普通高等教育力学“十一五”规划教材

振动力学与工程应用

ZHENGDONG LIXUE YU GONGCHENG YINGYONG

王 伟 赖永星 苗同臣 李静斌 编著

郑州大学出版社

普通高等教育力学“十一五”规划教材

振动力学与工程应用

ZHENGDONG LIXUE YU GONGCHENG YINGYONG

王 伟　赖永星　苗同臣　李静斌　编著

郑州大学出版社

内容简介

本书根据高等院校工程力学专业“振动力学”课程的教学要求，结合多年来的教学和科研实践，参考多种现有的与振动有关的教材及专著编写而成。全书共分9章，包括：导论、单自由度系统自由振动、单自由度系统强迫振动、单自由度系统振动理论的应用、两个自由度系统的振动、多自由度系统的振动、弹性体振动、振动分析中的数值方法和工程中振动问题的应用实例。书中各章末附有相当数量的例题和习题，部分习题附有参考答案，便于读者练习查阅。

本书可作为高等院校工程力学专业本科生的“振动力学”课程教材，也可作为机械工程、土木工程、水利工程等专业的本科生和硕士生以及从事与振动相关工作的工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

振动力学与工程应用/王伟等编著. —郑州：郑州大学出版社，2008.8
普通高等教育力学“十一五”规划教材
ISBN 978-7-81106-912-9

Ⅰ.振… Ⅱ.王… Ⅲ.工程力学-振动理论-高等学校-教材 Ⅳ.TB123
中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第092256号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路40号　　邮政编码：450052
出版人：邓世平　　发行部电话：0371-66966070
全国新华书店经销
河南蓉泰印刷有限公司印制
开本：787 mm×1 092 mm　1/16
印张：18.75
字数：458千字
版次：2008年8月第1版　　印次：2008年8月第1次印刷

书号：ISBN 978-7-81106-912-9　　定价：28.00元

本书如有印装质量问题，由本社负责调换

前　言
Preface

在现代工程技术中,任何在役结构和机械设备都承受着动态荷载的作用,因此,对其进行动力分析和研究越来越重要。数值计算技术和动态测试技术的飞速发展为复杂动力问题的解决提供了有力的工具。作为动力问题分析和研究的入门课程,“振动力学”是高等院校工程力学专业的一门重要的学科基础课,也是机械、土木、水利、航空、航海等工程专业的本科生和研究生的一门重要的专业基础课(在这些专业中课程名称可能不是振动力学,但基本内容是一致的)。

本书根据工程力学专业“振动力学”课程教学大纲要求,结合多年来教学和科研实践编写而成。全书共分9章。第1章为导论,介绍机械振动的基本概念、振动系统的分类及研究方法;第2章、第3章介绍单自由度系统的自由振动和强迫振动;第4章着重介绍单自由度系统振动理论的应用,举例翔实,内容丰富;第5章、第6章介绍两个自由度和多自由度系统的振动,以为研究离散系统的振动问题奠定较为扎实的基础;第7章介绍弹性体振动,为研究连续系统的振动问题提供一定的理论基础;第8章介绍振动分析中的数值计算方法,为振动问题的数值计算提供一定的基础;第9章为工程中振动问题的应用实例,介绍作者近期从事科研工作的几个例证。

本书在编写过程中注意到以下几点:

1. 在篇幅限制范围内突出重点,重视基础内容,对基本概念、基本方法和振动机理分析翔实。本书未包括非线性振动和随机振动,在可能的条件下另行编著。

2. 将机械类专业的“机械振动”课程和结构类专业的“结构动力学”课程的基本内容相结合,突出力学基础,适当地介绍振动的应用,使其覆盖面更为广泛。

3. 本书给出了大量的例题和习题,取材典型,便于不同专业和层次的读者联系和巩固振动分析的基本方法和技能。

本书在编著过程中,参考了许多文献资料,在此对这些文献资料的作者们表示感谢!郑州大学陈淮教授审读了本书稿,提出了不少意见和建议,在此也一并表示感谢!

限于编著水平,书中欠缺和不妥之处在所难免,敬请读者不吝指正。

编著者

2008年1月

目录 CONTENTS

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 导论

1.1 机械振动概述

机械振动是一种特殊形式的运动。对于任意给定的机械系统，在其运动过程中，将在其平衡位置附近作往复的运动。这种形式的运动，广泛存在于工程技术和日常生活中。如：桥梁与房屋的振动、飞行器和船舶的振动、机床和刀具的振动、各种动力机械的振动；在生活中，心脏的跳动、钟摆的摆动、琴弦的振动、车厢的晃动、海水的波动等等，都是属于机械振动的范畴。

在机械工程中，振动将影响精密仪器的功能，降低机械加工的精度和光洁度，加剧机械构件的疲劳和磨损，从而缩短机器的使用寿命。

在土木工程中，振动可能使结构发生大变形破坏或疲劳破坏，地震就是明显的例证。在工程史上，由于振动引起的事故很多。如美国的 Tacoma Narrows 吊桥倒塌事故就是世界闻名的一例。该桥主跨长 853.4 m，宽 11.9 m，于 1940 年 7 月 1 日因风载荷作用产生自振，历时一小时，振动 720 次，使整个吊桥彻底毁坏。

在水利工程中，由于振动造成各类闸门和堤坝破坏的事例也是屡见不鲜。

在化工工业中，压缩机组的振动、管道系统的振动，将增加能源损耗，降低生产效率，以至危及安全生产。

在生活中，振动产生强烈的刺激，引起噪声，形成公害，直接危及人们的身心健康；飞机、车辆、船舶的振动，降低了舒适度，劣化乘载条件；在振动环境下工作，容易产生疲劳，在强烈振动条件下工作，甚至会缩短人的寿命。据国外运动实验报告：动物在加速度$10g$以上将发生死亡，其肺、膀胱、消化器官出血。人在振动作用下，血压升高，心速加快，血管末梢收缩，消化器官受到抑制。

但是，机械振动也有它有利的一面，没有振动，就没有各种发声器（包括人的声音）以及计时的钟表。近几十年来，在矿山机械、铸造机械、粮食加工机械、建筑机械中，陆续出现了许多种利用机械振动的设备。振动运输、振动筛选、振动研磨、振动抛光、振动沉桩等等，它们极大地改善了劳动条件，成十成百倍地提高了劳动生产率。可以预见，随着生产实践和科学技术的不断发展，人们对振动过程的认识将逐步深化，机械振动的利用将会日益广泛。

因此，我们研究机械振动的目的，就是为了掌握各种机械振动的机理，了解振动的基本规律，从而能有效地设法消除或隔离有害的振动，防止或限制可能产生的危害；同时，尽

量利用机械振动积极的一面,使它为我国建设服务。

本书重点讲述机械振动的基本理论和计算方法,同时介绍作者多年来进行的机械振动在工程应用中的实例,从而使读者为今后从事这方面的理论研究和应用打下一个初步基础,并为工程应用起到抛砖引玉的作用。

1.2 振动系统及参量

任何机器、结构物或它们的零部件,都具有质量和弹性,因而都可以发生振动,将它们科学地抽象简化成另一个力学模型,称为振动系统,简称振系。振动系统模型可分为两大类:离散系统(或称集中参数系统)与连续系统(或称分布参数系统)。

离散系统是由集中参数元件组成。基本集中参数有3个:质量、弹簧和阻尼器,以图1-2-1表示。质量(包括转动惯量)模型,只具有惯性。弹簧模型,只具有弹性,其本身质量一般情况下可略而不计。弹性恢复力与变形的一次方成正比的弹簧称为线性弹簧。阻尼器模型,既不具有惯性也不具有弹性,它是耗能元件,在系统运动时产生阻力。阻力与速度的一次方成正比的阻尼器称为线性阻尼器。

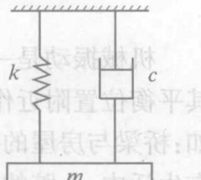


图 1-2-1 m-k-c 系统

因此,离散系统可简称为 m-k-c 系统。

连续系统都由弹性体元件组成,典型的弹性体元件有杆、梁、轴、板、壳等等。弹性体的惯性、弹性与阻尼是连续分布的,故亦称为分布参数振动系统,若参数分布为均匀的则称为均布参数系统。

确定一个振动系统空间位置或运动规律所需要的独立坐标个数称为振动系统的自由度数。

如图1-2-2所示的机床系统,如果只限考察机床与基础的上下整体振动,那么只需要用偏离平衡位置的一个坐标 x 就可以完全确定振系的位置和运动规律,所以,此系统就可视为一个自由度振动系统。

图 1-2-2 机床系统及简化模型

类似地,限制在一个铅垂平面内摆动的单摆,以及限制于绕固定轴作扭转振动的扭摆(图1-2-3),也都是一个自由度振动系统。

图1-2-4给出了两个自由度振动系统的例子。假定:(a)中的物体 A 和 B 只能沿直线

平动；(b) 中的圆盘 C 和 D 只能绕水平轴转动，而轴具有弹性；(c) 中的刚杆 AB 限于在一个铅直面运动，两端弹性支承，其刚度系数 $k_1 \neq k_2$，确定这些系统的空间位置各需要两个独立的坐标，故称为两个自由度振动系统。

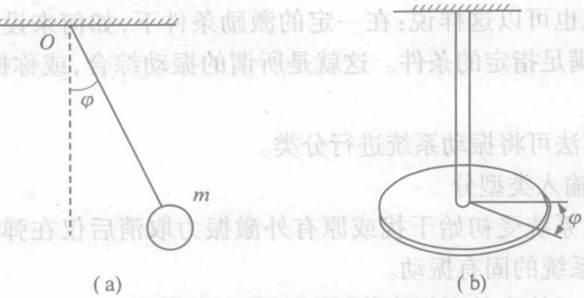


图 1-2-3　单自由度振动系统

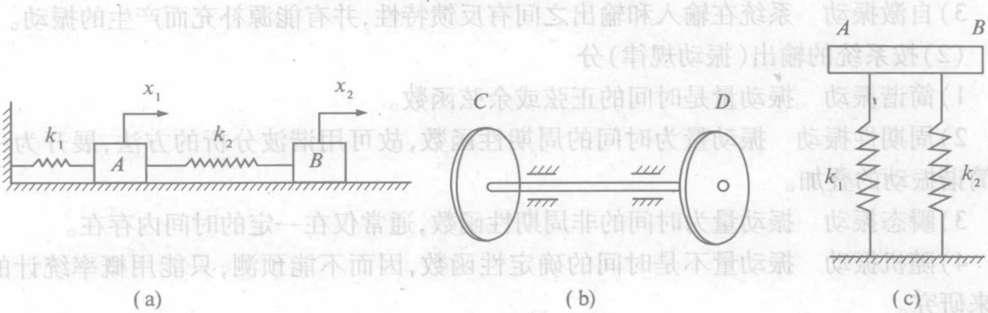


图 1-2-4　两自由度振动系统

弹性体系统可以看做由无限多个质点所组成，各质点之间有着弹性连接，只要满足连续条件，各质点的任何微小位移都是可能的，因此一个弹性体振动系统有无限多自由度，所以，弹性体系统也可称为无限多自由度振动系统。

1.3　振动系统的分类及研究方法

对任何机械设备、工程结构或者零部件所组成的振动系统，都可以表示为如图1-3-1所示的框图：

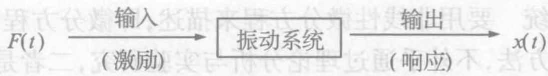


图 1-3-1　振动系统模型

振动系统表示系统本身的动力特性，即系统的固有参量 m、k、c，外界对于系统的输入，包括初始干扰、外激振力，统称为激励。系统在输入下产生的输出通常称为系统的动态响应，简称为响应，其形式可以是位移、速度、力等。

由此可以得出以下 3 类问题：

(i) 已知系统的激励和系统的动力特性求系统的响应，称为振动分析。

(ii) 已知系统的动力特性和系统的响应，来反推系统的输入(激励)，称为振动的环境

预测。

(iii)已知系统的激励和响应,确定系统的动力特性,称为振系的动力特性测定,或称为系统参数识别。

第(iii)种情况也可以这样说:在一定的激励条件下,如何来设计振动系统的动力特性,使系统的响应满足指定的条件。这就是所谓的振动综合,或称振动设计,亦可称为系统识别。

按照不同的方法可将振动系统进行分类。

(1)按系统的输入类型分

1)自由振动　系统受初始干扰或原有外激振力取消后仅在弹性恢复力作用下所产生的振动,也称为系统的固有振动。

2)强迫振动　系统在外激振力作用下所产生的振动。

3)自激振动　系统在输入和输出之间有反馈特性,并有能源补充而产生的振动。

(2)按系统的输出(振动规律)分

1)简谐振动　振动量是时间的正弦或余弦函数。

2)周期性振动　振动量为时间的周期性函数,故可用谐波分析的方法,展开为一系列简谐振动的叠加。

3)瞬态振动　振动量为时间的非周期性函数,通常仅在一定的时间内存在。

4)随机振动　振动量不是时间的确定性函数,因而不能预测,只能用概率统计的方法来研究。

(3)按系统的自由度分

1)单自由度系统　有一个独立坐标就可确定系统的振动。

2)多自由度系统　用多个独立坐标才能确定系统的振动。

3)弹性体振动　须用无限多个独立坐标(位移函数)才能确定系统的振动,也称为无限多自由度振动系统,以区别于单自由度和多自由度振动系统。

(4)按描述系统的微分方程分

1)线性振动系统　用常系数线性微分方程来描述,它的质量不随运动参数(如时间、坐标、速度、加速度等)而变化,而且系统的弹性力与阻尼力可以简化为线性模型,也就是说它们分别与位移和速度的一次方成正比。

2)非线性振动系统　要用非线性微分方程来描述,即微分方程中出现非线性项。

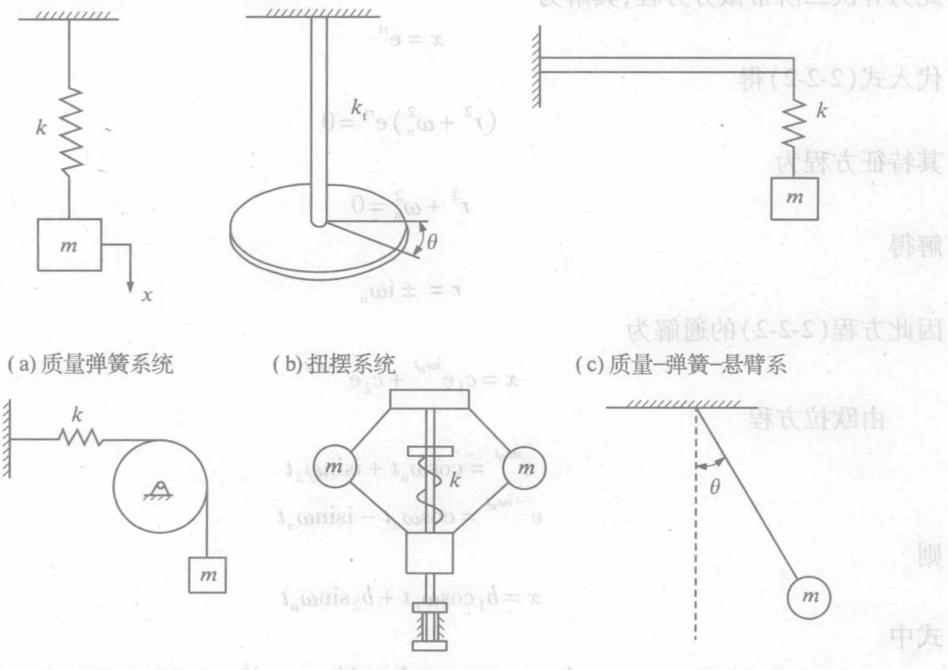
解决振动问题的方法,不外乎通过理论分析与实验研究,二者是相辅相成的。在大量实践和科学实验基础上建立起来的理论,反过来对实践起一定的指导作用,而从理论分析得到的每一个结论都必须通过实践来验证,并经受实践的检验,才能确定它是否正确。在振动问题的理论分析中,大量地应用了数学工具,特别是计算机的日益发达,为解决复杂结构的振动问题提供了强有力的手段,而近年来得到迅速发展的振动测试技术又为振动问题的试验、分析与研究展现了广阔的前景。

第2章 单自由度系统自由振动

本章的主要任务是建立描述振动系统的各参量及其关系，建立振动系统的数学模型，使之振动的概念理想化，为进一步研究较复杂的系统振动提供理论基础。

2.1 引 言

所谓单自由度系统是指对于给定的振动系统，可以用一个独立的坐标及其对时间的变化来确定系统的位置及其运动规律。这种系统在日常生活和工程实际中极为广泛地存在。如图 2-1-1 所示的几例可说明之。



(a) 质量弹簧系统　(b) 扭摆系统　(c) 质量–弹簧–悬臂系

(d) 质量–滑轮–弹簧系统　(e) 离心调速器系统　(f) 单摆系统

图 2-1-1　单自由度振动系统

在建立系统的振动方程时，除摆动问题外的平动问题，都可选取系统的静平衡位置为坐标原点，在建立振动方程时，可不考虑竖向重力荷载的影响。以下如不特殊说明，振动位移 $x(t)$ 都是相对于静平衡位置的振动响应。

建立系统振动方程有两大类方法：矢量法，即力素平衡法，如牛顿第二定律、达朗伯原

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

理;标量法,即采用能量原理的方法,如虚功原理、拉格郎日方程等。一般情况下,简单情况采用力素平衡法,复杂情况采用能量原理法来建立振动方程。

2.2 自由振动系统

2.2.1 m-k 系统的自由振动

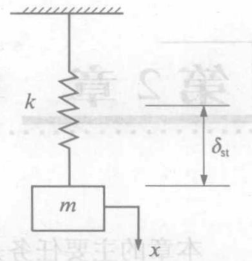


图 2-2-1 m-k 振动系统

m-k 系统的自由振动,如图 2-2-1 所示,即系统仅在弹性恢复力的作用下的自由振动。其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2-2-1}$$

令

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

式(2-2-1)可写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2-2-2}$$

此为齐次二阶常微分方程,其解为

$$x = e^{rt}$$

代入式(2-2-2)得

$$(r^2 + \omega_n^2)e^{rt} = 0$$

其特征方程为

$$r^2 + \omega_n^2 = 0$$

解得

$$r = \pm i\omega_n$$

因此方程(2-2-2)的通解为

$$x = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

由欧拉方程

$$e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t$$

$$e^{-i\omega_n t} = \cos\omega_n t - i\sin\omega_n t$$

则

$$x = b_1\cos\omega_n t + b_2\sin\omega_n t \tag{2-2-3}$$

式中

$$b_1 = c_1 + c_2,\quad b_2 = i(c_1 - c_2)$$

b_1、b_2 是两个待定常数,由振动的初始条件决定。

由式(2-2-3)可以看到,一个 m-k 系统的自由振动包含两个频率相同的简谐振动,一个正比于 $\cos\omega_n t$,另一个正比于 $\sin\omega_n t$,这样的两个同频率的简谐振动,合成后仍然是一个简谐振动,并可用下式表达

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{2-2-4}$$

式中

$$A=\sqrt{b_1^2+b_2^2},\quad \varphi=\arctan\frac{b_1}{b_2}$$

简谐振动的圆频率 ω_n 称为固有圆频率，且为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\quad (1/\mathrm{s}) \tag{2-2-5}$$

频率 f 为

$$f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\quad (\mathrm{Hz}) \tag{2-2-6}$$

周期 T 为

$$T=\frac{1}{f}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\quad (\mathrm{s}) \tag{2-2-7}$$

振动系统的固有频率和周期，仅决定于系统本身的物理性质——系统的质量 m 和弹性刚度 k，与初始条件无关。这种线性系统自由振动所具有的性质称为等时性，因此，系统的质量 m 和弹性刚度 k 一旦确定，系统的固有频率就是一个定值。

式(2-2-3)中的两个待定常数 b_1、b_2 必须根据初始条件来决定。设当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，不难解出

$$x=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2-2-8}$$

式(2-2-8)称为振动系统对初始条件 x_0 和 $\dot{x}_0$ 的响应，同时根据式(2-2-4)可求出

$$\left.\begin{aligned}A&=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}\\ \varphi&=\arctan\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}\end{aligned}\right\} \tag{2-2-9}$$

A 称为系统自由振动的振幅，它表示质量块离开静平衡位置的最大位移；φ 称为初位相，且决定于振动系统的初始条件。

2.2.2　确定系统固有频率的静变形法

由振动系统的静变形来确定其固有频率，往往是非常有效的。

对于 m-k 系统，在静平衡位置有静伸长 δ_{st}，其弹性恢复力为 $k\delta_{st}$，由平衡条件

$$mg=k\delta_{st}$$

可得到

$$\frac{k}{m}=\frac{g}{\delta_{st}}$$

由式(2-2-5)知

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}$$

则

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

或

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{2-2-10}$$

由此可知，只要知道系统的静变形 δ_{st}，就可以直接计算系统的固有频率，这在有些问题中，不能直接给出系统的弹性刚度 k 时，利用它计算固有频率是比较方便的。

例 2-2-1 一个 m-k 振动系统（图 2-2-2），已知其静变形为 δ_{st} = 0.6 cm，求系统的固有频率。

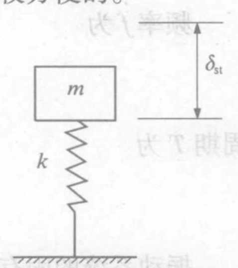


图 2-2-2 m-k 振动系统

解 质量为 m 的物体，其重量为 mg，在自身重量作用下的静变形为 δ_{st}，则有

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}, \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{st}}$$

若变形以厘米计，$g = 980\ \text{cm/s}^2$，则

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}} = 3.13\sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} \quad (\text{rad/s})$$

或

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 4.98\sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} \quad (\text{Hz})$$

将已知 $\delta_{st} = 0.6$ cm 代入，此系统的固有频率为

$$f_n = 4.98\sqrt{\frac{1}{0.6}} = 6.4 \quad (\text{Hz})$$

例 2-2-2 设有一悬臂梁（图 2-2-3），长度为 L，抗弯刚度为 EI，自由端有一集中质量 m，梁本身自重不计，试求此系统的固有频率。

解 由材料力学知道，悬臂梁在自由端由集中力 mg 引起的静挠度为

$$\delta_{st} = \frac{mgL^3}{3EI}$$

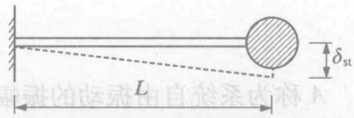


图 2-2-3 悬臂梁

由式(2-2-10)可得

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}$$

如果上述悬臂梁为变截面梁，不易求得静变形 δ_{st}，可用实测的方法求得 δ_{st} 代入式(2-2-10)，同样可求得此系统的固有频率。

例 2-2-3 一刚性杆（图 2-2-4），一端铰接，另一端由一个刚度为 k 的弹簧支撑，刚性杆中间有集中质量 m，试确定此系统的固有频率。

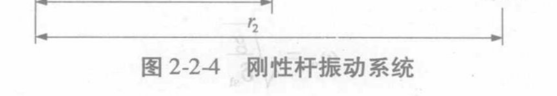


图 2-2-4 刚性杆振动系统

解　此系统在重力 mg 作用下弹簧有变形 δ_k，其弹性力为 F_k，依静平衡方程式有

$$\sum m_A(F) = 0,\ F_k r_2 - mg r_1 = 0$$

所以

$$F_k = \frac{r_1}{r_2} mg$$

而

$$F_k = k\delta_k$$

则

$$\delta_k = \frac{F_k}{k} = \frac{r_1}{k r_2} mg$$

由几何关系可知，在集中质量 m 处的静挠度为

$$\delta_{\mathrm{st}} = \frac{r_1}{r_2}\delta_k = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1}{k} mg$$

则由式(2-2-10)得

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}} = \frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

或者

$$f_{\mathrm{n}} = \frac{r_2}{2\pi r_1}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.2.3　角振动

所谓角振动是以角位移 φ 为独立坐标来描述运动状态的振动形式，它在工程中是常常遇到的一种振动形式，如轴和转子的扭振、单摆和复摆的摆动等等。对于这种振动形式，通常用定轴转动微分方程去解决。

转动微分方程式

$$J\ddot{\theta} = \sum M(\vec{F}) \tag{2-2-11}$$

式中 J 是系统对转轴的转动惯量，$\ddot{\theta}$ 是角加速度，$\sum M(\vec{F})$ 为施加于系统上的力对转轴之矩。

下面以扭转振动和复摆的运动为例进行讨论。

2.2.3.1　扭转振动

如图 2-2-5 所示，一根垂直轴，下端固定着一个水平圆盘，圆盘相对于转轴的转动惯量为 J，轴的质量不计，其扭转刚度为 k_t，表示使轴转动一个单位转角所需要施加的力矩。

图 2-2-5　轴的扭转振动

对于一根长为 l，直径为 d 的圆轴，根据材料力学可知，它的扭转刚度系数为

$$k_t = \frac{\pi d^4 G}{32 l} \tag{2-2-12}$$

式中，G 为材料的剪切模量。

当此系统受到某种初始干扰时，如在圆盘平面上施加一力偶，然后突然除去，系统即作扭转自由振动。

设 θ 为圆盘任一半径相对静平衡位置量起的角位移，振动时圆盘上受到一个由圆轴作用的与 θ 角方向相反的弹性恢复力矩 $k_t\theta$，根据式(2-2-11)得系统的扭转振动微分方程式

$$J\ddot{\theta} = -k_t\theta$$

或者

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \tag{2-2-13}$$

式中

$$\omega_n^2 = \frac{k_t}{J} \tag{2-2-14}$$

式(2-2-13)与式(2-2-2)具有相同的形式，因此可以直接写出通解为

$$\theta = A\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{2-2-15}$$

式中，A 与 φ 同样是两个待定常数，决定于系统扭转振动的初始条件。

当 $t=0, \theta=\theta_0, \dot{\theta}=\dot{\theta}_0$ 时

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\right)^2} \tag{2-2-16}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\theta_0\omega_n}{\dot{\theta}_0} \tag{2-2-17}$$

由此可知：一个单自由度系统的扭转振动也是简谐振动，它的固有圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}} \tag{2-2-18}$$

固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_t}{J}} \tag{2-2-19}$$

周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_t}} \tag{2-2-20}$$

对于扭转系统，在一般情况下，对非圆截面杆或不规则形状的物体，扭转刚度系数 k_t 和转动惯量 J 较难计算，可用实验方法求得。

在许多实际问题中，弹性轴是非等截面，为求其扭转刚度，可将其简化为具有相等扭转刚度的等截面等效轴。如图 2-2-6(a)所示的阶梯直圆轴，两段的长度、直径、扭转刚度分别为 l_1、l_2、d_1、d_2、k_{t1}、k_{t2}，将其化为直径为 d 的等截面等效轴，如图 2-2-6(b)所示。

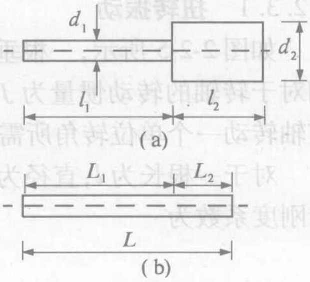


图 2-2-6 等截面等效轴

设第一段长度不变，即 $L_1=l_1$。第二段设等效长为 L_2，则因保持扭转刚度不变，由式(2-2-12)有

$$k_{t2}=\frac{\pi d_2^4 G}{32 l_2}=\frac{\pi d_1^4 G}{32 L_2}$$

所以得

$$L_2=\frac{d_1^4}{d_2^4}l_2 \tag{2-2-21}$$

故等效轴长为

$$L=L_1+L_2=l_1+\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 l_2 \tag{2-2-22}$$

图 2-2-7 所示轴由两个无摩擦的轴承支承，轴的两端各带一转动物体（如圆盘），今使两端沿相反方向转动，然后突然释放，即产生扭振。

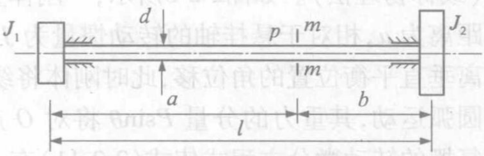


图 2-2-7　轴的扭转振动

根据动量矩守恒原理

$$J_1\omega_1+J_2\omega_2=0$$

两圆盘一定始终沿相反方向振动，并有相同的周期和频率。于是，轴的中间必有某一截面（设为过 P 点的 mm 截面）始终保持静止不动，此不动截面称为节截面，设轴在节截面两边的部分，其扭转刚度分别为 k_{t1}、k_{t2}，由式(2-2-18)有

$$\frac{k_{t1}}{J_1}=\frac{k_{t2}}{J_2}\quad 或\quad \frac{k_{t1}}{k_{t2}}=\frac{J_1}{J_2} \tag{2-2-23}$$

又由

$$k_t=\frac{\pi d^4 G}{32 l}$$

可得

$$k_{t1}a=k_{t2}b\quad 或\quad \frac{k_{t1}}{k_{t2}}=\frac{b}{a}$$

则

$$\frac{a}{b}=\frac{J_2}{J_1} \tag{2-2-24}$$

因为

$$a+b=l$$

所以

$$a=\frac{lJ_2}{J_1+J_2},\quad b=\frac{lJ_1}{J_1+J_2} \tag{2-2-25}$$

代入式(2-2-12)

$$k_{t1}=\frac{\pi d^4 G}{32a}=\frac{\pi d^4 G}{32}\frac{(J_1+J_2)}{lJ_2}$$

代入式(2-2-18)和式(2-2-20)得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com