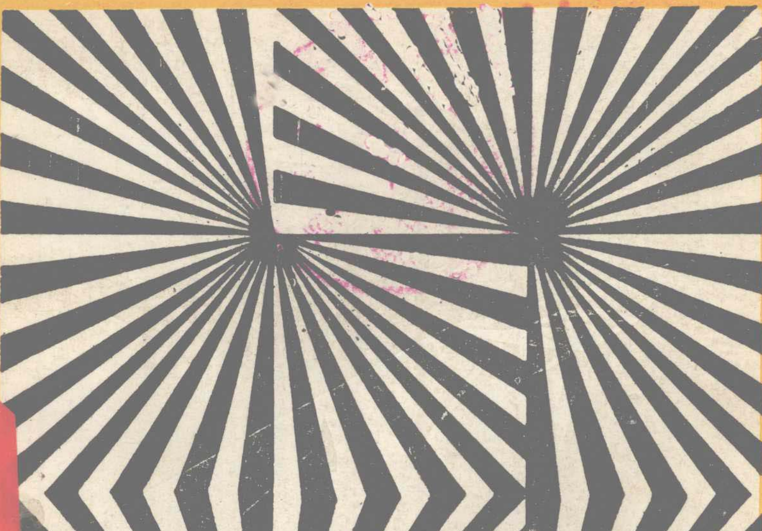
成人中专试用教材

线性代数与
线性规划初步

安徽省职工电视中等专业学校 编 李祥伦 主编

高等教育出版社



CHENGREN ZHONGZHUAN SHIYONG JIAOCAI

成人中专试用教材

线性代数与线性规划初步

安徽省职工电视中等专业学校编
李祥伦　主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本套数学教材是国家教育委员会成人教育司和我社共同组织编写的成人中专各类专业通用教材之一。本套教材由6册组成，包括：《数学》(基础部分共3册)、《微积分初步》、《线性代数与线性规划初步》和《概率与统计初步》。

本册《线性代数与线性规划初步》共4章，内容有行列式及其性质、矩阵、一般线性方程组简介和线性规划。

本册书的内容安排和编写格式有利于成人学习。书中每章之前有指明本章主要内容、重点和难点的"学习指导"，每章之后有"小结"。

本册书除作为成人中专教材外，也可作为自学用书。

成人中专试用教材

线性代数与线性规划初步

安徽省职工电视中等专业学校编

李祥伦　主编

*

高等教育出版社 出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 5.375　字数 110,000

1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

印数 0001—9,900

ISBN 7-04-001079-8/O·666

定价　1.20 元

出 版 说 明

近几年来，成人中等教育事业发展很快，广播电视中专、职工中专、函授中专等象雨后春笋般地建立起来，并继续发展壮大．为了保证成人中专的办学质量，满足各类成人中专对教材的要求，国家教育委员会成人教育司和高等教育出版社首先组织编写了成人中专财经类系列教材，由我社出版发行。

成人中专普通课教材两门：语文、数学（文、工科通用）．财经类系列教材二十二门：经济法实用教程、国民经济计划学概论、计算机基础及其应用、财经计算技术、数理统计、会计原理、统计学原理、工业企业管理基础知识、商业企业管理基础知识、工业统计、商业统计、工业会计、商业会计、工业企业财务管理、商业企业财务管理、工业企业管理、商业企业经营管理、工业企业经济活动分析、商业企业经济活动分析、财政与信货、市场学、商业物价等．供会计（工业、商业）、统计（工业、商业）和企业管理（工业、商业）等三个专业选用．

本系列教材在编写时，力求突出成人教育的特点，教材内容以实例引路，深入浅出，应用为主，并注意必要的内容更新，在深浅度上，相当于全日制中等专业学校同类教材的水平，适合初中毕业程度的成人学习．在编排格式上考虑到便于自学的要求，在序言中有学习方法指导或学时安排的内容，每章的前面有本章学习指导或内容提要，每章末有本章小结，并附有

思考题和练习题.

为了保证教材质量，我们在全国各地遴选有丰富教学经验的教师担任编写工作，每本教材在定稿前都召开了编写提纲讨论会和审稿会，请全国各地的专家和有丰富教学经验的教师参加审定. 在此我们向为这套教材做出贡献的同志表示衷心的感谢.

本系列教材自1986年秋季起陆续出版，3年内出齐，并陆续配套出版各门课程的学习辅导书，欢迎广大读者选用并提出宝贵意见.

目　　录

第一章　行列式及其性质

学习指导

本章主要内容是二阶行列式和三阶行列式的概念、性质及其计算法，并在此基础上介绍一下 n 阶行列式. 最后，作为行列式的一个重要应用，介绍克莱姆规则.

本章的重点是二、三阶行列式的概念、性质及其展开法，特别要熟练掌握代数余子式概念及行列式计算法，正确使用克莱姆规则.

本章的难点是对克莱姆规则的证明，如果全部掌握有困难，只要搞清它的证明思路就可以了.

§1.1　二阶行列式

行列式这个重要概念是从解一次方程组(又叫做线性方程组)所引起的. 我们现在就从解这种方程组出发，引入二、三阶行列式的概念. 我们知道任何一个含两个未知数、两个一次方程的二元线性方程组，都可以化成下面的一般形式:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (2) \end{cases}$$

用加减消元法解这个方程组.

为了消去未知量 y，由 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{3}$$

为了消去未知量 x，由 $(2)\times a_1-(1)\times a_2$，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{4}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，方程组(I)的解一定是下面的形式:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases} \tag{5}$$

反过来，这样的 x 和 y 的值也的确适合(I)式．这只要把它代入(I)式直接计算一下就行了．于是我们说当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的时候，方程组(I)有唯一的解，并且这个解是(5)的形式．虽然方程组(I)已经有了公式(5)的解答公式，但不易记忆，因此需要研究一下公式(5)的结构，看看有什么规律可循．首先我们看到公式(5)中的分母是相同的，都是 $a_1b_2-a_2b_1$，它只含有未知量的系数．如果把未知量的系数按照它们在方程组中的位置相应地列成如下形式:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

就会看到，其中左上角及右下角两个数的乘积减去右上角及左下角两个数的乘积恰好就是(5)的分母 $a_1b_2-a_2b_1$．用式子

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

来表示 $a_1b_2-a_2b_1$，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

(6)式叫做二阶行列式，a_1、a_2、b_1、b_2 叫做行列式 (6) 的元素．这四个元素排成二行二列（横排叫行，竖排叫列）．$a_1b_2-a_2b_1$ 叫做二阶行列式的展开式．

再来看公式 (5) 中表达式的分子，x 的表达式的分子 $c_1b_2-c_2b_1$ 可以看作是将 $a_1b_2-a_2b_1$ 中的 a_1 和 a_2 分别换成 c_1、c_2 所得到的．所以

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

同样道理，(5)中 y 的表达式的分子也可表示为

$$a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

这样，公式(5)就可写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\[2em] y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0\right) \qquad (7)$$

为了简便起见，通常用 D 及 D_x、D_y 分别表示(7)式中作为分母与分子的行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

那么方程组(I)的解可以表示成

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases} \quad (D\neq 0) \tag{8}$$

行列式 D 是由方程组(I)中未知量 x, y 的系数组成的，叫做这个方程组的系数行列式. D 中 x 的系数 a_1、a_2 换成方程组(I)的常数项 c_1、c_2，就得到行列式 D_x; D 中 y 的系数 b_1、b_2 换成常数项 c_1、c_2，就得到行列式 D_y.

注：应用上面公式时，首先要把方程组写成一般形式(I)，特别要注意常数项放在等式右边，又因公式中要求 $D\neq 0$. 所以解题时宜于先依次求出 D、D_x、D_y，再代入公式.

例 1 用行列式解方程组

$$\begin{cases} x-2y-8=0 \\ y-3x+9=0 \end{cases}$$

解 先把方程组化为一般形式

$$\begin{cases} x-2y=8 \\ 3x-y=9 \end{cases}$$

计算:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-3\times(-2)=-1+6=5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}=8\times(-1)-9\times(-2)=-8+18=10$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=1\times 9-3\times 8=9-24=-15$$

$$\frac{D_x}{D}=\frac{10}{5}=2, \qquad \frac{D_y}{D}=\frac{-15}{5}=-3$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

例 2 写出下列行列式的展开式,并化简.

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a y \\ m & n \end{vmatrix}$

解 (1)

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)$$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

(2)

$$\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a y \\ m & n \end{vmatrix} = n\log_a x-m\log_a y$$

$$=\log_a x^n-\log_a y^m=\log_a\frac{x^n}{y^m}$$

例 3 求证:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

证明 (1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1=a_1b_2-b_1a_2$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - a_2kb_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1+kb_1)\cdot b_2 - (a_2+kb_2)\cdot b_1$$

$$= a_1b_2 + kb_1b_2 - a_2b_1 - kb_2b_1$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

练 习 题 1

1. 写出下列行列式的展开式，并化简.

(1) $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. 求证:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

3. 用行列式解方程组:

(1) $\begin{cases} 13x-7y-10=0 \\ 19x+15y-2=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{7}{s}+9t=3 \\ \dfrac{17}{s}+7t=5 \end{cases}$ $\left(\text{提示: 设 } x=\dfrac{1}{s}\right)$

§1.2 三阶行列式

我们已经通过解二元线性方程组,引入了二阶行列式.现在再通过解三元线性方程组,来引入三阶行列式. 任何一个含三个未知量、三个一次方程的三元线性方程组,都可以化成下面的一般形式:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & (3) \end{cases}$$

仍用加减消元法解这个方程组.

假设 $c_2\neq 0$, 先由(1)、(2)两个方程,消去未知量 z, 得

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1 \qquad (4)$$

由(2)、(3)两个方程,消去未知量 z, 得

$$(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_3c_3-b_3c_2)y=d_2c_3-d_3c_2 \qquad (5)$$

再由(4)、(5)两个方程, 消去未知量 y, 并把所得的方程两端同除以 c_2, 就可以得出

$$\begin{aligned}&(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)x \\ &\quad =d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2 \qquad (6)\end{aligned}$$

为了书写方便,我们把(6)式简记为

$$Dx=D_x \qquad (7)$$

类似地,可以得到

$$Dy = D_y \tag{8}$$

$$Dz = D_z \tag{9}$$

这里,

$$D_y = a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_2d_1c_3 - a_1d_3c_2$$

$$D_z = a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3 - a_1b_3d_2$$

如果 $D \neq 0$, 有

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases} \tag{10}$$

可以验证(10)就是方程组(II)的解.

和前面一样,为了便于记忆和应用这个解答公式,我们引入三阶行列式的概念.

把九个数排成三行三列,再在两旁各加一条竖线,得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

我们规定它表示

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \tag{12}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

(11)式叫做三阶行列式，组成行列式的每一个数，都叫做它的元素．(12)式叫做这个三阶行列式的展开式，它共有六项，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，且有三项为正，三项为负．

三阶行列式可以按下图展开：

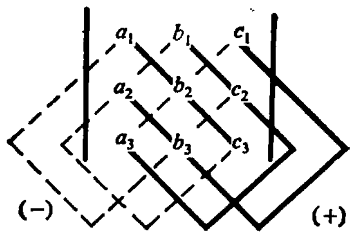


图 1-1

实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号．这种展开三阶行列式的方法叫做对角线法则．

展开三阶行列式的对角线法则，还可以表示成下图：

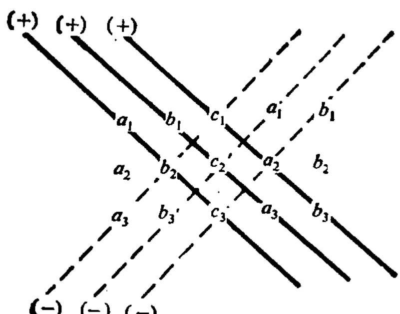


图 1-2

例 1 用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

解 实线上三个元素的积分别是

$1\times(-1)\times3$,

$0\times1\times(-2)$,

$2\times3\times2$.

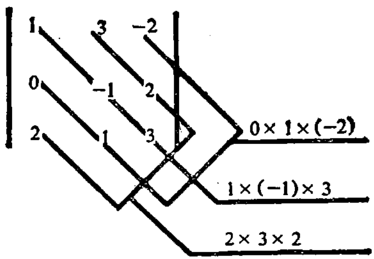


图 1-3

它们的前面应冠以"+"号;

虚线上三个元素的积分别是

$2\times(-1)\times(-2)$,

$0\times3\times3$,

$1\times1\times2$.

它们的前面应冠以"—"号; 所以

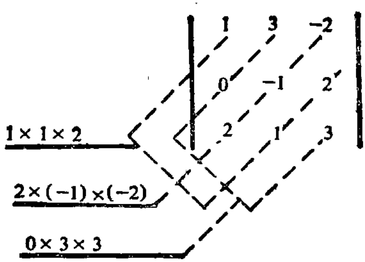


图 1-4