学教学大纲》,从中等体育专业的需要和学校的实际出发,在综合1987年出版的4本试用教材使用意见的基础上,进一步修订而成的。

这套教材共分三册,第一册包括统计初步及其应用、对数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、两角和与差的三角函数,供一年级使用(每周4课时);第二册包括数列、排列、组合、二项式定理、概率初步、复数、直线、圆锥曲线,供二年级使用(每周4课时);第三册包括直线和平面、多面体与旋转体,供三年级上学期使用(每周2课时)。另外,为了加强课堂练习,每册教材配备了一本课堂练习册,供学生课堂练习用,教材中的习题供课外作业用。

这套教材供三年制体育运动学校学生使用,也适用于其它中等体育专业学校。

这套教材由国家体委群体司组织的体育运动学校《数学》教材编写组集体编写。参加编写的有(按姓氏笔画排列):吉林省体育运动学校杨福山、北京市体育运动学校胡晓东、江苏省体育运动学校赵兆芳、湖北省体育运动学校曾庆同、南京市体育运动学校蒋浩。最后由高级讲师蒋浩串编,并经国

家教委聘任的全国中等专业学校《数学》课程组组长、高级讲师张又昌审阅定稿。

这套教材的编写修订工作得到了体育运动学校和其它使用单位的关心和支持，在此表示谢意。

由于编者水平所限，教材中难免有不妥之处，恳请大家在教学实践中提出意见，以便充实完善。

体育运动学校《数学》教材编写组

1991年5月

目 录

第六章 数列	1
第七章 排列, 组合, 二项式定理	25
一 排列与组合	25
二 二项式定理	48
第八章 概率初步	58
第九章 复数	88
一 复数的概念	88
二 复数的运算	95
三 复数的三角形式	102
第十章 直线	112
一 有向线段、线段的定比分点	112
二 直线的方程	125
三 两条直线的位置关系	140
第十一章 圆锥曲线	157
一 曲线和方程	157
二 圆	166
三 椭圆	174
四 双曲线	186
五 抛物线	198

第六章 数 列

6.1 数列的基本知识

我们看下面的例子：

(1) 工厂里常把一些圆柱形的零件叠成如图6-1那样，共有5层，这叠零件自下而上各层的只数组成一列数：

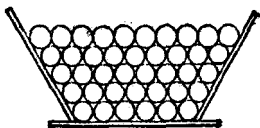


图 6-1

6, 7, 8, 9, 10;

(2) 自然数1, 2, 3, 4, 5, ..., n 的倒数排列成一列数：

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n};$

(3) $\frac{1}{2}$ 的1次幂，2次幂，3次幂，……10次幂组成的数列：

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{10}};$

(4) $\sqrt{2}$ 的精确到1, 0.1, 0.01, 0.001, ……的不足近似值排列成一列数：

1, 1.4, 1.41, 1.414, ……;

(5) -1 的1次幂, 2次幂, 3次幂, 4次幂, ……排列成一系列数:

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots;$$

(6) 无穷多个1排列成一系列数:

$$1, 1, 1, 1, \dots.$$

象上面的例子中, 按一定次序排列着的一列数叫做数列。数列中的每一个数都叫做这个数列的项。各项依次叫做这个数列的第1项(或首项), 第二项, ……第 n 项, ……对于上面的数列(1), 每一项与它的项序号的对应关系为

项	6	7	8	9	10
	↑	↑	↑	↑	↑
项序号	1	2	3	4	5

数列(3), 每一项与它的项序号的对应关系为

项	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\dots\dots\frac{1}{2^k}\dots\dots$
	↑	↑	↑	↑	↑
项序号	1	2	3	4	$\dots\dots k \dots\dots$

从上可见: 数列中有一个项序号就有唯一的项和它对应, 根据函数定义可知, 数列是以项序号 n 为自变量的函数记作 $f(n)$, $n \in N$ (自然数集), 它的定义域为 N 或 N 的子集。

为了明确地表示数列中函数关系, 数列的一般形式常写为: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

其中 a_n 是数列的第 n 项。有时也把上述数列的一般形式简写为 $\{a_n\}$ 。例如, 把数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 简写为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 。

如果一个数列的通项公式 a_n 可以用一个式子来表示, 这个式子就叫做数列的通项公式。例如, 数列(1)的通项公

式 $a_n = n + 5 (n \leq 5)$; 数列 (2) 的通项公式 $a_n = \frac{1}{n}$; 数列

(3) 的通项公式 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

如果已知数列的通项公式, 那么只要依次用项序号 1, 2, 3, ... 代替了式中的 n , 就可以得出数列的各项. 例如, 已知数列的通项公式 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \leq 6)$, 依次用 $n=1$,

$n=2, \dots, n=6$ 代入通项公式内, 得到数列 $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4},$

$\frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 7}$.

数列可以用图形来表示. 在画图时, 为方便起见, 在平面直角坐标系两条坐标轴上取的单位长度可以不同. 图 6-2 (1)、(2) 分别是数列 (1), (2) 的图形表示. 从图上

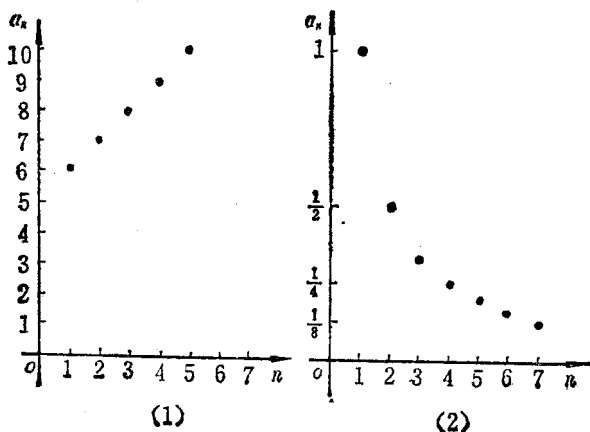


图 6-2

看，数列可用一群孤立的点表示。

项数有限的数列叫做**有穷数列**；项数无限的数列叫做**无穷数列**。上面的数列(1)、(2)是有穷数列，数列(3)、(4)、(5)都是无穷数列。

例1 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前5项。

$$(1) a_n = \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = (-1)^n \cdot n.$$

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$ ，得到数列 $\{a_n\}$ 的前5项为

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}.$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$ ，得到数列 $\{a_n\}$ 的前5项为

$$-1, 2, -3, 4, -5.$$

例2 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

$$(1) 1, 3, 5, 7;$$

$$(2) \frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5};$$

$$(3) -\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, -\frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}.$$

解：(1) 数列的前4项1, 3, 5, 7都是序号的2倍减去1，所以通项公式是 $a_n = 2n - 1$ ；

$$(2) \text{数列的前4项 } \frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$$

的分母都是序号加上1，分子都是分母的平方减去1，所以通项公式是

$$a_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项 $-\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, -\frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}$ 的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数, 且奇数项为负, 偶数项为正, 所以通项公式是

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

练习 1

6.2 等差数列

如上册所提到的圆柱形零件叠成的各层的零件只数所组成的数列:

$$6, 7, 8, 9, 10; \quad (1)$$

从小到大排列的正偶数数列:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots; \quad (2)$$

以及数列:

$$7 \quad 4 \quad 1 \quad -2 \quad -5, \dots. \quad (3)$$

等, 它们都有一个共同特点, 就是从第 2 项起, 每一项减去它前面一项所得的差都等于同一常数. 在数列(1)、(2)和(3)里, 这个常数分别是 1, 2 和 -3.

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项减去它前面一项所得的差都等于同一个常数, 那么这个数列叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差. 公差通常用字母 d 表示. 如上面的等差数列(1)、(2)和(3), 分别有 $d=1$ 、 $d=2$ 和 $d=-3$.

各项都相等的数列 $a, a, a, \dots$ 也可以看作一个公差等于

0 的等差数列。

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

是等差数列，它的公差是 d ，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

.....

.....

由此可知，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是：

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2.$$

即 $a_n = 2n - 1$.

例1 求等差数列 8, 5, 2, 的第 20 项。

解： $\because a_1 = 8, d = 5 - 8 = -3, n = 20,$

$$\therefore a_{20} = 8 + (20-1) \times (-3) = -49.$$

例2 等差数列 -5, -9, -13, 的第几项是 -401?

解： $a_1 = -5, d = -9 - (-5) = -4, a_n = -401.$

因此， $-401 = -5 + (n-1) \times (-4),$

解得

$$n = 100.$$

答：这个数列的第 100 项是 -401。

例3 已知等差数列的第 3 项是 4，第 7 项是 -8，求这个数列的第 12 项。

解：要求这个数列的第 12 项，应当先求出它的第 1 项 a_1

和公差 d .

由 $a_3=4$, $a_7=-8$, 可以列出方程组:

$$\begin{cases} a_1 + (3-1)d = 4 \\ a_1 + (7-1)d = -8. \end{cases}$$

解得

$$d = -3, a_1 = 10.$$

$$\therefore a_{12} = 10 + (12-1) \times (-3) = -23.$$

例4 在4和6中间插入3个数, 使它们和这两个数成等差数列.

解: 插入3个数后, 4是这个数列的第1项, 6就成为第5项. 因此

$$6 = 4 + (5-1)d$$

解得

$$d = \frac{1}{2}$$

因此,

$$a_2 = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2},$$

$$a_3 = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5,$$

$$a_4 = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

所以, 插入的三个数是 $4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}$.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A , 使 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项, 那么 $A-a=b-A$, 所以

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

例如，数-5和4的等差中项为 $A = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$ 。又如

$$a \text{ 和 } -a \text{ 的等差中项 } A = \frac{a+(-a)}{2} = 0.$$

练习2

下面通过具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法。

为了快速算出图6-1所示的那叠零件的总数，我们可以设想如图6-3那样，在这叠零件的一侧，倒叠着同样的一叠零件，这样，每一层的零件只数都相等，即

$$6+10=7+9=8+8=9+7=10+6.$$

由于共有5层，两堆零件的总数是 $(6+10) \times 5$ 。因此所求的零件总数是

$$\frac{(6+10) \times 5}{2} = 40.$$

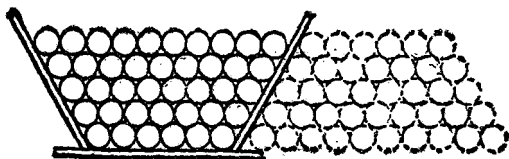


图 6-3

用这个方法求和，是应用3等差数列的特殊性质。我们可以用同样的方法求出等差数列的前 n 项的和。

设等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

的前 n 项的和是 S_n ，那么

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

根据等差数列 a_n 的通项公式，上式可以写成

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d] \quad (1)$$

另一方面，我们可以把表示 S_n 的式子里各项的次序倒过来，写成

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1.$$

因为 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ 也是一个等差数列，它的公差等于 $-d$ ，所以上面这个式子可以写成：

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)和(2)的两边分别相加，得

n 个

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \\ &= n(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

由此得到等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和的公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，所以上面的公式又可写成

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

例1 求等差数列1, 2, 3, ..., 100的各项的和。

解： $\because a_1 = 1, a_n = 100, n = 100,$

$$\therefore S_{100} = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = 5050.$$

例2 一个物体第一秒降落4.9米，以后每秒比前一秒多降落9.8秒。

(1) 如果它从山顶落到地面，要经过5秒钟，那么这山高有多少米？

(2) 如果它从1960米的高空落到地面，要经过几秒钟？

解：(1) 根据题意物体从第1秒至第5秒，每秒降落的距离(米)是一个等差数列

其中， $a_1=4.9$ ， $n=5$ ， $a_5=4.9+4\times 9.8$ 。

$$\begin{aligned}\therefore S_5 &= \frac{5(4.9+4.9+4\times 9.8)}{2} \\ &= 122.5(\text{米}).\end{aligned}$$

答：这山高有122.5米。

(2) $S_n=1960$ ， $d=9.8$ ， $a_1=4.9$ ，

由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ 得：

$$1960 = n \times 4.9 + \frac{n(n-1)}{2} \times 9.8,$$

解得 $n_1=20$ ， $n_2=-20$ (不合题意舍去)。

答：由1960米高处落到地面需20秒钟。

例3 等差数列的公差是2，最后一项是1，各项的和是-8，求它的第1项和项数。

解：把 $d=2$ ， $a_n=1$ ， $S_n=-8$ 。

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ，得

$$\begin{cases} a_1+2(n-1)=1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n(a_1+1)}{2}=-8 & (2) \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$n_1=4, a_1=-5.$$

答：第1项是-5，项数是4.

例4 如图6-4，一个堆放铅笔的V形架的最下面一层放1支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放1支，最上面一层放120支，这个V形架上共放着多少支铅笔？

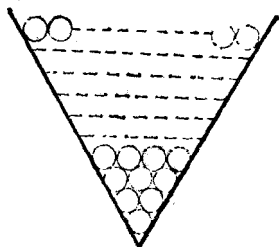


图 6-4

解：由题意可知，这个V形架上共放着120层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$ ，其中 $a_1=1$ ， $a_{120}=120$ ， $n=120$.

根据等差数列前 n 项和的公式，得

$$S_{120} = \frac{120 \times (1 + 120)}{2} = 7260 (\text{支})$$

答：V形架上共放着7260支铅笔.

例5 在小于100的正整数集合 M 中，有多少个数是7的倍数？求它们的和.

$$\text{解：} \because 7n < 100,$$

$$\therefore n < \frac{100}{7},$$

$$n < 14\frac{2}{7}.$$

由于满足上面不等式的自然数 n 共有14个，将它们从小