概率论与数理统计

张忠群 著

贵州大学出版社

概率论与数理统计

张忠群 著

贵 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张忠群著. —贵阳:贵州大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-81126-063-2

Ⅰ. 概… Ⅱ. 张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 137970 号

概率论与数理统计

著　　者:张忠群
责任编辑:胡荣胜
封面设计:万　琦
出　　版:贵州大学出版社
社　　址:贵阳市花溪区贵州大学北校区
电　　话:0851-8292971
开　　本:710×1000　1/16
字　　数:287 千字
印　　张:18
版　　次:2008 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
装　　订:北京华裕达印刷有限公司
书　　号:ISBN 978-7-81126-063-2
定　　价:36.00 元

图书若有质量问题,请与本社联系

引　言

概率论（Probability Theory）与数理统计（Mathematical Statistics）是高等院校数学系及其它理工科专业的基础课程．其内容丰富，实用性强，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等等方面都起到非常重要的作用．通过对该课程的学习，既为后继专业课程的学习奠定了基础，亦为数学应用开拓了空间，同时对培养学生的逻辑思维能力、分析解决问题能力、数学建模能力等尤为重要．

概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的数学分支学科．概率是随机事件出现的可能性的量度，它的兴起是随保险事业的发展而产生的，但最初起源确是与博弈问题有关．早在16世纪，意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；17世纪中叶，法国数学家B．帕斯卡（Pascal）、费马（Fermat）荷兰数学家C．惠更斯（Huygens）基于排列组合的方法，研究了较复杂的赌博问题，解决了“合理分配赌注问题”．使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家J．伯努利Bernoulli)，而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后．第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论与数理统计学等学科．数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以便对所考察的问题作出科学的推断或预测，为采取一定的决策和行动提供依据和建议的数学分支学科．数理统计的理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中．统计方法的数学理论要用到很多近代数学知识，如函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学等等，但关系最密切的是概率论，故可以这样说：概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用．但是它们是两个并列的数学分支学科，并无从属关系．

目前，概率与统计的理论与方法进入其他自然科学领域的趋势还

在不断发展．在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，都大量采用概率统计方法．法国数学家拉普拉斯(Laplace)说对了："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题．"英国的逻辑学家和经济学家杰文斯曾对概率论大加赞美："概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为"．

随着社会和科学技术的不断进步，概率论与数理统计学本身的理论发展了，概率与统计的应用更广泛了，社会对概率与统计的要求提高了，人们对概率与统计的需求增强了．特别是近几年来，随着高等院校的扩大招生，具有不同学业水平的新生涌入大学校门，这给大学数学教学带来了新的困难．

近年来，我们在总结多年高师教学经验及精品课程建设的基础上，结合我国普通高中数学新课标，义务教育初中数学新课程标准的有关要求，本着"改革创新，注重结合，突出应用"的原则，立足师范教育的需求，以学生掌握基本理论、形成基本技能为培养目标，编写了本教材．教材力求优化内容和结构，构建具有鲜明高师特色的教学体系；力求通过结合现代教育技术的应用提高学生的综合素质，在教学中取得显著效果．

内容改革历来就是课堂教学改革最重要的方面．本教材在教学内容上具有以下几个特点：

(1) 力求用通俗易懂的语言向学生介绍概率与统计的基本概念、基本理论，突出了对问题的提法、背景和思想方法的阐述，适当削弱了理论的深度．并选插有关的数学史料，把科学的发现、发展过程呈现给学生，创设诱人的知识情境，使学生的思维活动与数学家的思维活动同步．

(2) 通过大量例题、习题讲透基本概念与运算，同时也尽可能地向学生展示本课程在工业、农业、军事、公共事业、经济、管理、医药、教育、体育等多种领域中的应用．并且还注意了突出应用实例的现代特色，从较广阔的角度提供丰富多彩的现代实例，增强数学与社会的贴近度．

(3) 为突出概率论与数理统计学发展迅速、内容丰富、应用广泛

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的特点，穿插进反映与其他学科密切联系的内容，以提高学生的学习兴趣，培养综合解决问题的能力．并结合师范生特点插入了有关教育统计的内容，重点介绍学生成绩的评估，试卷质量的评估，还结合假设检验介绍比较性研究，结合回归分析介绍预测性研究等等．结合教育问题学习概率统计，并用概率统计方法来研究教育问题，从而较好地体现了概率统计课的师范性，增强了教学内容的针对性．

（4）增加了一些与中学相衔接的内容，并从直观和理论两方面注意讲透，如抽样方法、描述性统计等等，这对于学生将来从事中学教学会起到有益的作用．

（5）以往《概率论与数理统计》的教材在很大篇幅上需要讨论计算方法与技巧，如计算组合数、平均数、标准差、相关系数、回归系数等等．计算机的普及使得看似复杂的算式及多个数据处理均可程序化上机，获得圆满的结果．因此，我们将这部分的内容作了削减，重点放在这些式子的含义及结果的解释上．

概率与统计中的许多概念，如频率与概率，独立与相关，偶然与必然等，既是概率统计课的教学内容，又是对学生进行辩证法教育的好材料．例如，随机事件的发生与否是不可预知的，是偶然的，但随着试验次数的增大，它发生的次数却是有规律的；反过来，我们即使知道了某事件发生的概率，但仍不能肯定该事件在下一次试验中一定发生，或一定不发生，也就是说，在混沌中蕴含着规律，在规律中又蕴含有意外．又如，在假设检验中，结论的形式往往是“在 α 的显著性水平下，判断…”，这种形式的结论一方面告诉你推断的结论，另一方面告诉你这个结论在 α 的其他可能性水平下有可能是错误的．这种含否定意义的结论形式是概率统计所特有的，这也是概率统计在各个领域被广泛应用的原因之一．因为世间万物中，能被绝对肯定或绝对否定的事是很少的，如果你苛求获得一个为百分之百的正确结论，那你也许什么也得不到．这种处世的观念和方法应当让学生了解和掌握，概率与统计教材为此提供了大量实际的素材．我们这样做不仅有助于学生对所学知识的理解与记忆，而且对于培养学生的高尚品德，激发学生的学习兴趣，促进学生热爱真理、坚持真理、勇于探索进取也大有益处．

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，恳请广大教师和学生提出宝贵意见，使本书在教学实践中不断完善．本书在编著过程中，参考了许多教材，在此表示感谢！

张忠群

二〇〇八年四月于凉都六盘水

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　随机事件及其概率

§1.1 随机事件及其运算

本节以随机现象为背景，介绍随机事件的概念及其关系，以及随机事件的运算．

1.1.1 随机现象与随机试验

1. 随机现象

在现实世界中，我们常常遇到两类不同的现象：

(1)确定性现象　在一定条件下必然发生某一结果的现象，叫**确定性现象**，也称必然现象或非随机现象．例如，在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；一枚硬币向上抛后必然下落；每天早晨太阳从东方升起等等，都是确定性现象．

经典的物理学等学科，都是研究确定性现象的规律性的，所用到的数学工具有数学分析、几何、代数以及微分方程等．

(2)非确定性现象　在一定条件下，有多种可能的结果，但到底出现哪一种结果事先是不能确定的现象，叫**非确定性现象**，也称为**偶然现象**或**随机现象**．例如，抛一枚硬币，可能是花一面朝上，也可能是数字一面朝上；某生在一次考试中获得的成绩；明天天气的情况等等，都是随机现象．这里的"不确定性"有两方面的含义，一是客观结果的不确定性，二是主观猜测或判断的不确定性．

随机现象是偶然性与必然性的辩证统一，其偶然性表现为在每一次试验前，不能准确地预知哪种结果会发生；其必然性表现为在相同条件下进行大量重复试验时，结果却呈现出某种客观规律性，例如，多次重复抛一枚质地均匀的硬币，我们会发现花一面朝上的次数与数字一面朝上的次数大致相同；又如就投一次篮球而言，NBA球星和非职业球员都有可能投进也可能投不进，但要相同条件下各多次投篮，几乎肯定是NBA球星进球的比例高．我们把随机现象的这种规律称为统计规律性．

概率论与数理统计，简称概率统计，它是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门学科，其任务在于：从表面上看起来错综复杂的偶然现象中找出事物内在的统计规律．这就需要对研究对象进行大量重复试验或观察，找出某一结果发生的可能性．

2. **随机试验**

概率论的理论和方法应用十分广泛,几乎遍及所有的科学领域以及工、农业生产和国民经济各部门. 如应用概率统计方法可以进行气象预报,水文预报和市场预测、股市分析等;在工业中,可用概率统计方法进行产品寿命估计和可靠性分析等. 为此,我们通过随机试验来研究随机现象.

我们把各种科学试验或对某一客观现象进行的一次观察统称为一个**试验**. 如果一个试验具有下述特点:

(1)可以在相同条件下重复进行(可重复性);

(2)每次试验的可能结果不止一个,且在试验之前能明确试验的所有可能结果(确定性);

(3)每次试验总有其中一个结果出现,但在试验之前不能预知哪一个结果会出现(随机性).

则称这种试验为随机试验(简称试验),通常用字母 E 或 $E_1,E_2\cdots$,表示**随机试验**.

例 1.1.1 随机现象的例子.

(1)一天内进入某超市的顾客数;

(2)某种型号电视机的寿命;

(3)用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发,观察弹落点的情况. 结果:弹落点会各不相同;

(4)明天的天气可能是晴,也可能是多云或雨.

例 1.1.2 随机试验的例子.

(1)E_1:掷一颗骰子,观察出现的点数;

(2)E_2:抛一枚硬币两次,观察正面 H,反面 T 出现的情况;

(3)E_3:记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数;

(4)E_4:考察某地区 10 月份的平均气温.

1.1.2 样本空间

我们将试验 E 的所有可能的基本结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω,样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**,记作 ω 或 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$. 注意:样本空间中的元素可以是数也可以不是数.

在例 1.1.2 中,试验 E_1,E_2,E_3,E_4 的样本空间分别为:

$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$. 其中样本点 H 表示"正面朝上",T 表示"反面朝上";

$\Omega_3=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$，其中样本点 ω_i 表示“在该昼夜内接到 i 次呼唤”$(i=0,1,2,\cdots\cdots)$；

$\Omega_4=\{T\mid 28\leqslant T\leqslant 33\}$，其中样本点 T 表示“该地区 10 月份的平均气温为 T 摄氏度”.

其中 Ω_1，Ω_2 的样本点数为有限个，称为有限样本空间．Ω_3，Ω_4 的样本点数为无限个，称为无限样本空间．而 Ω_3 中样本点可按一定顺序排列，称为可列样本空间．Ω_4 中样本点不可列．

1.1.3 随机事件

1. 随机事件

在随机试验 E 中可能发生、也可能不发生的结果称为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 A、B、C，$\cdots$ 表示．它是随机试验中样本空间 Ω 的子集．如果属于事件 A 的某一个基本事件 ω 在随机试验中出现，则称 A 发生，否则，称 A 不发生．

常用随机事件有：

基本事件：由一个样本点组成的单点集称为基本事件，通常用 ω 表示；

复合事件：由若干个基本事件组成的事件称为复合事件，

必然事件：每次试验都必然发生的事件，即样本空间 Ω 称为必然事件；

不可能事件：不包含任何基本事件的事件称为不可能事件，记作 φ．

必然事件和不可能事件是随机事件的两个特殊情况，严格地说它们已经不具有随机性，但我们仍将它们称为事件．

例 1.1.3　投掷一颗骰子的样本空间为：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

事件 $A=\{$出现的点数为偶数$\}=\{2,4,6\}$.

事件 $B=\{$出现的点数大于 4$\}=\{5,6\}$.

事件 $C=\{$出现的点数大于 6$\}=\varphi$.

事件 $D=\{$出现的点数小于 7$\}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$.

注意：1. 我们常用维恩(*Venn*)图来直观表示集合．

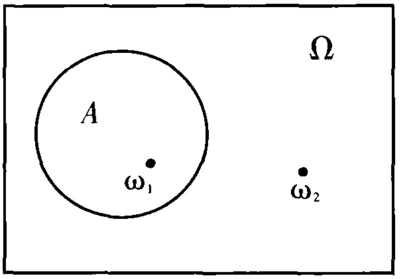

图 1.1

2. 事件的直观意义与集合论意义比较

表 1.1

符　号	集合论解释	概率论解释
Ω	全集	必然事件、样本空间
φ	空集	不可能事件
ω	元素	基本事件、样本点
A	Ω 的子集	事件 A
$\omega \in A$	ω 是 A 中的元素	事件 A 发生
$\omega \notin A$	ω 不是 A 中的元素	事件 A 不发生

1.1.4　随机事件间的关系与运算

在某些问题的研究中，我们往往要讨论多个事件，而这些事件又存在着一定的联系，为了用较简单的事件表示较复杂的事件，下面介绍事件之间的几种主要关系以及作用在事件上的运算.

1. **事件的包含关系**：设在同一个试验 E 中有两个事件 A 与 B，若属于 A 的样本点必属于 B(即 A 中任意一个基本事件都在 B 中)，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$ (或 $B \subseteq A$).

因 $A \subset B \Leftrightarrow$ "若 $\omega \in A$，则 $\omega \in B$"，所以 $A \subset B$ 用概率论的语言表述为："事件 A 发生必然导致事件 B 发生". 例如投掷一颗骰子的试验，$A=\{$出现 3 点$\}$，$B=\{$出现奇数点$\}$，则 A 发生必导致 B 发生，故 $A \subset B$.

2. **事件相等**：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$. 它表示"若 A 发生则 B 必发生，若 B 发生则 A 必发生".

例如掷骰子试验中，记 $A=\{$掷出 3 点或 6 点$\}$，$B=\{$掷出 3 的倍数点$\}$，这两个事件所包含样本点相同，因而 $A=B$.

3. **和事件**：称事件 A 和 B 至少有一个发生所构成的事件为 A 与 B 的和事件，记作 $A \cup B$ (或 $A+B$). 即和事件 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

例如掷一颗骰子观察所得的点数，设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A \cup B=\{1,2,3,5\}$. 又如测试灯泡寿命的试验中，令 $B=\{t \mid t \leqslant 1000\}$ (寿命不超过 1000 小时)，$A=\{t \mid t \leqslant 500\}$ (寿命不超过 500 小时)，则 $A \cup B=B=\{t \mid t \leqslant 1000\}$ (寿命不超过 1000 小时).

事件的和的概念可以推广到有限多个事件的情形：n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生所导致的新事件称为这 n 个事件的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$).

4. **积事件**：称事件 A 与 B 同时发生所构成的事件为 A 与 B 的积事件，记作

AB 或 $A\cap B$.

例如在掷骰子的试验中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $AB=\{4\}$，即只有随机试验出现 4 点时，A 与 B 同时发生 .

事件的交的概念也可以推广到有限多个事件的情形：n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生所导致的新事件称为这 n 个事件的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$（简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$）.

5. **互斥事件**：若事件 A、B 不能同时发生，即 $AB=\varphi$，则称事件 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件 .

例如掷一颗骰子，令 $A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现 4 点$\}$，则有 $AB=\varphi$，即 A 与 B 互斥，$A\cup B=A+B=\{1,3,4,5\}$.

6. **对立(逆)事件**：若事件 A 与事件 B 在一次试验中必有且只有一个发生，则称事件 A 与 B 为对立事件或互逆事件，记为 $B=\overline{A}$.

例如掷一颗骰子，令 $A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现偶数点$\}$，$C=\{$出现 6 点$\}$，则 $AB=\varphi$，且 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$，所以 $B=\overline{A}$，即 B 与 A 是对立事件；但由于 $AC=\varphi$，而 $A\cup C=\{1,3,5,6\}\neq\Omega$，所以 A、C 不是对立事件 .

7. **差事件**：称事件 A 发生而 B 不发生所构成的事件为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$.

例如掷骰子试验中，令 $C=\{2,4,6\}$，$D=\{1,2,3\}$，则 $C-D=C\overline{D}=\{4,6\}$，$D-C=D\overline{C}=\{1,3\}$.

如以平面上某一矩形表示样本空间 Ω，矩形内的每一点表示样本点，用画在 Ω 内的两个小圆形表示事件 A 与 B，则随机事件间的关系与运算可用图 1.2 中的几何图形来表示

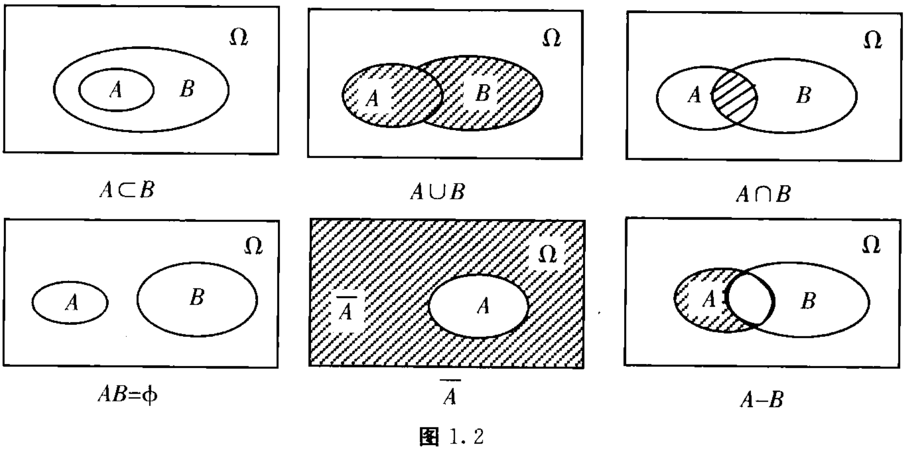

图 1.2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com