高等代数
百题多解法

广西教育出版社

高等代数百题多解法

李忠侯　罗雄生　任北上　编著

广西教育出版社

高等代数百题多解法
李忠傧　罗雄生　任北上 编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市民族大道7号）
广西新华书店发行　　广西民族语文印刷厂印刷
*
开本850×1168　1/32　11印张　240千字
1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷
印　数：1—7,000册
ISBN 7—5435—0495—2/G·411
定价：4.10元

前　言

根据我们多年来在高等院校数学专业教学的经验，在大学低年级开设的三门基础课（数学分析、高等代数、解析几何）中，学生普遍感到高等代数比较难学，因为它的概念多而抽象，习题难度较大，初学的人拿到题目往往不知从何入手，这些问题对于自学者更为突出。

为了帮助具有大学一年级或者高中毕业水平的同志克服学习高等代数的困难，掌握高等代数的基本理论，提高解题能力，我们从历年的习题课教案及课外作业积累的资料中，选编了这本《高等代数百题多解法》。书中除了提供每道题的多种解法外，我们还在解题思路上下了功夫，因为我们认为它是打开数学殿堂大门的金钥匙。此外我们还对各种解法和证法进行了对比和评述，特别注意指出各种解法的分歧点，注意运用举反例的方法阐明各种容易混淆和似是而非的概念。

参照张禾瑞、郝钢新教授合编的《高等代数》，及北京大学数学力学系编的《高等代数》教材，我们将这百道题分成九类，其中关于多项式的20题，关于行列式的10题，关于线性方程组的8题，关于矩阵的14题，关于向量空间的15题，关于线性变换的13题，关于欧氏空间的8题，关于二次型的7题，关于λ-矩阵的5题。这些知识相互渗透，基本上覆盖了部颁高等代数教学大纲规定的全部内容，某些题目还使用了近世代数的方法（如同构、同态），这样做是为了加深理解和提高读者的综合运用能力。

在编写本书的过程中，我们得到了广西教育出版社黄力平同

志及广西师院数学系几何代数教研室同志们的大力支持和帮助，我们在此表示衷心的感谢！

由于时间和水平的限制，书中错误和不妥之处在所难免，敬请同行及读者批评指正。

编著者

1987年10月

目　　录

一、多 项 式

1. 设$f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$能被$g(x)=x^2-x-2$整除，求a，b。

分析1 根据定义，$g(x)$整除$f(x)$是指存在$g(x)$使$f(x)=q(x)g(x)$；而据次数定理，$q(x)$应是二次多项式，设为cx^2+dx+e。利用恒等性质就可求出a、b的值。

解法1 由整除定义，存在二次多项式$q(x)=cx^2+dx+e$使$f(x)=q(x)g(x)$，即

$$x^4+ax^3+2x^2+bx-2=(x^2-x-2)(cx^2+dx+e),$$

对比两端的最高次项及最低次项系数，就可得到$c=e=1$。这样就使上式简化成

$$\begin{aligned}&x^4+ax^3+2x^2+bx-2\\&=(x^2-x-2)(x^2+dx+1)\qquad(1)\\&=x^4+(d-1)x^3+(-1-d)x^2-(2d+1)x-2.\end{aligned}$$

比较对应项系数得方程组

$$\begin{cases}d-1=a,\\-1-d=2,\\-1-2d=b.\end{cases}$$

解之得 $d=-3$，$a=-4$，$b=5$。

故 $a=-4$，$b=5$。

分析2 解法1中在求得恒等式(1)后，本应展开右端以求出待定系数a，b，c，d，e，这样计算量就太大了.好在要求的仅是待定系数a，b，至于c，d，e三数是无关紧要的，所以最好是设法回避它们。为此可利用$g(x)$的两个根-1及2代入，这样一来

这个恒等式的右端等于零，c，d，e 三数就不再出现了。

解法2 因$g(x)|f(x)$，故存在 $q(x)=cx^2+dx+e$ 使

$$f(x)=g(x)q(x),$$

代入有

$$x^4+ax^3+2x^2+bx-2=(x^2-x-2)(cx^2+dx+e).$$

这是一个恒等式，用任何数代入都应能使左右两端的值相等，现特选取$g(x)=x^2-x-2$ 的两个根 -1及 2 代入上式两端，则因 $g(-1)=g(2)=0$，有

$$(-1)^4+a(-1)^3+2(-1)^2+b(-1)-2=0,$$
$$2^4+a\cdot 2^3+2\cdot 2^2+b\cdot 2-2=0,$$

化简整理后得方程组

$$\begin{cases}-a-b+1=0,\\ 8a+2b-22=0.\end{cases}$$

解之得 $a=-4$，$b=5$。

分析3 因为整除可看成带余除法的特例，列竖式求出 $g(x)$ 除$f(x)$的余式，则此余式含有待定系数 a，b，但由题设 $g(x)$整除 $f(x)$，所以这个余式应为零多项式，由零多项式的所有系数均为零这个性质即可得到含 a，b 的方程，解之即可得 a，b。

解法3 作除法

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4+ & ax^3+ & 2x^2+ & bx-2 & x^2-x-2 \\
\cline{5-5}
x^4- & x^3- & 2x^2 & & x^2+(a+1)x+(a+5) \\
\hline
 & (a+1)x^3+ & 4x^2+ & bx-2 & \\
 & (a+1)x^3- & (a+1)x^2- & 2(a+1)x & \\
\hline
 & & (5+a)x^2+ & (2a+b+2)x-2 & \\
 & & (5+a)x^2- & (a+5)x-2(a+5) & \\
\hline
 & & & (3a+b+7)x+2a+8 &
\end{array}$$

$\therefore$ 余式 $r(x)=(3a+b+7)x+(2a+8)$，

令它为零即得方程组

$$\begin{cases}3a+b+7=0,\\2a+8=0.\end{cases}$$

解之得　$a=-4$，$b=5$。

分析4　因为$g(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$，由题设$g(x)|f(x)$，所以$x+1|f(x)$，$x-2|f(x)$。由因式定理应有$f(-1)=0$及$f(2)=0$，这样就可得到含a，b的方程组，解之即可得到a，b。

解法4　用$g(x)$的两个根-1和2分别代入$f(x)$，得

$$f(-1)=1-a+2-b-2=0,$$
$$f(2)=16+8a+8+2b-2=0.$$

整理后得方程组

$$\begin{cases}a+b-1=0,\\8a+2b-22=0.\end{cases}$$

解之即得　$a=-4$，$b=5$。

简评　四种不同的求解方法，来自不同的出发点：解法1，2直接由整除定义出发找出确定系数a，b的方程；解法3利用带余除法寻找含a，b的余式，再根据整除是带余除法的特例，令余式为零多项式即可得到表示a，b关系的方程；解法4利用因式定理来确定a，b的关系。对本题而言，解法4最简捷。

2．求$f(x)=x^{60}+x^{59}+x^{53}+x^{50}$与$g(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$的最大公因式。

分析1　本题可以利用辗转相除法求解，但直接这样做的计算量太大，所以要设法化简。由于$f(x)=x^{50}(x^{10}+x^9+x^3+1)$，$x^{50}$显然与$g(x)$互素，所以要求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，只需求$x^{10}+x^9+x^3+1$与$g(x)$的最大公因式就行了，而这时用辗转相除法就简单多了。

解法1　因为

$$f(x)=x^{50}(x^{10}+x^9+x^3+1),$$

又 $g(x)\neq 0$,

由辗转相除法可以求得 $x^{10}+x^9+x^3+1$ 与 $x^4-x^3-x^2-x-2$ 的最大公因式是 x^3+x^2+x+1,

故 $(f(x),g(x))=x^3+x^2+x+1$。

分析2 也可利用多项式的因式分解式求，最大公因式就是各公因式中次数最高的那一个。现在的问题是如何求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，为此可先将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 进行因式分解(可以不必分解到典型分解式)，而这又可从较低次的 $g(x)$ 着手，因为参照 $g(x)$ 的因式常易分解出 $f(x)$ 的因式。

解法2 $g(x)$ 是一个整系数多项式，利用求有理根的方法可以求得它的一个根是 $x=2$。由因式定理，$x-2$ 是 $g(x)$ 的一个因式，而且

$$g(x)=(x-2)(x^3+x^2+x+1);$$

因为 $f(x)=x^{60}+x^{59}+x^{53}+x^{50}$

$$=x^{50}(x^{10}+x^9+x^3+1),$$

由于 $x-2$ 与 x^{50} 互素，要求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，只要求出 x^3+x^2+x+1 与 $x^{10}+x^9+x^3+1$ 的最大公因式就行了。由于

$$x^{10}+x^9+x^3+1=(x^3+x^2+x+1)(x^7-x^5+x^3-x+1),$$

故

$$(x^{10}+x^9+x^3+1,x^3+x^2+x+1)=x^3+x^2+x+1,$$

因而

$$(f(x),g(x))=x^3+x^2+x+1.$$

分析3 在解法2求 x^3+x^2+x+1 与 $x^{10}+x^9+x^3+1$ 的公因式时，改用试根法先求出它们的所有一次公因式，然后将它们相乘，即可得到它们的最大公因式。

解法3 多项式 x^3+x^2+x+1 乘以一次式 $x-1$，得多项式 x^4-1，它的根包含所有的四次单位根 ±1，$\pm i$；从这四个根中

除去 1 即得 x^3+x^2+x+1 的三个根 -1 及 $\pm i$. 验证后可知这三个数也是多项式 $x^{10}+x^9+x^3+1$ 的根，由因式定理知

$$x+1,\ x+i,\ x-i \mid x^{10}+x^9+x^3+1,$$

因 $x+1$，$x+i$，$x-i$ 两两互素，而

$$(x+1)(x+i)(x-i)=x^3+x^2+x+1,$$

故

$$x^3+x^2+x+1 \mid x^{10}+x^9+x^3+1,$$

因而

$$(f(x),g(x))=x^3+x^2+x+1.$$

简评 本题最直接的解法是使用辗转相除法，这是一个构造的方法，经过有限步计算即可得到最大公因式. 困难在于本题的两个多项式次数太高，辗转相除的步数太多，计算量大，所以辗转相除法并不是最好的方法. 解法 2 将 $g(x)$ 析出一次因式 $x-2$ 后将问题引导到较低次多项式，虽然简化了计算，但还是无法避开作长除法. 解法 3 则从根的角度出发，利用因式定理求出各一次公因式，然后将它们相乘即得最大公因式，这种方法完全摆脱了辗转相除法，是一种颇具新意的解法，虽然在求复数根时，已经不自觉地将数域扩张到复数域去了，但好在多项式的最大公因式是不因数域的扩张而产生变化的，所以得到的结果仍是正确的.

3. 证明：$x^d-1 \mid x^n-1$ 的充分与必要条件是 $d \mid n$，这里的 d 与 n 都是正整数.

分析1 充分性的证明是明显的. 至于必要性的证明，因为多项式的次数是非负整数，本命题是一个牵涉到非负整数的命题，所以可以利用数学归纳法证明.

证法1 充分性：设 $d \mid n$，即 $n=qd$，则

$$x^n-1=(x^d)^q-1=(x^d-1)(x^{(q-1)d}+x^{(q-2)d}+\cdots+1),$$

由整除定义即得

$$x^d-1 \mid x^n-1.$$

必要性：用数学归纳法证明。

当$n=d$时，$x^d-1 \mid x^d-1$，命题显然成立。

设当$d \leqslant n < m$时命题成立，现在来证明：

若 $$x^d-1 \mid x^m-1, \text{ 则 } d \mid m.$$

为达到此目的，在x^m-1中插入两项使能运用归纳假定：

$$\begin{aligned} x^m-1 &= x^m-x^{m-d}+x^{m-d}-1 \\ &= x^{m-d}(x^d-1)+(x^{m-d}-1). \end{aligned}$$

由题设，此式左端能被x^d-1整除，右端第一式$x^{m-d}(x^d-1)$亦能被x^d-1整除，由整除性知它们的差$x^{m-d}-1$亦能被x^d-1整除。但$m-d<m$，由归纳假定得$d \mid m-d$，再由整数的整除性即得$d \mid m$。

由归纳原理，必要性得证。

分析2 本题必要性亦可用反证法证明，即若设d不能整除n时将引出矛盾。

证法2 充分性证法同前。下面证必要性：

假设$x^d-1 \mid x^n-1$时$d \nmid n$，则存在整数q及r使

$$n=qd+r \quad (0<r<d).$$

作
$$\begin{aligned} x^n-1 &= x^n-x^r+x^r-1 \\ &= x^r(x^{n-r}-1)+(x^r-1) \\ &= x^r[(x^d)^q-1]+(x^r-1) \\ &= x^r(x^d-1)(x^{(q-1)d}+x^{(q-2)d}+\cdots+1)+(x^r-1). \end{aligned}$$

此等式左端x^n-1及右端第一部分$x^r(x^d-1)\cdot(x^{(q-1)d}+x^{(q-2)d}+\cdots+1)$均能被$x^d-1$整除，由整除性质$x^d-1 \mid x^r-1$；但$0<r<d$，$x^d-1 \nmid x^r-1$。矛盾！

故 $d \mid n$。

分析3 x^d-1及x^n-1都是分圆多项式，它们的根分别称为d次及n次单位根，由于多项式的根与它的一次因式间存在着因式定理所描述的联系，所以它们间的整除性亦可利用这两种单位

根的性质来考察。

证法3 充分性的证明同证法1，下面利用单位根的性质及因式定理证明条件的必要性：

因$e^{\frac{2\pi i}{d}}=\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}$是$x^d-1$的一个根，由因式定理可得

$$x-e^{\frac{2\pi i}{d}}\mid x^d-1,$$

又因

$$x^d-1\mid x^n-1,$$

由整除的传递性得

$$x-e^{\frac{2\pi i}{d}}\mid x^n-1,$$

再依因式定理得

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{d}}\right)^n=1,$$

即 $$e^{\frac{2n\pi i}{d}}=1,$$

所以 $$d\mid n.$$

简评 本题必要性部分的证明运用了三种不同的证法，它们都有较强的代表性：证法1利用数学归纳法，是一种行之有效的方法，大凡牵涉到自然数的命题都离不开它，并且可按照数学归纳法的两个步骤去做，但有时也要运用一些较高的技巧，比如加入一些适当的项使其符合归纳假设的条件等；证法2使用反证法，也是一种常用的有效方法，其关键在于找出矛盾；证法3利用各次单位根的性质找出多项式之间的关系，通过定量来确定整除性质，所以是一种较好的方法。问题在于这里运用了复数的性质，无形中又将问题推广到复数域去了！但因多项式的整除性是与域的扩张无关的（多项式的整除可以看作带余除法的特例，而

带余除法不过是在多项式的系数上作加、减、乘、除四则运算，这些运算的结果是不会因为数域的扩张而产生变化的），所以这种证法的有效性是无须置疑的。

4. 设$f(x)$与$g(x)$是两个不全为零的多项式，n是任意一个正整数，证明：

$$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x)).$$

分析1 此等式两端存在着密切的数量关系，这种数量关系用多项式的典型分解式表示最为精确，因此，要证明这个等式，只须对比最大公因式中各不可约因式的次数即可。

证法1 若$f(x)$与$g(x)$中有一个是零多项式或零次多项式，则结论显然成立。

设二者的次数都大于零，它们的典型分解式分别是

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x),\\ g(x)&=b_0p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_m^{t_m}(x).\end{aligned}\qquad(1)$$

其中s_i及t_i是非负整数$(i=1,2,\cdots,m)$，$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_m(x)$是两两互异的首项系数为1的不可约多项式，则

$$\begin{aligned}f^n(x)&=a_0^np_1^{ns_1}(x)p_2^{ns_2}(x)\cdots p_m^{ns_m}(x),\\ g^n(x)&=b_0^np_1^{nt_1}(x)p_2^{nt_2}(x)\cdots p_m^{nt_m}(x).\end{aligned}\qquad(2)$$

令 $\quad k_i=\min(s_i,t_i),\quad i=1,2,\cdots,m,$

于是 $\quad nk_i=\min(ns_i,nt_i),\quad i=1,2,\cdots,m.$

由(1)式与(2)式可得

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x),\\ (f^n(x),g^n(x))&=p_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_m^{nk_m}(x)\\ &=(p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x))^n\\ &=(f(x),g(x))^n.\end{aligned}$$

即 $\quad (f^n(x),g^n(x))=(f(x),g(x))^n.$

分析2 两多项式$f(x)$与$g(x)$的一个公因式$d(x)$是它们的最

大公因式的充要条件是$d(x)$关于$f(x)$与$g(x)$的余因式$f_1(x)$与$g_1(x)$互素，现利用这个性质来证明命题中的等式。

证法2 设$(f(x),g(x))=d(x)$，且

$$f(x)=d(x)f_1(x),\quad g(x)=d(x)g_1(x), \tag{1}$$

则由上述性质有

$$(f_1(x),g_1(x))=1.$$

另一方面有

$$f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x),\quad g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x),$$

$d^n(x)$显然是$f^n(x)$与$g^n(x)$的公因式，若能证明$(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$，那么$d^n(x)$就是$f^n(x)$与$g^n(x)$的最大公因式，从而命题就证明了。现在用反证法来证明：

设$(f_1^n(x),\ g_1^n(x))=d_1(x)$且$d_1(x)$是一个次数大于零的首项系数为1的可约多项式，则它有一个不可约因式$p(x)$，因而$p(x)|f_1^n(x),p(x)|g_1^n(x)$。但$p(x)$是不可约因式，故$p(x)|f_1(x)$，$p(x)|g_1(x)$，这与$(f_1(x),g_1(x))=1$矛盾。

这就证明了

$$(f^n(x),g^n(x))=d^n(x)=(f(x),g(x))^n.$$

分析3 在证法2中已看到两多项式的公因式是它们的最大公因式的充要条件是余因式$f_1(x)$与$g_1(x)$互素，而互素的条件又可通过是否存在$u(x)$与$v(x)$使

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$$

来表现。在这个判定法的基础上，得出本题的第三种证法。

证法3 设

$$(f(x),g(x))=d(x), \tag{1}$$

$$(f^n(x),g^n(x))=d'(x). \tag{2}$$

由(1)有 $f(x)=d(x)f_1(x),\quad g(x)=d(x)g_1(x)$,

因而 $f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x),\quad g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x)$;

由(2)有 $f^n(x)=d'(x)q(x),\quad g^n(x)=d'(x)p(x)$.

因为 $(f(x),g(x))=d(x)$，故 $(f_1(x),g_1(x))=1$，

从而 $(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$，

于是存在$u(x)$，$v(x)$使

$$f_1^n(x)u(x)+g_1^n(x)v(x)=1.$$

因为

$$f^n(x)=d'(x)q(x)=d^n(x)f_1^n(x),$$
$$g^n(x)=d'(x)p(x)=d^n(x)g_1^n(x),$$

于是

$$d'(x)q(x)u(x)=d^n(x)f_1^n(x)u(x),$$
$$d'(x)p(x)v(x)=d^n(x)g_1^n(x)v(x).$$

把这两个式子的两边分别相加就可得到

$$\begin{aligned}&d'(x)(q(x)u(x)+p(x)v(x))\\=&d^n(x)(f_1^n(x)u(x)+g_1^n(x)v(x))\\=&d^n(x),\end{aligned}$$

这个式子表明 $d'(x)\mid d^n(x)$。

还可证明$d^n(x)\mid d'(x)$，这是因为$d(x)=(f(x),g(x))$，所以$d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$。

因此 $d^n(x)\mid f^n(x)$，$d^n(x)\mid g^n(x)$，

因此 $d^n(x)\mid (f^n(x),g^n(x))$，

即 $d^n(x)\mid d'(x)$。

综上可见 $d^n(x)=d'(x)$。

这就证明了

$$(f^n(x),g^n(x))=(f(x),g(x))^n.$$

简评 在证明这类问题时，要尽可能运用最大公因式的性质，其中又以典型分解式和上述的充要条件为最重要，前者可以说是一个定量公式，它准确地给出了最大公因式的表示式；后者既是性质定理，又是判定定理。证法2主要是利用后者来证明的：前部分利用它是性质定理推得$(f_1(x),g_1(x))=1$；在证明了

$(f_1^n(x), g_1^n(x))=1$ 后，又利用它是判定定理证明

$$(f^n(x), g^n(x))=d^n(x)。$$

证法 3 在表示$f_1^n(x)$与$g_1^n(x)$互素时用到了：存在$u(x)$，$v(x)$使

$$f_1^n(x)u(x)+g_1^n(x)v(x)=1$$

这个定理。

5．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是数域上的两个多项式，证明：如果 $g^2(x)\mid f^2(x)$，那么 $g(x)\mid f(x)$。

分析1 利用多项式的典型分解式，将$g(x)$与$f(x)$各自分解为若干个互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式方幂的乘积，则由$g^2(x)\mid f^2(x)$即可证明 $g(x)\mid f(x)$。

证法1 作典型分解，设

$$g(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x),$$
$$f(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_r^{l_r}(x),$$

其中$p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,r)$是两两不相同的首项系数为 1 的不可约多项式，$k_i\geqslant 0$，$l_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$。

由 $g^2(x)\mid f^2(x)$ 得

$$a^2p_1^{2k_1}(x)p_2^{2k_2}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x)\mid b^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x),$$

所以 $p_i^{2k_i}(x)\mid p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)$，$i=1,2,\cdots,r$。

这时必有$2k_i\leqslant 2l_i$。因若不然，则有 $2k_i>2l_i$，

因此 $p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)=p_i^{2k_i}(x)q(x)$。

设$2k_i-2l_i=t$，从上式左右两端消去$p_i^{2l_i}(x)$后得

$$p_1^{2l_1}(x)\cdots p_{i-1}^{2l_{i-1}}(x)p_{i+1}^{2l_{i+1}}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)=p_i^t(x)q(x),$$

这就是说

$$p_i(x)\mid p_1^{2l_1}(x)\cdots p_{i-1}^{2l_{i-1}}(x)p_{i+1}^{2l_{i+1}}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x),$$

因为 $p_i(x)$ 是不可约多项式，所以 $p_i(x)$ 必能整除 $p_1^{2l_1}(x)$，$p_2^{2l_2}(x)$，$\cdots$，$p_{i-1}^{2l_{i-1}}(x)$，$p_{i+1}^{2l_{i+1}}(x)$，$\cdots$，$p_r^{2l_r}(x)$中的某一个，这明显是矛盾的，因为各$p_j(x)$$(j=1,2,\cdots,r)$是典型分解式