21世纪高等院校教材

高等数学与中学数学

李三平 编著

陕西师范大学出版社

高等数学与中学数学 李三平 编著

责 任 人 田均利
封面设计 徐 明

ISBN 7-5613-3719-1

9 787561 337196 >

ISBN 7-5613-3719-1/O·102
定价：18.00元

21世纪高等院校教材

高等数学与中学数学

李三平　编著

陕西师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

遇到傻子/周大鹏著. — 长春:吉林人民出版社,2012.2

ISBN 978-7-206-08395-2

Ⅰ.①遇… Ⅱ.①周… Ⅲ.①散文集—中国—当代
Ⅳ.①I267

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 025479 号

遇到傻子

著　　者:周大鹏　　　封面设计:宋玉秀
责任编辑:陆　雨
吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街 7548 号　邮政编码:130022)
印　刷:北京市凯鑫彩色印刷有限公司
开　本:787mm×1092mm　1/16
印　张:12.25　　　　字　数:170 千字
标准书号:ISBN 978-7-206-08395-2
版　次:2012 年 2 月第 1 版　　　印　次:2012 年 2 月第 1 次印刷
印　数:1-5 000 册　　　定　价:24.00 元

目　录

第一章 绪论

在高等师范院校数学系，开设了门类众多的高等数学课程，例如，数学分析、高等代数、几何（空间解析几何、高等几何）、近世代数、复变函数、实变函数、概率统计、拓扑学、常微分方程、偏微分方程、计算方法等等．这一方面是使将要走上中学教学岗位的毕业生具有一定的数学基础（承担中学数学教学、研究任务及继续学习现代数学知识，并提高自身数学修养），另一方面是使毕业生能利用在高师院校学到的高等数学知识，指导其中学数学的教学和研究工作，也即使他能“居高等数学之高”去临“中学数学之下”．

实际的情况又是如何呢？据调查，大多数在中学数学教学岗位工作的师范院校毕业生，他们的体会是：在自己的教学过程中，大学所学习的高等数学知识几乎没有发挥作用；还有的甚至说：在中学任教多年，已将在大学学过的高等数学知识几乎都“还给”了大学老师；只有少数人体会到，在中学教学中，虽然高等数学知识直接涉及到的并不多，但其原理、思想、观点和方法却时常发挥着作用，那些从事中学数学教学研究和初等数学研究的（这只是极少的一部分）中学教师认为，在他们的教学和科研方面，高等数学所发挥的作用是十分明显的．这无疑是高等师范院校数学教育的“悲哀”．

形成上述状况的原因是多种多样的．第一，由于受“应试教育”的影响，对数学教育的价值“实际需要，文化修养，智力筛选”的前二者已经无暇顾及，只是将数学当作“筛子”用了．由于对数学教育价值的不正确理解，因而许多学生都将“取得好的数学成绩，博得家长和老师欢喜”作为学习数学的重要目的．我们常可见到的现象是，学生身陷数学的套题、技巧之中，奔命于作业、考试之间，教师更是疲于应付，只能将教学研究、科学研究放在次要位置，也就更谈不上与所学习过的高等数学知识建立联系．第二，在我国高等师范院校中，无论是文、史、地，还是理、化、生等专业，所开设的专业课程，都是中学相应课程内容的加深、拓广，螺旋式上升，而数学系的课程设置则是个例外，除了微积分，大学数学课程所开设的高等数学，与中学数学的研究对象、研究方法都有较大的不同，中学数学到大学数学，其知识是直线式上升，而非螺旋式上升．在高师院校数学系的大部分教材中，几乎看不到与中学数学的直接联系，学生难以获得应用高等数学的观点指导中学数学的真实体验．第三，高师院校的教学也存在着一些不足．

张奠宙教授曾指出:我们在高师院校执教多年,深感居高未必能自然地临下. 在大学课程中,只管讲学科知识本身,联系中学实际的任务往往视为累赘,忽略不讲,举个例子,讲实变函数论,大谈勒贝格测度、勒贝格积分,却不屑于谈谈测度与面积、体积之间的内在联系. 对于中学教师来说,也许后者是至关重要的. 对此,我们也有同感. 再看一个具体例子,在大学《近世代数》课程中学习"欧氏环"这一内容,它是解释中学代数中"多项式因式分解"等有关问题的理论基础,但并不是每个学习过这一内容的人都能用它准确地解释如下问题:是不是每个多项式都能进行因式分解? 因式分解需要分解到什么程度? 因式分解的结果是否唯一? 难怪教育部副部长王湛同志指出:师范教育的教学与基础教育改革存在着脱节现象.

我们知道,中学数学教材的叙述,较多地采用了描述性的方法,理论上的要求不可能十分严谨,内容的深度与广度都有一定的局限性. 根据中学数学的教学目的和中学生的年龄特征,这样的处理方法应该说是合理的;但是作为一名中学数学教师,仅仅具备中学教材所涉及的知识(在新课程标准下的必修课内容),那是远远不够的. 即便是在现行教材中的数学知识范围内,有些问题如果不在高等数学的知识背景下来解释,仍将含糊不清,甚至疑问重重. 下面通过几个例子来说明.

例 1　复数为什么不能比较大小? 是否有序?

在教材中对这个问题是一笔带过,即"两个复数只能说明相等或不等,而不能比较大小",为什么不能比较大小? 其实许多中学教师也不能准确解释其原因. 另外,人们通常认为,有了大小,才能排出顺序. 然而,通过高等数学的学习,这种认识是应当改变的,"序"的概念应当有所扩展. 事实上,在"字典序"的意义下,复数是有序的,当然,尽管有序,但两个复数仍不能比较大小(这些我们会在后面的章节中详细叙述).

例 2　一元 n 次方程是否存在公式解(根号解)?

在初中数学教材中就讨论过一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的公式解,其求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,大家都非常熟悉. 针对一元三次方程 $x^3+px+q=0(q,p\in\mathbf{R})$ $\Big($一般形式的一元三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$,可通过方程的变换 $x=z-\dfrac{a}{3}$ 转化为上述形式$\Big)$的求根公式在高师院校数学系《初等代数研究》这门课程中也进行过讨论. 而对于一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$,尽管讨论的不多,但是它也像一元二次、三次方程一样,存在公式解(根号解).

三、四次方程的解法得到后，五次及五次以上方程的解法就成了令人关注的问题. 为了求解一般的五次方程，许多著名数学家耗去了大量精力. 直到 1830 年，法国年仅 19 岁的数学家伽罗华（Galois，1811—1832）在一篇关于《用根式解方程的可能性条件》的文章里，用置换群的理论彻底阐明了代数方程可用代数方法求解（也就是方程存在公式解）所依据的原理.

这样一个看似并不太难的问题，它的解决所依据的伽罗华理论在现在看起来也并不是很容易.

例 3 已知 x,y,z 为实数，且 $x+y+z=1$，试证 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

这是一个很常见的不等式的证明题. 它的证明有很多种方法，可采用基本不等式、柯西不等式来证明. 在这里给出一个在前些年很流行、看似正确的证明方法，请分析该证法的错误所在.

证明 设

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-t, \\ y=\dfrac{1}{3}-2t,(t\in\mathbf{R},\text{为参数}) \\ z=\dfrac{1}{3}+3t, \end{cases} \tag{A}$$

则 $$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+14t^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

这个证法是错误的，可以下面的两种方式来解释. 第一，$x+y+z=1$（B）其变量的自由度是 2，而作了代换（A）后，其变量的自由度却变成了 1；第二，由空间解析几何的知识可知（B）表示一个平面，（A）表示一条直线，错证显然是犯了偷换命题的错误. 因此，若不具备高等数学的知识，要指出错证的错误所在是不容易的.

《高中数学课程标准（讨论稿）》指出，新世纪的高中数学课程，应该在九年义务教育数学课程的基础上，使我国未来公民获得必要的数学素养，以满足个人发展与人类社会进步的需要. 具体地说，应当通过高中数学课程学习做到：（1）使学生获得必要的数学基础知识、基本技能，了解它们的来龙去脉，体会其中的数学思想方法.（2）提高学生直觉猜想、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、演绎证明、反思构建等能力.（3）激发学生学习数学的兴趣，树立学好数学的信心. 使学生具有开阔的数学视野和正确的数学观，认识数学的应用价值、科学价值和人文价值，崇尚数学具有的理性精神，形成批

判性的思维习惯,欣赏数学的美学魅力,从而进一步树立辩证唯物主义世界观.

依据新课程目标,通过与国际数学教育的比较,剖析我国数学教育发展的历史与现状,从时代需要、国民素质、个性发展、全球意识等各方面综合思考,形成了实施和落实新课程标准的基本理念:(1)高中数学课程应具有基础性;(2)高中数学课程应具有多样性和选择性;(3)有利于学生形成积极主动、勇于探索的学习方式;(4)有利于提高学生的数学思维能力;(5)发展学生的数学应用意识;(6)正确处理“打好基础”与“力求创新”;(7)返朴归真,注意适度的形式化;(8)体现数学的人文价值;(9)注重信息技术与数学课程的整合;(10)建立合理、科学的评价机制.

此次高中数学课程改革,在课程理念、课程目标、课程结构、课程内容和评价观念等方面都与原来的教学大纲有诸多不同.已经出版并试行的新教材,不仅在体系上作了重大的调整,而且拓宽了知识的广度,从新的高中数学课程内容的框架可见一斑.新的高中数学课程由六个系列课程构成,分别是 A、B、C、D、E、F 系列,被分为必修课程和选修课程两大部分.

必修课程是每个学生都必须学习的数学内容,它们是:A1:集合、基本初等函数Ⅰ;A2:空间几何、解析几何初步;A3:算法、统计、概率;A4:基本初等函数Ⅱ、解三角形、数列;A5:平面向量、三角恒等变换、不等式.

选修课程是学生可以根据自己的兴趣和对未来发展的愿望进行选择的教学内容.选修课程由 B、C、D、E、F 系列课程组成.B 系列由 B1 和 B2 两个模块组成.其中 B1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其初步应用;B2:统计案例、推理与证明、数系扩充及复数的引入、逻辑框图.C 系列由 C1、C2、C3 三个模块组成.其中 C1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间向量与立体几何;C2:导数及其初步作用、数系的扩充与复数的引入;C3:计数原理、统计、概率.D 系列(文化系列)由 D1、D2、D3、D4 四个专题组成.其中 D1:数学与社会;D2:数学史选讲;D3:中学数学思想方法;D4:趣味数学.E 系列(应用系列)由若干专题组成.如:风险与决策,优选法,统筹法,层次分析,实验设计,简单分形的构造与欣赏,电路设计与代数运算等.F 系列(拓展系列)由若干专题组成.如:平面几何证明,不等式证明及不等式应用,参数方程与摆线,矩阵与几何变换,数列与差分,算法案例分析,中国剩余定理,三等分角与数域扩充,图论初步,编码与解码,球面几何与非欧几何,欧拉公式与紧曲面分类,连分数,混沌现象浅析,对称与群等.

从高中新课程标准给出的课程框架可以看出,该课程框架与原有的教学大纲有很大的不同,必修课程与选修课程的内容都进行了不同程度的调整,特别

是选修课程中涉及了一些当代(或近代)数学的前沿课题. 如风险与决策,编码与解码,紧曲面分类,简单分形的构造与欣赏,三等分角,混沌现象的浅析等. 尽管要求是较初步的,但其中有些内容在大学数学课程中也并未涉及.

我们认为,这一方面是对高师院校数学系的课程设置提出了新的、高的要求,也就是,在注重师范性的前提下,要体现课程基础与先进性的统一,即对那些不能舍弃的经典数学内容尽可能地用现代数学的观点与语言来统率;在教材中尽可能编入已经构成相应学科基础部分的现代数学内容,至少应作一通俗介绍;要体现均衡性与选择性的统一,即使高师院校数学系的基础课和选修课保持一种恰当、合理的比重,并适应学生个性发展的要求;还要体现发展性,即着眼于学生的未来发展,培养终身学习的愿望和能力. 另一方面,要求数学系的学生注重自身思想素质、文化素质、专业素质与获取新知识能力的培养,以大学学到的数学知识为基础,不断接受和学习新的数学知识. 这样,才能使高师院校数学系的毕业生成为适应中学数学课程教学的合格师资,成为新课程改革的中坚力量.

编写本书的主要目的,就是要解决如何在现代数学的观点指导下,加强高等数学与中学数学的联系. 具体有以下几个方面:一是将现代数学(特别是高等数学)的思想、观点和方法渗透到中学数学中去;二是揭示中学数学某些难以解释和处理的问题的高等数学背景;三是通过具体材料或实例展示高等数学对中学数学的指导意义.

思考题

1. 在你的学习或教学经历中,你还遇到哪些在初等数学范围内不能准确解释的初等数学问题?

2. 用初等数学和数学分析的方法证明下题:若二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图象有一点 $M(x_0,y_0)$ 在 x 轴下方,则函数图象必与 x 轴交于两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. (1)给出一个严格的证明;(2)证明 x_0 必在 x_1 与 x_2 之间.

3. 利用行列式计算下题:

$D=\sin(\alpha_1+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_3+\alpha_3)+\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)+\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_3)-\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_1)-\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)$.

第二章 集合论与中学数学

§1 朴素集合论与公理集合论

1. 朴素集合论

通常，人们都把由德国数学家G·康托尔(G. Cantor，1845—1918)在19世纪70年代所创立的集合论称为朴素集合论. 其实，关于集合的概念直到无限集概念的引入，可追溯到欧几里得时代，只是在康托尔之前，对于集合(特别是无限集)的认识和研究，一直处于零碎不全的初级阶段. 到了19世纪，随着变量数学的迅速发展，当时的数学分析为要弄清无穷小量与无穷级数的本质而迫切要求奠定微积分的理论基础，抽象代数已经在研究实际上是无限集的群、环、域等具有的特殊结构；几何学的不断发展已在力图突破图形的直观，走向开辟点集拓扑学的新领域. 这样以来，就急切地需要建立能统帅各个数学分支的理论基础. 康托尔正是在这样的背景下，系统地总结了长期以来数学的认识与实践，创立了一门崭新的数学学科——集合论.

之所以将康托尔所创立的集合论，称之为朴素集合论，是因为他没有明确原始概念，也没有罗列不证自明的思想规定.

康托尔曾对集合的概念作过如下的描述："把一些明确的(确定的)、彼此有区别的、具体的或想象中的抽象的东西作为一个整体，便叫做集合". 但康托尔的描述并不能作为集合概念的定义，因为诸如整体、总体、集合等等都是等价概念. 不懂得什么叫集合，也就说不清楚什么是整体. 还有如下的说法："集合就是具有某种共同属性的事物的全体"，以及现行中学数学教材中"一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集"，同样都不能作为集合这个概念的严格定义，只能作为一种"描述性"的说法. 例如，a，b，c，d都是英文字母，但d却不是集合{a，b，c}的元素；集合{(1，2)，H}中的两个元素——数对(1，2)和氢原子H，很难说它们有什么共同的属性，但却都是集合{(1，2)，H}的元素. 另外，对于上述的描述性说法，也应该有一些限制，否则便会使我们陷于自相矛盾的境地. 例如，"由一切集合构成的集合M"就是一句自相矛盾的说法. 因为既然是"一切集合"，那么M应包含其中，但M又是和"一切集合"都不相同的新集合，道理上说不通.

事实上,对任何一个概念下定义,必须借助于比它更为基本的概念.因此,在数学发展的各个历史阶段,总有一些概念只能通过举例、譬如和说明来对它进行描述.集合就是这样一个基本概念,一切想要对它做出严谨的、合乎数学要求的定义的尝试都没有成功.以致近代的公理集合论研究者们,也都放弃了对集合下定义的作法,把它作为一个不加定义的基本概念(原始概念),正如在几何中以"点、线、面、体"作为原始概念那样.

尽管对集合都没有严格的定义,而且在康托尔创立集合论不久还出现了集合悖论,但其思想、方法仍被数学家广为接受,而且用它作为构筑整个数学大厦的基础.朱梧槚先生曾经这样描述了集合论为什么是现代数学的基础:首先是近代实变函数论的发展,乃是以集合论的建立作为其前提的,没有集合论,显然不会有近代的测度论,不会有描述性的实变函数论.在近代数学的发展中,抽象空间理论的研究,具有极重要的地位,在这里,几何的概念与分析的方法融化在一起.但各种抽象空间都无非是具有各种特殊结构的无限集,它们不仅以集的概念作为其基础,也从集合论中吸取了研究方法.又如近世代数主要是探讨具有某些结合规律的元素系统的构造,在这里集合的概念当然也是基本的,而集合论中的思想方法也同样渗透进代数的领域.当然,在现行的中学数学教材及大学数学教材(除数学系的数学基础类课程外)所讲的集合论知识,也正是康托尔的集合论.

康托尔在创立朴素集合论时,所依据的基本原则或思想方法主要是概括原则、外延原则、一一对应原则、延伸原则、穷竭原则和对角线方法.其中概括原则与外延原则是用来构造集合并确定集合与集合相等的,是康托尔建立集合论的两个重要的思想方法.

概括原则　就是任给一个性质 P,我们就能把所有满足所给性质 P 的对象,也仅由这些具有性质 P 的对象汇集在一起而构成一个集合.用符号可表示为

$$G=\{g \mid P(g)\}.$$

其中,g 表示 G 的任一元素,$P(g)$ 表示元素 g 具有性质 P.

例1　由方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合,可以表示为

$$\{x \mid x^2-1=0\}.$$

概括原则的另一表达是

$$\forall g(g\in G\leftrightarrow P(g)).$$

其中,$\forall g$ 表示"对每一个 g",而 $g\in G\rightarrow P(g)$ 表示"G 的元素具有性质 P",而

$g \in G \leftarrow P(g)$表示"具有性质P的对象为G的元素".

外延原则　集合由它所含的元素唯一确定. 两个集合,当且仅当它们的元素完全相同时,称它们是相等的. 用符号可表示为

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

有了上述两个原则后,再通过$\subseteq$、$=$、$\cup$、$\cap$等关系和运算,就能用符号来表达许多数学公式和内容了.

例2　设全集$U=\mathbf{R}$,已知$A=\{x \mid -5<x<5\}$,$B=\{x \mid 0 \leqslant x<7\}$,求$A \cap B$,$A \cup B$,$(C_U A) \cap (C_U B)$,$(C_U A) \cup (C_U B)$,$C_U(A \cap B)$,$A \cup (C_U B)$.

解　$A \cap B=\{x \mid 0 \leqslant x<5\}$,

$A \cup B=\{x \mid -5<x<7\}$,

$(C_U A) \cap (C_U B)=\{x \mid x \leqslant -5$ 或 $x \geqslant 7\}$,

$(C_U A) \cup (C_U B)=\{x \mid x<0$ 或 $x \geqslant 5\}$,

$C_U(A \cap B)=\{x \mid x<0$ 或 $x \geqslant 5\}$,

$A \cup (C_U B)=\{x \mid x<5$ 或 $x \geqslant 7\}$.

2. 公理集合论

在数学发展的历史上,曾经出现过三次大的数学危机.

第一次数学危机产生于公元前5世纪,毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580－568生,501－500卒)学派的门徒、希腊人希伯苏斯(Hippasus,公元前500年左右)利用辗转丈量检验法发现并证明了"存在两条不可公度的线段(即正五边形的边长和对角线长是不可公度的)",它直接否定了毕达哥拉斯学派的论断:"任何两条线段都是可公度的(即任何两条线段,它们的长能表示成整数比)",从而导致了数学史上的第一次危机. 过了近半个世纪,希腊数学家攸多克萨斯(Eudoxus,公元前408－355)发现了与实数理论密切相关的逼近法,使得数学渡过了这次危机.

数学史上把18世纪微积分诞生以来,在数学界出现的混乱局面称为数学的第二次危机. 在17世纪和整个18世纪,由于微积分理论的产生及其在各个领域的广泛应用,使得微积分理论得到了飞速的发展. 然而,当时整个的微积分理论却是建立在后来被证明是包含了逻辑矛盾的无穷小概念上,这样,出现危机就在所难免.

无穷小分析的主要特点在于"无穷小量"的自由应用,正因为如此,微积分在创建之初遇到了难以摆脱的困境. 我们以求自由落体的瞬时速度为例来

说明.

为求自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$,在 $t=t_0$ 时的瞬时速度,首先计算时间间隔 Δt 内的平均速度:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=gt_0+g\Delta t,$$

然后,令 $\Delta t=0$,可得在 $t=t_0$ 时的瞬时速度 gt_0,但 $\Delta t=0$ 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0}{0}$,这是一个没有意义的式子;若 $\Delta t\neq 0$,则$\frac{\Delta s}{\Delta t}$中的 Δt 不论多么小,平均速度也不等于瞬时速度.

这就是说 Δt 在同一个问题中,要同时担任两个不同(实际上是互相矛盾)的角色,这在数学中是不能允许的.

为了摆脱困境,数学家们对微积分的基础展开了深入的研究,直到解除了数学的第二次危机. 在这个过程中,首当其冲的是法国数学家柯西(Cauchy,1789-1857)发展和建立了极限理论,戴德金(Dedekind,1831-1916)又在实数理论的基础上,证明了极限理论的基本定理,康托尔与魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815-1897)也都加入了为微积分理论寻找牢固基础的工作,提出了取代无穷小方法的 $\varepsilon-\delta$ 方法.

一般认为,由于严格的实数理论和极限理论的建立,第一次、第二次数学危机已经得到解决. 在 19 世纪末,当数学分析实现了严密化,并把集合论作为数学的统一基础,当时的数学家都喜气洋洋,非常乐观. 在 1900 年于巴黎召开的第二届国际数学家大会上,法国大数学家庞开莱(Poincare,1854-1912)甚至宣称:"数学的严格性,看来今天才可说是实现了". 然而,这种乐观持续的时间并不长,事隔不到两年,就出现了震惊西方哲学界、逻辑学界和数学界的罗素(Russell,1872-1970)悖论(Paradox).

罗素悖论　记 $M=\{x \mid x\notin x\}$,此时,若 $M\in M$,则由 M 的定义有 $M\notin M$;若 $M\notin M$,则符合构成 M 中元素的条件得 $M\in M$.

为了帮助人们更容易地理解,罗素在 1919 年把它改写为"理发师悖论",即李家村上所有有刮胡子习惯的人可分为两类,一类是自己给自己刮胡子的,另一类则是自己不给自己刮胡子的. 该村有一个有刮胡子习惯的理发师声称:"给而且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子". 现在要问这个理发师属于哪一类人? 如果说他是属于自己给自己刮胡子的一类,则按他自己的约定,他

不应该给自己刮胡子,因此是一个自己不给自己刮胡子的人;如果说他是属于自己不给自己刮胡子的一类,则按他自己的约定,他必须给他自己刮胡子,因此他又是一个自己给自己刮胡子的人了. 那么,这个理发师究竟属于哪一类呢?种种说法,都将使人陷于矛盾之中.

其实,在罗素悖论出现之前的1899年,康托尔就发现了所谓的康托尔悖论,只是在当时并未引起人们的足够重视.

康托尔悖论　设 M 是由一切集合构成的集合,那么它的幂集(即由 M 的所有子集作为元素构成的集合)$P(M)$ 是 M 的子集,即 $P(M)$ 和 M 的一个子集一一对应.

但由康托尔定理知,任何集合 M 的基数 $\overline{\overline{M}}$ 小于幂集 $P(M)$ 的基数$\overline{\overline{P(M)}}$,$P(M)$ 不可能和 M 之间建立一一对应关系,更不可能和 M 的子集建立一一对应关系,这就自相矛盾了.

集合悖论的出现,动摇了整个数学的基础,使得人们怀疑我们正在进行的数学推理是否可靠,从而引发了数学史上的第三次数学危机. 除了悖论之外,在集合论中还有许多不清楚的问题,比如,到现在为止,还没有解决康托尔提出的"连续统问题":

是否存在这样的集合,它的势介于自然数集的势与直线上点集的势之间?

为了避免发生悖论并解释集合论中的一些问题,数学家们在努力寻找各种各样的解决方案,建立集合论的公理体系就是其中的方案之一. 这里我们对影响最广且被大多数数学家所接受的ZF公理体系做一介绍,它是由策梅罗(Zermelo,1871-1953)在1908年提出,后经弗兰克尔(Fraenkel,1891-1965)进一步明确和补充而形成的. 在这个体系中,基本概念是集合、元素,主要关系是元素 x 属于集合 M,或表示为:$x \in M$. 此外,还运用逻辑联词、全称量词和存在量词以及命题形式的概念.

策梅罗——弗兰克尔公理体系(ZF)是由以下一组公理刻画的:

Ⅰ. 外延公理　对于任意两个集合 A,B,都有 $A=B \Leftrightarrow$ 若 $x \in A$,则 $x \in B$,而且若 $x \in B$,则 $x \in A$.

Ⅱ. 空集合存在公理　存在一个集合,不含任何元素,记为 $\varnothing$.

Ⅲ. 单元素公理　如果 a 是任何对象,则存在集合 $\{a\}$(单元素集),它含且只含元素 a.

Ⅳ. 配对公理　如果 a 和 b 是两个对象,则存在一个集合含且只含元素 a 和 b,其中 a,b 是无序的(配对公理也称为无序对集合存在公理).

有序对则规定为 $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$,显然 $(a,b)\neq(b,a)$. 这样就给定了

(a,b)中元素的顺序:a为第一元,b为第二元.

Ⅴ. 幂集公理　对于任意集合M,都有一个集合T,T中包含且仅包含M的一切子集作为其元素. 此时T称为M的幂集,记为$P(M)$.

Ⅵ. 并集公理　对于每一个集族$\{A_\alpha\}=\mathscr{A}$,存在一个集合S,它含有且仅含有这些元素,这些元素属于某一个集合A_α(集族是指由集合组成的集合).

由公理Ⅰ可得,存在不多于一个集合具有所需要的性质,具有上述性质的集合S称为属于集族$\mathscr{A}$的集合的并集,记作$S=\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$或$S=\bigcup\limits_{\mathscr{A}_\alpha\in A}A_\alpha$.

如果属于集合B的任一元素也属于A,则称B是A的子集或称B含于A中.

Ⅶ. 无穷公理　存在这样的集族$\mathscr{A}$,它含有空集$\varnothing$,并且$\mathscr{A}$含有每一个集合X的同时还含有由X的全部元素及X本身组成的集合Y.

因此,$\mathscr{A}$含有如下集合

$$\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing\{\varnothing\}\},\cdots$$

当然,$\mathscr{A}$还可以含有其他的集合. 若是按照上面的形式,$\mathscr{A}$实际上是自然数集. 这就是说,由公理Ⅶ很容易得到如下结论:

存在一个集合,它的元素恰好就是所有自然数.

Ⅷ. 分离公理　若一个集合论公式命题$E(x)$对集合M的所有元素都有定义,则存在M的一个子集M_0,其中含且只含M中使$E(x)$为真的那些元素x. 即

$$M_0=\{x\,|\,x\in M\text{ 且 }E(x)\}.$$

由公理Ⅷ,可以肯定两个集合A、B的交集是存在的,这只须令$M=A$,$E(x)$为$x\in B$即可. 同样也可以肯定两个集合的差集和集合的补集是存在的.

另外,分离公理是在$E(x)$限制下,确定出集合M的一个子集M_0,所以分离公理又称子集公理.

Ⅸ. 替换公理　对于任何命题公式$A(x,y)$,如果对任意集合x,都有唯一的集合y,使得$A(x,y)$成立,那么对任意集合S_1,有一个集合S_2,使得$S_2=\{a\,|\,b\in S_1\text{,且 }A(a,b)\}$.

公理Ⅸ即是说,对一个具有一对一性质的命题$A(x,y)$,可以由集合S_1(关于某些x的集合),经$A(x,y)$确定其对应值的集合S_2(关于某些y的集合).

Ⅹ. 正则公理　对于任一非空集合S,都有一集合m存在,使得$m\in S$且$m\cap S=\varnothing$. S中具有这样性质的元素,称为极小元.

正则公理也称为基础公理,为了便于理解,我们结出它的等价形式:

每个非空集合S都有最小元.

一个集合中非集合的个体元素,称为该集合的本元. 一个集合中的本元一