顾幸生 刘漫丹 张凌波 ◎ 编著

XIANDAI
KONGZHI LILUN JI YINGYONG

现代控制理论及应用

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

现代控制理论及应用

编 著 顾幸生 刘漫丹 张凌波

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论及应用/顾幸生,刘漫丹,张凌波编著.
上海:华东理工大学出版社,2008.9
ISBN 978-7-5628-2371-1

Ⅰ.现… Ⅱ.①顾…②刘…③张… Ⅲ.自动控制—高等学校—教材 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第115864号

现代控制理论及应用

编　　著/顾幸生　刘漫丹　张凌波
责任编辑/周永斌
责任校对/徐　群
封面设计/赵　军
出版发行/华东理工大学出版社
　　　　地　址:上海市梅陇路130号,200237
　　　　电　话:(021)64250306(营销部)
　　　　传　真:(021)64252707
　　　　网　址:www.hdlgpress.com.cn
印　　刷/常熟华顺印刷有限公司
开　　本/787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/17.75
字　　数/426千字
版　　次/2008年9月第1版
印　　次/2008年9月第1次
印　　数/1-4050册
书　　号/ISBN 978-7-5628-2371-1/TP·158
定　　价/35.00元

前　　言

现代控制理论自从20世纪50年代末、60年代初开始建立，经过五十年的发展，已经形成了具有丰富内容、涉及面广的学科。所涉及的数学概念与方法之多、之深、之新，且又紧密结合工程应用，具有非常广泛的实际背景，这在其他工科专业的理论与方法体系中是不多见的。通常将“线性系统理论”、“最优控制与最优状态估计”与“系统辨识”作为现代控制理论的主要内容，要求教学中既要讲清这些现代数学与控制理论的基本概念和方法，建立控制理论的独特的思维方式，又要在控制理论与控制工程设计及应用中架桥铺路，这给现代控制理论课的教学带来极大的困难与挑战。本书编著者近十年为工程硕士研究生讲授《现代控制理论》课程，在教材内容的选取和教学方法上都曾付诸心血，力图讲授好现代控制理论课。

工程硕士研究生与工学硕士研究生有较大的区别。工程硕士研究生绝大多数是企业单位的骨干，毕业时间较长，进校不离岗，单位的工作任务繁重。因此不能采用工学硕士研究生的教学内容与教学方法来从事工程硕士研究生的专业课程教学，必须针对工程硕士研究生的特点，精选教学内容，精心准备教案，改革课堂教学方法，才能取得良好的教学效果。本人多年来从事控制工程领域的专业学位课程《现代控制理论》的教学工作，在教学中有一些经验和体会，本书即是精选的教学内容。

编写本书的目的是使学生能获得基本的现代控制理论基础知识，掌握控制系统的状态空间分析方法、最优控制方法和系统辨识方法，了解现代控制理论的最新发展动态，结合具体的工程实际，了解现代控制理论在实际工程中的应用。全书覆盖“线性系统理论”、“最优控制与最优状态估计”和“系统辨识”三个现代控制理论基本的分支，简略讲述先进控制技术，并辅以实际案例，这有别于目前已有的现代控制理论教材。

本书共分14章，具体内容包括6个部分。(1) 线性多变量系统理论：线性系统的描述；

线性系统的可控性、可观性及标准形；线性系统的零极点；线性系统状态反馈与状态观测器设计；分离定理；系统的稳定性分析。(2) 最优控制：变分法的基本概念；连续系统的最优控制；离散线性系统的最优控制；极小值原理；典型最优控制；离散动态规划及其在离散系统最优控制中的应用；连续动态规划及其在连续系统最优控制中的应用。(3) 最优状态估计：随机过程的基本概念；随机线性系统；线性连续系统的最优状态估计；线性离散系统的最优状态估计。(4) 系统辨识：系统辨识的基本概念；经典辨识方法；最小二乘类参数辨识方法；其他辨识方法。(5) 先进控制技术：自适应控制的基本概念；模型参考自适应控制；自校正控制。预测控制的基本概念；预测控制常用数学模型；预测控制的基本算法。鲁棒控制基本原理；对象的不确定性和系统的鲁棒性；H^{∞}控制。(6) 案例：乙烯裂解炉解耦控制案例；反应釜自适应控制案例；聚酯生产过程卡尔曼滤波器应用案例；精馏塔多变量预测控制案例；换热器系统辨识案例；城市交通控制案例等。

本书由顾幸生教授、刘漫丹副教授、张凌波副教授编著。在编著的过程中得到了俞金寿教授、金宗华博士、张晴博士等的大力帮助，在此向他们表示衷心的感谢！本书还参考了国内外的大量专著、教材和文献，在此谨向有关著作者致以衷心的谢意！

本书仅是学习现代控制理论过程中的一环。学习过程的实施，还有赖于教学者和学习者这两个教学的主体，有赖于他们教与学的实践。因此，编者恳请使用过本书的老师和同学们不吝赐教，谢谢！本书得到华东理工大学研究生课程建设项目和华东理工大学优秀教材出版基金的资助，在此深表谢意！

限于编者水平，书中仍有一些不妥之处，恳请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

2008 年 6 月

目　　录

第1章　绪　　论

现代科学技术的迅猛发展对自动控制的程度、精度、速度及其适应能力的要求越来越高，从而推动了自动控制理论和技术的迅速发展。特别是20世纪60年代以来，电子计算机技术的迅猛发展，为自动控制理论及其应用奠定了坚实的基础，于是，现代控制理论逐步形成了一门融合系统论、控制论、信息论、数学以及其他各门学科的综合性现代科学分支。

1.1　自动控制理论的发展历史

自动控制理论的萌芽在古代就开始，我国古人发明的指南车就应用了反馈的原理。1788年J. Watt在发明蒸汽机的同时，应用反馈的思想设计了离心式飞摆调速器——这是一个反馈控制系统的方案。大工业生产的实际促进了自动控制理论的发展。1868年J. C. Maxwell发表的《论调速器》，论述了调速系统的稳定性；1876年俄国学者И. A. 维什涅格拉茨基发表著作《论调速器的一般理论》；1875年E. J. Routh和A. Hurwitz提出了根据代数方程的系数判断线性系统的稳定性方法；1927年H. S. Black发现采用负反馈线路的放大器，引入负反馈后，放大器系统对扰动和放大器增益变化的敏感性大为降低。由于电子学、通信技术发展的需要，1932年H. Nyquest采用频率特性表示系统，提出了频域稳定性判据，很好地解决了Black放大器的稳定性问题，而且可以分析系统的稳定裕度，奠定了频域法分析与综合的基础；1934年H. L. Hazen发表《关于伺服机构理论》；到了1938年，A. B. 维哈伊洛夫发表《频域法》，这标志着经典控制理论的诞生。为了更好地开展自动控制理论的研究，苏联科学院于1939年设立了自动学和远动学研究所；同年，美国麻省理工学院建立了伺服机构实验室，开展自动控制系统的分析与设计研究工作。1945年，H. W. Bode发表专著《网络分析和反馈放大器设计》，完善了系统分析和设计的频域方法；1948年W. R. Evans提出了系统的根轨迹方法，进一步完善了频域分析方法。1954年，钱学森出版了《工程控制论》，全面总结了经典控制理论，标志着经典控制理论的成熟。而维纳(N. Weiner)于1948年发表了《控制论》，这部具有深远影响的著作标志着控制论的诞生。

经典控制理论研究的对象基本上是单输入-单输出问题，所涉及的系统大多是线性定常系统，非线性系统的相平面法也只含两个变量。研究的系统，如自动调速系统、自动电压调节系统、温度控制系统等，均被看作为单输入-单输出系统来处理，解决这些单输入-单输出系统问题，采用频率法、奈氏稳定性判据、根轨迹法、相平面法等方法，这些方法均属于经典控制理论范畴，所得到的结论在对控制精度、准确度要求不是很高的情况下是完全可用的。

经典控制理论在实际应用过程中面临许多困难和挑战：多输入-多输出系统、本质非线性系统、时变参数系统等，这些问题很难采用经典控制理论解决，因为经典控制理论的综合方法多带有半经验的试差性质，是一些工程方法，而不是理论综合方法，达不到高精度的控制要求。但是工业过程系统的大型化、复杂化，使得系统变成多输入-多输出的系统，尤其随着航空、航天事业的发展，需要提出新的控制理论解决实际问题。在空间技术等方面的推动下，关于现代控制理论的研究获得了积极的推进，并取得了一批杰出的成果，如：苏联学者

庞德里亚金(L. S. Pontryagin)于1956年创立了极大值原理；1953—1957年间，美国学者贝尔曼(R. Bellman)创立了动态规划，他依据最优性原理，发展了变分学中的 Hamilton - Jaccobi 理论；1959年，卡尔曼(R. E. Kalman)提出了滤波器理论；1960年，卡尔曼等提出了系统的可控性与可观性理论。上述这些理论成果，标志着现代控制理论的逐步形成。

20世纪70年代，大系统理论的出现，使控制理论发展到了一个新阶段。所谓大系统，是指规模庞大、结构复杂、变量众多、关联严重、信息不完备的信息与控制系统。它涉及生产过程、社会经济、环境保护、交通控制、生物控制、计划管理、空间技术等许多领域。大系统理论的主要研究内容是系统建模、递阶控制、分散控制等。

实际过程往往存在各种不确定性、非线性特性、时变特性、模型失配、未建模动态等，采用现代控制理论进行研究分析难以达到满意的控制效果，所以发展了各种先进控制算法，克服这些因素的影响。这些先进控制理论和方法主要有：自适应控制、鲁棒控制、预测控制、模糊控制、专家控制、神经网络控制、非线性控制等。

现代控制理论的出现，是人类探索空间的客观需要。随着社会的发展和科学技术的进步，控制理论将不断完善。

1.2 现代控制理论的基本内容

现代控制理论是基于系统的状态空间进行分析和综合的理论，它主要包括以下内容。

(1) 线性多变量系统理论

线性多变量系统理论主要包括系统的数学模型、运动分析、稳定性理论、可控性与可观性理论、状态反馈和极点配置、状态观测器设计等问题。

(2) 最优控制问题

简单地说，就是在给定限制条件和评价函数下，寻找使系统性能指标达到最优的控制规律。这里的限制条件即约束条件，就是物理上对系统所施加的一些限制；评价函数即性能指标，是为评价系统的优劣所规定的标准，也称为目标函数；要寻找的控制规律就是控制器的综合设计。解决最优控制问题的主要研究方法有古典变分法、庞德里亚金的极大值原理和贝尔曼的动态规划。

(3) 最优状态估计

当系统有随机干扰时，控制系统的分析和设计就必须应用概率和统计的方法进行，即在系统数学模型已经建立的基础上，通过对系统输入、输出数据的测量，利用统计学的方法对系统的状态进行估计，在获得系统状态的最优估计的基础上进行控制器的设计。古典的维纳滤波理论阐述的是对平稳随机过程按均方意义的最佳滤波，而现代的卡尔曼滤波理论克服了维纳滤波理论的局限性，在很多领域中得到广泛应用。

(4) 系统辨识

要研究系统分析和控制问题，首先要建立系统的数学模型。由于实际系统比较复杂，所以往往不能通过过程的机理直接建立其数学模型，而主要通过试验或是运行，根据一个系统的输入、输出数据来确定其数学模型及其参数，这就是系统辨识问题。系统辨识包括两大部分：系统的结构辨识即确定系统的模型类和阶次，系统的参数估计即确定系统模型的参数。

(5) 自适应控制问题

自适应控制是指一类控制系统，既能适应系统内部参数的变化，又能适应外部环境的变化，而自动调整控制作用，使系统达到一定意义下的最优，或满足对这一类系统的要求。自适应控制主要包括两大类：模型参考自适应控制和自校正自适应控制。

1.3 本书的内容和特点

现代控制理论包含的内容很多，涉及的范围很广，许多内容相当艰深。本书主要针对控制工程及相关领域的硕士研究生的特点编写，所以尽可能适合工程硕士研究生的需要，介绍现代控制理论的基本内容，在完整性和系统性的前提下，尽量“实用”，注重理论结果，免去一些繁琐的理论推导，并介绍现代控制理论的一些应用案例，为他们的学习打好基础。

本书的基本内容包括线性系统的状态空间描述和传递矩阵的描述，系统的可控性、可观性分析，李雅普诺夫稳定性理论，系统的极点配置与状态观测器设计，最优控制系统的分析与设计，随机线性系统的最优状态估计，系统辨识的基本理论与常用的辨识方法，自适应控制、预测控制和鲁棒控制技术的基本概念，最后是现代控制理论应用的实例分析，其中包括乙烯装置裂解炉炉管出口温度解耦控制、循环流化床锅炉燃烧系统自适应控制、基于卡尔曼滤波器的聚酯生产过程质量指标在线估计、精馏过程多变量预测控制、常压蒸馏加热炉的系统辨识、城市交通系统动态最优分配模型等。

第 2 章　线性多变量系统的描述

2.1　线性系统的状态空间描述

2.1.1　基本概念

因果性：因果性是自然界的一种普遍现象。对控制系统而言，若系统在时刻 t 的输出并不取决于在 t 之后的输入，而仅取决于时刻 t 和 t 之前所加的输入，则称系统具有因果性，即过去影响将来；反之则不然。实际的物理系统都具有因果性。本质上讲系统模型描述的就是控制系统的因果性。

在经典控制理论中，控制系统的模型以传递函数的形式描述。而自 20 世纪 60 年代发展起来的现代控制理论则是建立在多变量系统的状态空间描述基础上的。

控制系统的传递函数有效地反映了系统输入、输出特性，但无法体现系统的内部动态特性，因此对于控制系统的描述是不完善的，具有一定的局限性。许多实际系统是多变量系统，如工业中广泛应用的锅炉等，多变量系统对系统模型的描述提出了更高的要求。

控制系统的状态空间描述由反映系统的状态变量动态行为的状态方程和输出方程构成。状态变量、状态向量、状态空间、状态方程和输出方程的定义如下。

状态变量　所谓“状态”，是指系统的运动状态。状态变量是确定系统运动状态（过去、现在、将来）的一组（数目最少的）独立变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统，就有 n 个独立变量，所以说系统的状态变量就是 n 阶系统的 n 个独立变量。

同一个系统，状态变量的选择不是唯一的，重要的是这些变量应该是独立的，且其个数应等于系统的阶数。状态变量是一组足以确定系统运行规律的数目最小的变量，当其在 $t=t_0$ 时刻的值已知时，即 $x(t_0)$ 已知，则在给定 $t>t_0$ 时间的系统输入 $u(t)$ 作用下，便能确定系统在 $t\geqslant t_0$ 任意时刻的行为，即可知 $x(t)$。

状态向量　如果 n 个状态变量用 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 表示，并将这些状态变量看作是向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分量，则 $\boldsymbol{x}(t)$ 就称为状态向量，记作：

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态空间　以各状态变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 为坐标构成的 n 维空间，称为状态空间。系统在任意时刻的状态都可用状态空间中的一点来表示。已知初始时刻 $t=t_0$ 的 $\boldsymbol{x}(t_0)$，就得到状态空间中的一个初始点；随着时间的推移，状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 就在状态空间中描绘出一条曲线，该曲线称为状态轨线。

状态方程　描述系统状态变量与系统输入作用之间相互关系的一阶微分（或差分）方程组，称为状态方程。

输出方程　描述系统的输出与状态变量、系统输入之间相互关系的方程，称为输出方程。

线性系统是现代控制理论中讨论得最多的一类系统。以 $H(\cdot)$表示系统的输入、输出函数关系，如果满足：

$$\begin{cases} H(u_1+u_2)=H(u_1)+H(u_2) \\ H(\alpha u)=\alpha H(u) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

式中，u_1，u_2 为系统的输入；α 为实常数。则该系统是线性的，即系统既有可加性，又有齐次性，也称为满足耦合迭加原理。如果系统特性（参数）不随时间而变，则称系统是定常系统。

例 2.1.1　设有如图 2.1.1 所示的 R－L－C 网络，u 为输入变量，u_c 为输出变量。试求其数学描述。

解：根据电路原理，可以列出下列方程：

$$\begin{cases} C\dfrac{du_c}{dt}=i \\ L\dfrac{di}{dt}+iR+u_c=u \end{cases} \tag{2.1.2}$$

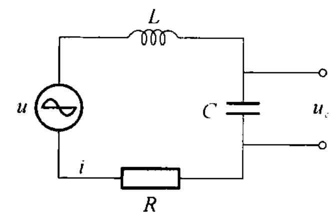

图 2.1.1　R－L－C 网络

消去中间变量 i，可得

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u \tag{2.1.3}$$

对上式进行拉氏变换可得

$$\frac{U_c(s)}{U(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1} \tag{2.1.4}$$

对式(2.1.2)进行重写，可得

$$\begin{cases} \dot{u}_c=\dfrac{1}{C}i \\ \dot{i}=-\dfrac{1}{L}u_c-\dfrac{R}{L}i+\dfrac{1}{L}u \end{cases} \tag{2.1.5}$$

用向量表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}u \tag{2.1.6}$$

若指定 $u_c(t)$为系统的输出，用 $y(t)$表示，则系统的输出为

$$y(t)=u_c(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} \tag{2.1.7}$$

在这个例子中，式(2.1.3)、式(2.1.4)和式(2.1.6)分别代表了系统的三种描述方法。其中，式(2.1.3)为系统的微分方程描述，式(2.1.4)为系统的传递函数描述，式(2.1.6)为系统的状态方程，式(2.1.7)为系统的输出方程。

2.1.2 线性系统的状态空间表达式

线性系统是现代控制理论中讨论得最多的一类系统，目前已经形成了相当完善、成熟的线性系统控制理论。

在上节由式(2.1.6)、式(2.1.7)的描述中，令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

令状态向量 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}u_c\\ i\end{bmatrix}$，输入为 $\boldsymbol{u}(t)$，输出为 $\boldsymbol{y}(t)$，则上述线性系统可以由下列状态方程和输出方程描述：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \text{状态方程}\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{输出方程或测量方程}\end{cases}$$

这就是线性定常系统的状态空间描述。一般地，线性系统的典型状态空间描述为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{2.1.8}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{2.1.9}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^{n\times1}$，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^{m\times1}$，$y(t)\in\mathbf{R}^{l\times1}$ 分别为系统的状态变量(向量)，输入变量(向量)和输出变量(向量)，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{l\times n}$，$\boldsymbol{D}\in\mathbf{R}^{l\times m}$ 分别为系统矩阵、控制矩阵、输出矩阵和前馈矩阵，式(2.1.8)为系统的状态方程，而式(2.1.9)则为系统的输出方程。

若 $u(t)$为标量函数，$y(t)$也为标量函数，则称系统为单输入-单输出(SISO)系统，亦称单变量系统；否则称为多输入-多输出(MIMO)系统，或多变量系统。

系统状态空间描述具有如下特点。

(1) 状态空间描述考虑了“输入—状态—输出”这一过程，其中考虑了系统的状态，这与经典控制理论只考虑系统输入-输出关系完全不同，系统的状态描述了系统的内部关系，揭示了问题的本质，即输入引起状态的变化，而状态则决定了系统的输出。所以说，经典控制理论中采用微分方程或传递函数，描述的是系统的输入-输出关系；而状态空间描述的是系统内部关系。

(2) 输入引起的状态变化是一个运动过程，数学上表现为一阶微分方程组，即状态方程；状态决定输出是一个变换过程，数学上表现为代数变换方程，即输出方程。

(3) 系统的状态变量个数等于系统包含的独立变量个数，一个 n 阶系统仅有 n 个状态变量可以选择。

(4) 对于一个给定的系统，状态变量的选择不是唯一的。

(5) 一般来说，状态变量不一定是系统中物理上可测的量，但从便于控制系统构成的角度来说，一般将可测的物理量选为状态变量更合适。

(6) 对于结构和参数已知的过程，建立状态空间模型的一般步骤为：首先选择状态变量，确定输入变量和输出变量；其次根据电学、力学、化学、热力学或其他方面的机理或定理列写微分方程，并将其转化为一阶微分方程组，最后将其写成向量微分方程的形式，即得状

态空间描述。

（7）若参数矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 随时间变化，则系统为时变线性系统，其状态空间描述为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{2.1.10}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{2.1.11}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^{r\times 1}$，$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ 分别为系统的状态变量（向量），输入变量（向量）和输出变量（向量），$\boldsymbol{A}(t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}(t)\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{C}(t)\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{D}(t)\in\mathbf{R}^{m\times r}$ 分别为具有时变特性的系统矩阵、控制矩阵、输出矩阵和前馈矩阵。上述状态空间描述的是参数随时间变化的时变线性系统。

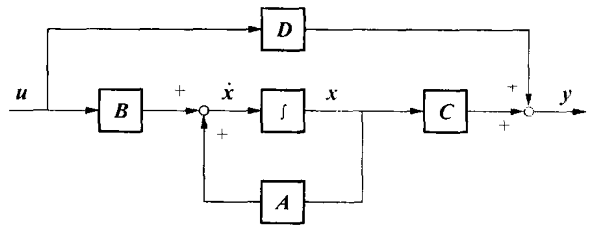

图 2.1.2　线性系统的结构图

状态空间描述的线性系统方块图如图 2.1.2 所示。

2.1.3　线性连续定常系统齐次状态方程的解

对于不考虑输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 的齐次状态方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{2.1.12}$$

上述方程的唯一解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0),\ t\geqslant t_0 \tag{2.1.13}$$

其中，

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k(t-t_0)^k+\cdots \tag{2.1.14}$$

状态方程的解可以这样得到：

当 $t_0=0$ 时，设

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t+\boldsymbol{b}_2t^2+\cdots+\boldsymbol{b}_kt^k+\cdots \tag{2.1.15}$$

代入状态方程(2.1.12)，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2t+3\boldsymbol{b}_3t^2+\cdots+k\boldsymbol{b}_kt^{k-1}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t+\boldsymbol{b}_2t^2+\cdots+\boldsymbol{b}_kt^k+\cdots)\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

比较式(2.1.16)等号两边 t 的系数，可知

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_0$$

$$\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_0$$

$$\boldsymbol{b}_3=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}_0$$