21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理学

上册

李晓萍 主编
任常愚 尹向宝 副主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理学

上册

主　编　李晓萍

副主编　任常愚　尹向宝

机 械 工 业 出 版 社

本书依据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会最新审订的"非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求"的精神编写。全书分上、下两册，共 20 章。上册包括力学、电磁学两部分，共 11 章；下册包括热学、机械振动与机械波、波动光学基础、近代物理四部分，共 9 章。作为非物理专业的大学物理教材，本书一方面保持了基础扎实、内容经典、实用性强的特点，另一方面又体现出知识面宽、内容现代化等特色。

本书可作为理工科高等院校各专业 100 ~ 130 学时的大学物理教材，也可作为综合大学和高等师范院校非物理专业及各类成人教育物理课程的教材和参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学．上册/李晓萍主编．—北京：机械工业出版社，2009.2
21 世纪普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-26001-1

Ⅰ．大…　Ⅱ．李…　Ⅲ．物理学－高等学校－教材　Ⅳ．04

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 211489 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：张金奎　责任编辑：姚光明　版式设计：张世琴
责任校对：李秋荣　封面设计：马精明　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2009 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 18.75 印张 · 361 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-26001-1
定价：25.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379722

前言

本书是根据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会最新审订的“非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求”的精神，凝聚了我院教师长期讲授大学物理课程的实际教学经验，吸收了国内外近年来同类改革教材的优点编写而成的。

大学物理是一门重要的基础课程，它所阐述的物理学知识、基本概念、基本规律和基本方法，是学生学习后续专业课程和其他科学技术的基础。通过大学物理的学习，能够使学生比较系统地了解和掌握物质运动的基本规律；能够培养学生应用物理知识分析和解决问题的能力；能够培养学生的创新能力。可以说大学物理承担了基础知识教育和科学素质教育的双重任务。因此编者在编写过程中，根据课程的性质精心挑选内容，注重概念的准确、物理图像的清晰，简明而系统地讲述了物理学中的基本概念、规律以及基本理论的历史发展进程，其内容涵盖了大学物理教学的最基本要求，并适当介绍了物理学原理在工程技术中的应用。本书内容安排科学、合理，富于启发性和实用性。编者力求物理概念阐述清楚，简洁得当；内容条理清晰，层次分明；语言规范，深入浅出。本书符合高等院校理工科本科素质教育层次中大学物理作为通识教育课程的要求。

本书的一个突出特点是：从工科非物理专业低年级学生的基础理论课出发，参照“教学基本要求”，以经典与近代物理的基本概念和理论为主干，加强有机渗透。即把有关的科技发展新成果及物理原理在工程技术中的应用，适度有机地渗透到相关部分；内容的论述更注重围绕物理概念，知识框架，研究、分析问题的思路和方法。在保证科学性的前提下，把趣味性、实用性适时渗透到相关部分，努力实现教材便于教师教，易于学生学的目标。

全书分上、下两册，主要包括：力学、电学、磁学、热学、振动和波动、光学和近代物理基础等内容。为加深读者对教材内容的理解，本书配有一定数量的例题、思考题和习题，并附习题参考答案。

这套教材上册由李晓萍、任常愚、尹向宝编写，下册由任敦亮、王丰、丁红伟编写，编写的具体分工为：第1、2、3、4章由李晓萍编写，第5、6、7章由尹向宝编写，第8、9、10、11章由任常愚编写，第14、15、16章由任敦亮编写，第12、13、17章由丁红伟编写，第18、19、20章由王丰编写。

李海宝、姜洪喜、徐宝玉、李社、张林、刘辉等做了大量的资料收集整理工作，并参加了本书部分内容的编写和校正工作。

本书可作为理工科高等院校各专业100～130学时的大学物理教材，也可作为综合大学和高等师范院校非物理专业及各类成人教育物理课程的教材和参考书。

本教材在编写过程中还得到了黑龙江科技学院魏英智教授、金永君教授，华北科技学院张晓春教授的热情支持与帮助，在此表示感谢。

由于编者水平所限，疏忽和不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2008年11月于冰城哈尔滨

目　录

第1章 质点运动学

物理学是研究物质运动中最普遍、最基本运动形式的基本规律的一门学科。力学是一门古老的学问，它是研究物体的机械运动规律的科学。力学中描述物体运动的内容叫做运动学。自然界中的物质都处于不停的运动和变化之中。物质的运动形式多种多样，最为简单的是物质的机械运动，牛顿力学（经典力学）就是研究物质的机械运动的学科。本章将首先讨论对物体运动的基本描述，引入描述物质运动的基本物理思想和方法，讨论质点的运动学问题。运动学以几何观点来研究和描述物体的机械运动，而不考虑物体的质量及其所受的力。本章在引入质点、参考系、坐标系等概念的基础上，介绍确定质点位置的方法及描述质点运动的重要物理量——位移、速度和加速度，并讨论质点匀变速圆周运动等。

1.1 质点运动学的基本概念

1.1.1 质点

物体的运动一般比较复杂。由于物体本身具有一定的形状和大小，物体上各点处于空间的不同位置，因而在运动时，物体上各点的位置变动通常也不尽相同；同时，物体本身的大小和形状也可能不断改变。所以，要详细描述物体的运动并不容易。例如，炮弹在空中飞行时，除了整体沿一定的曲线平移以外，它还作复杂的转动。

如果要研究的只是物体整体的平移运动规律，例如，只研究炮弹沿空间轨道的整体平移，可以忽略那些与整体运动关系不大的次要运动，把物体上各点的运动都看成完全一样。这时就不需要考虑物体的大小和形状，物体的运动可用一个点的运动来代表。这种把物体看成没有大小和形状，只具有物体全部质量的点，称为**质点**。质点是一种理想化的模型，是对实际物体的一种科学抽象和简化。通过这样的科学抽象，可以使问题的研究简化而不影响所得到的主要结论。

能否把一个物体看做质点的关键并不在于物体本身的大小，而是取决于对这个物体进行研究的问题的性质和具体的情况。比如，地球的半径约为6370km，算得上是个庞然大物；然而，当研究地球绕太阳的公转运动时，由于地球的半径与地球公转的轨道半径（约为1.5×10^{11}m）相比，还不到它的万分之一，地球上各点绕太阳的公转运动可看成基本上一样，因而可以不考虑地球的大小和形状，而把整个地球当作质点。又比如，炮弹的尺寸大小（0.5m左右）比起地球来讲，小

7个数量级，真可谓沧海一粟；若是在研究空气阻力对炮弹高速飞行的影响（这种阻力明显与炮弹的几何形状和大小有关）时，就不能把炮弹视为质点。

同一个物体是否可以看成质点不是一成不变的，也是取决于问题的性质和具体的情况。同样是地球，在研究它绕太阳公转时，可以将它看做质点；在研究它的自转问题时，就不能把它看做质点。另外，当物体单纯地只作平移运动时，物体上各点的运动情况都完全相同，可以把它简化成一个质点来看待。当然，在很多问题中，物体大小和形状不能忽略，这时就不能把整个物体当作质点看待，但是质点的概念仍然十分有用。因为能够把物体视为由许许多多小体积元组成，每个体积元都小到可以按质点（有时也称为质元）来处理，则整个物体可以看成是由若干质点（质元）组成的系统（质点系）或是由无数质点组成的整体，通过分析这些质点的运动，便可弄清楚整个物体的运动。所以，研究质点运动也是进一步研究物体（例如，刚体、弹性体和流体等）复杂运动的基础。

1.1.2 参考系与坐标系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。在自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是没有的，这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。在观察一个物体的位置及位置变化时，总要选取其他物体作为标准，选取的标准物不同，对物体运动情况的描述结果也不同，这就是运动描述的相对性。为描述物体的运动而选的标准物叫做**参考系**。不同的参考系对同一物体运动情况的描述是不同的。因此，在描述物体运动情况时，必须指明是对什么参考系而言的。例如，一个自由下落的石块的运动，在地面参考系中观察，它是作直线运动；如果在近旁驰过的车厢内观察，即以行进的车厢为参考系，则石块作曲线运动。参考系的选择是任意的，在讨论地面上物体的运动时，通常选用固定在地面上的一些物体作为参考系，这样的参考系叫做地面参考系。

选定参考系后，只能对物体的机械运动作定性描述，要定量地说明一个质点相对于此参考系的位置，还必须在参考系中建立固定的**坐标系**。运动物体的位置就由它在固联于参考系的坐标系中的坐标值来描述。这个坐标系一旦与参考系固联在一起，则物体相对于坐标系的运动也就是相对于参考系的运动。

坐标系的类型可有不同的选取方法，常用的是直角坐标系和自然坐标系。

设某时刻质点在 P 点，建立一个固联在参考系上的三维直角坐标系 $Oxyz$，如图 1.1a 所示，这样 P 点的位置就可以用直角坐标 (x, y, z) 来确定。在二维空间所取的平面直角坐标系 Oxy 中，用两个坐标 (x, y) 便可确定一物体的位置；在一维空间中所取的直线坐标轴 Ox 或 Oy 上，用一个坐标 x 或 y 便可确定一物体的位置。而且，还得在各坐标轴上取上相应的单位矢量，如图 1.1a 所示，P 点的直角坐标为 $P(x, y, z)$，用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 这三个坐标

轴正方向的单位矢量。有时还用到自然坐标系，这种坐标系常用于质点作曲线运动的情况。

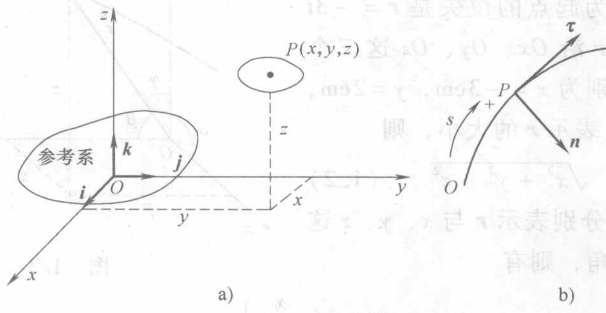

图　1.1

如图 1.1b 所示，当质点作曲线运动时，在曲线上任选一固定点 O 为自然坐标系的原点，规定从 O 点起沿曲线的某一方向（例如向右）量得的曲线长度 s 为正值，这个方向常称为自然坐标的正向；反之为负向，s 为负值。某一时刻质点运动到 P 点，过 P 点画两条正交的坐标轴，一条沿着曲线的切线、指向质点运动的一方，称作切向轴，用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示；另一条沿着曲线的法线、指向曲线凹的一方，称作法向轴，用 $\boldsymbol{n}$ 表示。显然，用自然坐标系来描述质点作曲线运动时较为方便。

虽然，坐标系与参考系有联系，但两者不能混同。参考系是实物，而坐标系是参考系的数学抽象，这是它们的区别。然而，从另一个角度来说，在研究物体的具体运动时常常把坐标系与参考系联系在一起。从而，当一经建立了坐标系，实际上就意味着参考系也已选定。在没有特殊说明的情况下，本书后面的内容就不把它们加以仔细区分了。

1.2　质点运动学的基本物理量

1.2.1　位置矢量

为了定量地研究质点的运动，必须对质点的位置作定量的描述。为此，引入位置矢量的概念。首先选好参考系，再在参考系上建立一个固定的坐标系。如图 1.2 所示，一个直角坐标系，质点的位置可以用一个矢量来确定。设某时刻质点在 P 点，在选定的参考系上任选一固定点 O，由 O 点向 P 点作一矢量 $\boldsymbol{r}$。矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向完全确定了质点相对参考系的位置，称为位置矢量，简称**位矢**。

以位矢 $\boldsymbol{r}$ 的起点 O 为原点，建立直角坐标系 $Oxyz$，这样 P 点的直角坐标 $P(x, y, z)$ 也就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿坐标轴 x、y、z 的投影，则位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

例如，一个质点在 t 时刻的直角坐标为（-3cm，2cm，5cm），则该质点在 t 时刻以坐标原点为起点的位矢是 $\boldsymbol{r}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿 Ox、Oy、Oz 这三个坐标轴的投影分别为 $x=-3\text{cm}$，$y=2\text{cm}$，$z=5\text{cm}$。用 $|\boldsymbol{r}|$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 的大小，则

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.2}$$

令 α、β、γ 分别表示 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 这三个坐标轴的夹角，则有

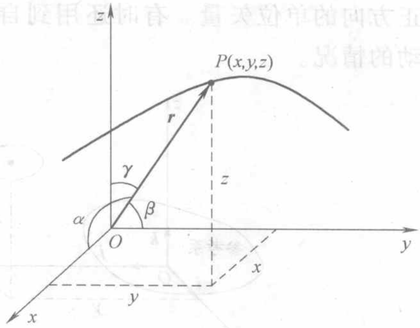

图 1.2

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\\ \cos\beta&=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\\ \cos\gamma&=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

质点运动时，它的位置随时间变化，这时，质点的位置矢量和坐标是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.4}$$

这称为质点的**运动方程**，其在直角坐标系中的分量式为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \tag{1.5}$$

从式（1.5）中消去 t，可得运动质点的**轨迹方程**。例如，已知质点的运动方程为

$$x=R\sin\omega t,\ y=R\cos\omega t,\ z=0$$

式中，R、ω 为大于零的常数。

消去 t 得轨迹方程为

$$x^2+y^2=R^2,\ z=0$$

它表示质点在 xy 平面内作以原点为圆心、半径为 R 的圆周运动。式（1.5）也称为轨迹的**参数方程**（参数为 t）。

例 1.1 一质点作匀速圆周运动，圆周半径为 r，角速度为 ω，如图 1.3 所示。求质点的运动学方程。

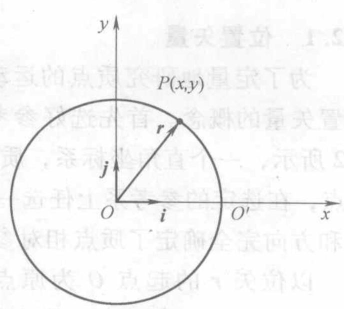

图 1.3

解：以圆心 O 为原点，建立直角坐标系 Oxy，取质点经过 x 轴上 O' 点的时刻为计时开始时刻，即 $t=0$。设 t 时刻质点位于 P，P 点的直角坐标为（x，y），如图 1.3 所示。根据题设条件，质点作匀速圆周运动，$\angle O'OP=\omega t$，用直

角坐标表示的质点运动学方程为

$$x = r\cos\omega t$$

$$y = r\sin\omega t$$

从圆心 O 向 P 点作位矢 $\boldsymbol{r}$，用位矢表示的质点运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\omega t\boldsymbol{i} + r\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

1.2.2　位移矢量

质点在一段时间内位置的改变叫做它在这段时间内的**位移**。质点作一般曲线运动，在 t 时刻质点位于 A 点，位矢为 $\boldsymbol{r}_1$，在 $t+\Delta t$ 时刻运动到 B 点，位矢为 $\boldsymbol{r}_2$，显然在时间间隔 Δt 内位矢的大小和方向都发生了变化，用由 A 指向 B 的矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示 Δt 时间间隔内质点位置的变化。由图 1.4 可知 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$。

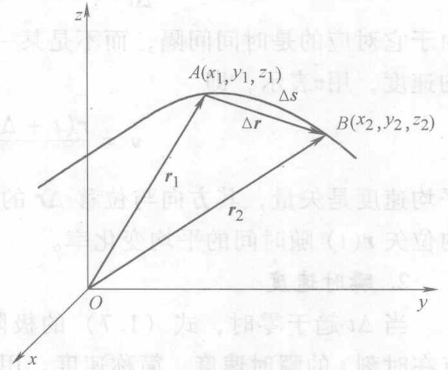

图　1.4

以位矢起点 O 为原点，建立直角坐标系 $Oxyz$，则有

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$$

时间 Δt 内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

令 Δx、Δy、Δz 分别表示 $\Delta\boldsymbol{r}$ 沿坐标轴 x、y、z 的投影，则有

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

显然

$$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1$$

位移的大小和方向可以表示为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \cos\beta = \frac{\Delta y}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \cos\gamma = \frac{\Delta z}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 不能简写为 Δr，因为 $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$，它是位矢的大小在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的增量。一般情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta r$。

位移与路程不同，位移是矢量，是一段有方向的线段。一般情况下，这一线段并不表示质点运动的实际轨道；路程可以是直线，也可以是曲线，它代表了质点运动的实际轨道，如图 1.4 所示从 A 到 B 的曲线段，常用 ΔS 表示。位移是矢量，路程是标量，因而位移的大小与路程一般不等，例如质点沿圆周绕行一圈回到起点，相应的位移等于零，而路程等于圆的周长。

1.2.3 速度

质点的位置随着时间变化，产生了位移，而位移一般也是随时间变化的，那么位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和产生这段位移所用的时间 Δt 之间有怎样的关系呢？$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$是一个怎样的物理量呢？

1. 平均速度

从物理意义上来看，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$描述的是质点位置变化的快慢和位置变化的方向，由于它对应的是时间间隔，而不是某一时刻或位置，所以称为在 Δt 时间内的平均速度，用$\bar{\boldsymbol{v}}$表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同（见图 1.4）。它表示在时间 Δt 内位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 随时间的平均变化率。

2. 瞬时速度

当 Δt 趋于零时，式（1.7）的极限，即质点位矢对时间的变化率，叫做质点在时刻 t 的**瞬时速度**，简称速度。用$\boldsymbol{v}$表示速度，就有

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

速度的方向，就是 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向（见图 1.4），当 $\Delta t\to 0$ 时，$B\to A$，而 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨道在 A 点的切线一致。因此，质点在时刻 t 的速度方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。质点在作曲线运动时，速度沿轨迹的切线方向，这在日常生活中经常可见，如转动雨伞，水滴将沿切线方向离开雨伞等。

速度的大小叫速率，以 v 表示，则有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{1.9}$$

用 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程。当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于相同，因此可以得到

$$v = |\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.10}$$

这就是说速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

设时刻 t 质点在 P 点，位矢为 $\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$，如图 1.5 所示。用 x、y、z 分别表示位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿坐标轴 x、y、z 的投影，则有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

根据速度的定义，有

$$v = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

考虑到所选用的是固定坐标系，单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的大小和方向都不随时间变化，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = 0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0$$

故有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \quad (1.11)$$

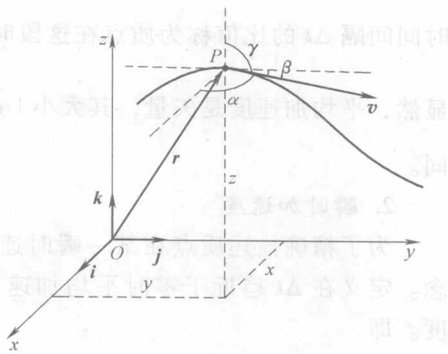

图　1.5

用 v_x、v_y、v_z 分别表示速度 $\boldsymbol{v}$ 沿坐标轴 x、y、z 的投影，则有

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \quad (1.12)$$

比较式（1.11）和式（1.12），可得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad (1.13)$$

即速度沿直角坐标系中某一坐标轴的投影，等于质点对应该轴的坐标对时间的一阶导数。

速度的大小可表示为

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \quad (1.14)$$

令 α、β、γ 分别表示速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 这三个坐标轴的夹角，则速度的方向由下式决定：

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\beta = \frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|} \quad (1.15)$$

如果已知用直角坐标表示的质点运动学方程 $x = f_1(t)$，$y = f_2(t)$，$z = f_3(t)$，就可以求出质点在任意时刻 t 速度的大小和方向。

根据位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 的区别可以知道，一般地，$v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。

1.2.4　加速度

当质点的运动速度随时间改变时，常常要搞清速度的变化情况，速度的变化情况常以另一个物理量加速度来表示，因此，引入加速度这一物理量。加速度的定义方法与速度类似。先定义平均加速度，再用极限方法定义瞬时加速度。

1. 平均加速度

设质点在 t 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，则 Δt 时间内速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，将速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与发生这一增量经历的

时间间隔 Δt 的比值称为质点在这段时间内的**平均加速度**。用$\bar{\boldsymbol{a}}$表示，即$\bar{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$。显然，平均加速度是矢量，其大小$|\bar{\boldsymbol{a}}|=\left|\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right|$，其方向与速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 方向相同。

2. 瞬时加速度

为了精确描述质点在某一瞬时速度变化的情况，下面引入瞬时加速度的概念。定义在 Δt 趋近于零时平均加速度矢量的极限为**瞬时加速度**，简称为加速度。即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.16}$$

显然，瞬时加速度等于速度对时间的一阶导数，也等于位矢对时间的二阶导数。因此只要知道了速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 或位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 就可以求出加速度。

瞬时加速度是矢量，它的大小 $|\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$，其方向与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向相同，如图1.6所示。$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向和它的极限方向一般并不在速度$\boldsymbol{v}$ 的方向上，因而瞬时加速度的方向一般与该时刻速度的方向并不一致。由于 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向总是指向轨迹曲线凹侧，所以曲线运动中加速度总是指向运动轨迹凹侧。在一维运动情况下，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的方向在同一直线上。

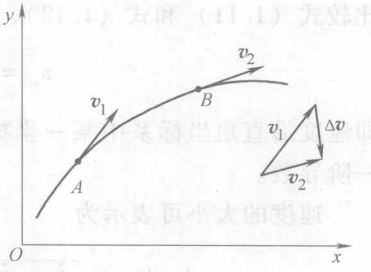

图 1.6

在直角坐标系中，加速度的矢量表达式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.17}$$

其中

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度矢量在某一坐标轴上的分量等于速度沿同一坐标轴分量对时间的一阶导数，或等于质点对应该轴的位置坐标对时间的二阶导数。加速度的大小和方向余弦可表示如下：

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

在一维运动的情况下，加速度 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$，其方向可用正负号来表示：$\boldsymbol{a}>0$，其方向沿 x 轴正向；$\boldsymbol{a}<0$，其方向沿 x 轴负向。应该注意，$\boldsymbol{a}<0$ 时，质点不一定作减速运动，质点作加速运动还是减速运动并不是由 $\boldsymbol{a}$ 的正负确定，而是由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的符号（正或负）相同或相反来确定。$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同号，质点作加速运动，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 异号，质点作减速运动。对此，读者只要联系自由落体和上抛运动的实例是不难理解的。

在定义速度和加速度时，都用到了求极限的方法这种做法，在物理学各部分经常出现。求极限是人类对物质和运动作定量描述时在准确程度上的一次重大飞跃。实际上，极限概念是牛顿在 17 世纪对物体的运动作定量研究时提出的，可见微积分的创立是与对物体运动的定量研究分不开的，微积分是数学的一个重要分支，也是研究物理学不可缺少的重要工具。

1.3　质点运动学的两类问题

质点运动学中比较常见的需要求解的基本问题，大致可分为两类。

1.3.1　第一类问题

已知质点的运动方程，求某一时刻质点的位置矢量或质点的速度、加速度以及某一时刻的值，或求某一段时间内的位移，还可求轨迹方程，但主要是求速度和加速度。这些称为第一类问题。解这类题的基本方法是，由前面几节的内容可知，将运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 对时间求一阶导数，即 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$，可求得速度；对时间求二阶导数，即 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}$。可求得加速度。

例 1.2　设小木块在斜面顶端 O 点，由静止状态开始下滑，沿斜面向下取为 Ox 轴，小木块沿着斜面上 Ox 方向作变速直线运动，其运动方程为 $x=4t^2$，式中，物理量都取国际单位制（SI）。求出小木块 $v=v(t)$ 的和 $a=a(t)$。

解：已知小木块（质点）的运动方程为

$$x=4t^2$$

速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(4t^2)}{\mathrm{d}t}=8t$$

加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(8t)}{dt} = 8\text{m/s}^2$$

这里得到加速度 $a = 8\text{m/s}^2 > 0$，为正值，表明其方向沿 Ox 轴正方向，且为一常量，说明小木块在斜面上下滑时是匀加速直线运动。

例 1.3 在 xy 平面内运动的质点，其运动方程为

$$\boldsymbol{r} = [2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}]$$

（1）写出它的轨迹方程；

（2）求 $t = 1\text{s}$ 时和 $t = 2\text{s}$ 时质点的位矢，并求出在这一秒内质点的平均速度；

（3）计算 3s 末的速度和加速度。

解：（1）轨迹方程由运动方程中消去 t 而得。现在的运动方程

$$\boldsymbol{r} = [2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}]\text{m}$$

与 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ 比较，可得运动方程的分量式（即轨迹的参数方程）

$$x = 2t\text{m},\ y = (19 - 2t^2)\text{m}$$

将参数 t 消去可得质点运动的轨迹方程，即由 $x = 2t$ 写成 $t = \frac{x}{2}$ 代入后式，有

$$y = 19 - 2t^2 = 19 - 2 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

（2）运动方程是表示任一时刻质点的位矢的运动函数式。在此方程中代入某时刻 t 的值，便得这一时刻的位矢。

当 $t_1 = 1\text{s}$ 时，其位矢为

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} = [2t_1\boldsymbol{i} + (19 - 2t_1^2)\boldsymbol{j}]\text{m} = (2\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j})\text{m}$$

大小为

$$r_1 = |\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2^2 + 17^2}\text{m} = 17.1\text{m}$$

方向用 $\boldsymbol{r}_1$ 与 x 轴正方向的夹角 α_{r_1} 表示

$$\alpha_{r_1} = \arctan\frac{y_1}{x_1} = \arctan\frac{17}{2} = 83.3°$$

当 $t_2 = 2\text{s}$ 时，其位矢为

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} = [2t_2\boldsymbol{i} + (19 - 2t_2^2)\boldsymbol{j}]\text{m} = (4\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j})\text{m}$$

大小为

$$r_2 = |\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{4^2 + 11^2}\text{m} = 11.7\text{m}$$

方向用 $\boldsymbol{r}_2$ 与 x 轴正方向的夹角 α_{r_2} 表示

$$\alpha_{r_2} = \arctan\frac{y_2}{x_2} = \arctan\frac{11}{4} = 70.0°$$

“求在这一秒内”就是求在 $t_1 = 1\text{s}$ 到 $t_2 = 2\text{s}$ 这一秒内的平均速度。因为