恩波考研 ENBO

考研数学辅导讲义

理工类

- 基础内容浓缩讲解　针对题型介绍方法
- 800道典型题深入剖析　800道习题巅峰训练

浙江大学　蔡燧林
清华大学　胡金德　编著
同济大学　陈兰祥

权威高效！

蔡燧林和胡金德教授曾任多年教育部考研命题组组长，并曾分别担任浙江省和北京市考研数学阅卷组总负责。浙江省考研数学成绩连续6年居全国第一，这些考生绝大部分出自蔡老师门下。

本书是作者多年命题、阅卷和辅导经验的结晶。从近几年的考试来看，全书着重指出的重点、难点以及所选习题的命题思路，在考研真题中都有体现和反映，有的高度一致，有的极为相似。

赠《典型习题详解》

2008

学苑出版社

辅导讲义

2008

恩波考研
ENBO

考研数学（理工类）辅导讲义

浙江大学 蔡燧林 清华大学 胡金德 同济大学 陈兰祥 编著

43—5.12

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学辅导讲义·理工类/蔡燧林等编著.—6版.
—北京:学苑出版社,2002(2007.2重印)
ISBN 978—7—5077—1937—6

Ⅰ.考... Ⅱ.蔡... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—
自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第006925号

责任编辑:刘 涟
责任校对:张一介
封面设计:顾小平 朱 颜
出版发行:学苑出版社
社 址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼 100079
网 址:www.book001.com
电子信箱:xueyuanyg@sina.com
xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010—67675512、51222025
经 销:新华书店
印 刷 厂:北京汉唐彩色印刷有限公司
开本尺寸:787×1092 1/16
印 张:29
字 数:893千字
版 次:2007年2月北京第6版
印 次:2007年2月北京第1次印刷
印 数:0001—7000册
定 价:42.00元

第 6 版前言

《考研数学辅导讲义(理工类)》一书自问世以来,已连续出版 5 年,发行 10 余万册.在 18 个城市恩波培训班上调查与读者普遍反映,本书文笔通畅易懂,实用性强,基础、强化兼顾,重点、热点、难点一目了然,概念与方法层次分明,考研学子读了本书,感到头绪清楚,方向明确,省时高效.不仅如此,不少读者还反映,本书的例题与习题,有的与真题十分相似.远的不说,以 2006 年版(出书时间为 2005 年初,在先)本书的例题、习题与 2006 年数学(一)、(二)微积分部分考研真题(在后)对照,它们高度一致的有:

1. 2006 年数一(17)题与本书 2006 版第 240 页例 8

2006 年数一(17)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

本书 2006 版例 8　将函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

分析:两题都是考查将函数展开成幂级数.将两个函数分别拆成以下形式,

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2-x}\right),\qquad f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$

就会发现,无论是函数的形式还是解题思路、求解方法都如出一辙.

2. 2006 年数一、数二(7)与本书 2006 版第 70 页习题 27

2006 年数学一、二(7)　设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则　[　　]

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

本书 2006 版习题 27　设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,$f'(x_0)=0,f''(x)<0$,并设 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$,$\mathrm{d}y=f'(x_1)\mathrm{d}x$,$x_1>x_0$,$\Delta x=\mathrm{d}x$,$\Delta x>0$,则　[　　]

(A) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(B) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　(C) $\Delta y>\mathrm{d}y>0$.　(D) $\mathrm{d}y>\Delta y>0$.

分析:比较两题的题目容易发现,4 个选项除排列顺序外毫无二致.

3. 2006 年数一(15)、数二(17)与本书 2006 版第 175 页例 10

2006 年数一(17)　设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

本书 2006 版例 10　计算 $\iint\limits_D\dfrac{1+y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$.

分析:二重积分的计算关键是如何根据积分区域及被积函数选用合适的方法,而两题的积分区域 D 实质上是一致的,被积函数不但分母相同,而且分子的后半部分都是关于相应变量的奇函数,故后半部分的积分都为 0;其余部分都归结为用极坐标的计算.

经过多年的风风雨雨，考研数学大纲及命题的难易程度，有所变化，有所调整．恩波图书编辑部组织有关专家专题研究，回顾、追踪命题趋势，认为对本书作一次较全面的修订很有必要．

这次再版较大的修订主要体现在以下四个方面：一是突出常考点与热点，删去或淡化枝节或次要内容，例如极限部分，将函数的极限运算放在突出位置，删去“$\varepsilon-N$”证明极限的存在性；强化用连续函数介值定理、罗尔定理及单调性处理带参数的函数的零点问题，删去较难的，有技巧性的，并且也从未在考研中用到过的“K 值法”；强化、突出平面第二型曲线积分的计算方法以及在不同条件下与存在原函数的关系，删去用第一型曲线积分计算柱面面积的内容．二是对一些典型的重点题，或者其方法颇有代表性，或者它们有一定的难度，我们给出其详细解答，随书附送《典型习题详解》．我们期望此附送材料，能解决学子的疑难问题，但是建议考生切勿依赖它，这不是我们的本意．三是删去一些过分简单或过难的例题与习题，使本书更体现近年来的考题方向．四是着重强调一些十分基本但未曾考过的题型．

修订后的《考研数学辅导讲义（理工类）》更体现了近年来的命题方向，它具有全程性、全面性、前瞻性与原创性．可以毫不夸张地说，只要真正将这本书读通、读好，就可对付即将面临的考试．如果能再做一些模拟试卷，例如恩波的《最后冲刺试卷》，则将会取得更好成绩．

参与本书修订的除编者中的浙江大学蔡燧林、清华大学胡金德两人外，南京大学范红军还参与修订了概率统计部分，南京大学姜东平教授作了仔细的审阅，恩波培训部为此书的修订提供了有益的素材，编者在此一并向他们表示衷心的感谢．

编著者

2007 年 2 月

前言

一、本书写些什么?

本书是为考研学子们写的. 近年来,社会对研究生的需求增加,有志青年也希望自己在学历上登上一个台阶,国家也扩大招生名额,由此而来的是,考研成为一大热点.

本书严格按照考研大纲编写. 大纲上没有的不写,大纲上有的一定会写. 但也不是主次不分,而是突出重点,热点,常考点. 本书是为数学一、二的考生编写的. 全书的大部分内容和例题都具有普适性,只适用于某类考生的少量内容或例题,在标题或题号上均注明. 例如标题或题号右上角注"①"的,表明仅数学一适用. 无任何记号的,数学一、二均适用.

本书每节分三部分: **内容精要,考查要点、解题方法、技巧及例题分析,综合杂例**. **"基本内容"**这部分中,列举了大纲中要求的有关概念、定理、性质、关系、公式、法则. 读者可根据自己的情况,**详读,略读,或不读**. **"考查要点、解题方法、技巧与例题分析"**,指出考查内容的命题方式,重点在哪里,常以何种面貌出现,尽可能多的指出各种题型以及解题方法. 通过例题分析,指出解题技巧及注意事项,有时还指出常见的错误做法,这些大都是阅卷中发现的典型错误. 熟悉各种题型和熟练掌握解题方法,对考生来讲是至关重要的. 有许多考生,常由于题目面孔陌生,临阵而不知所措. 尽可能多的介绍题型,指出多种解法,是本书一大特点. 例如,在数列极限这一标题下,列出的题型有:极限概念的理解,运算性质以及无穷大、无穷小之间关系的正确运用,u_n 为 n 项和的数列的极限,u_n 为 n 个因式连乘积的数列的极限,以迭代形式给出的数列的极限,等等. 并不以方法,例如"用积分和式求极限","用夹逼定理求极限"等作为标题来区分,而是按照题目的形式来讨论采用什么方法为宜. 读者学了之后,容易对号入座掌握方法. 考研试题中,有很多综合题. **"综合杂例"**就是为此而选讲的. 其中有的是考试真题,有的是作者精心设计的. 读者会发现,本书中有不少例题和习题,是在别的书上见不到的.

本书共有例题和习题各约 800 个. 题号右上角有 * 的是往届的考研真题. 习题中除少数简单的计算题只给出答案外,其他计算题,选择题和证明题,都给出较为详细的解法,而不仅仅是一句话的提示. 不过作者不希望读者一开始就看解法,而是自己先做,做不出或做完后再核查对照,以便总结、对比、提高.

二、怎么考,如何复习迎考?

中国有句古话,叫做"知己知彼,百战不殆". 对立志考研的众多学子而言,"知己",就是自己知道自己的状况;"知彼",就是要弄清楚考些什么,怎么考. 大纲中已明确规定考些什么,本书各章节中也都有说明,不再在此多说. 现在要说的是,一张试卷从哪些方面来考查学生,考生应如何有的放矢去迎考.

(1) 填空题. 填空题实际上是简单的计算题,是为扩大试卷的覆盖面而设计的. 考生切勿因为它简单而掉以轻心. 填空题的计算量少,但要求准确无误,做题的时间又不应花得多. 为了将这部分的分数拿到手,应在复习时养成良好的计算习惯,切忌轻视基本题的训练.

(2) 选择题. 数学选择题大致可分成三类：计算性的，概念性的与推理性的. 这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质，甚至运算法则的理解，而不是死背条文. 不但从正面来理解，还要掌握一些反例. 逻辑推理上，要弄清楚充分与必要的区别. 条件是充分而未说是必要的，则往往可以举出一些例子说明并非必要；添上某些条件后能保证结论是正确的，则没有这些条件时，结论往往就可能是不正确的. 做这类选择题时，切忌想当然，应多一个心眼. 本书设计了不少选择题，作了较详尽的分析，读者应给予足够的重视.

(3) 证明题. 以数学一为例，整张试卷中，一般有两道证明题：高等数学与线性代数各一道. 高等数学证明题的范围大致有：极限存在性，单调性，奇偶性，不等式，零点的存在性及个数，定积分与变限积分的不等式及零点问题，级数敛散性的论证. 线性代数有矩阵可逆与否的讨论，向量组线性相关与无关的论证，线性方程组无解、存在唯一解与存在无穷多解的论证，矩阵可否对角化的论证，两矩阵合同、相似、等价的论证，矩阵正定性的证明，关于秩的大小，并用它来论证有关的问题，等等. 可以说，线性代数的证明题的范围相当广泛. 至于概率统计，证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性，估计的无偏性等. 为了做好证明题，就必须熟悉上面所说的有关理论. 例如矩阵对角化这一问题，不但要会对角化(这是计算)，而且要掌握什么条件下可以对角化(这就涉及理论). 这些条件中，有的是充分条件，有的是充要条件. 复习时，就要熟悉这些条件并做必要的练习. 又如证明不等式，本书中列举了许多题型和方法，其中有的是具体函数，有的为抽象函数，有的又以定积分或变限定积分形式出现. 这就要求考生在复习时能很好的融会贯通，举一反三.

(4) 计算题与综合题. 一份试卷，包括填空题在内，计算题或计算性质的题占 80%以上. 计算题中有一部分是综合题. 所以在复习时，应切实加强计算训练. 公式当然重要，但仅记公式是不够的. 应掌握基本运算方法，熟悉典型步骤，并且要求有熟练的运算能力. 有两类综合题. 一是形式上的综合，采取的对策是“分解”，将一题拆成几段，各个击破. 计算时要特别小心，一步走错全盘皆输. 数学二中有许多这种题. 另一种是内在的综合，就要从条件去挖掘内涵或抽象出本质要点，然后去运算. 这类综合题，不仅计算题中有，选择题与证明题中都有.

(5) 应用题. 一般说来，每一试卷都有一道应用题. 考生常常感到应用题较难对付. 实际上，应用题着重考查学生的建模能力，而不考查专业知识面. 不会出现对某一群体明显不利或明显有利的背景的题. 应用题大致有几何，物理(一般限于力学和运动学)，变化率，或与日常生活有关的(例如微分方程，线性代数，概率统计中的一些应用题)等等. 所有这些本书均有详尽的介绍.

最后，将下面几句话赠给读者：

> 备考时：理解概念，记住公式，掌握题型，熟练方法.
> 考场上：读通考题，选取方法，严密思维，准确运算.

预祝广大考生获得好的成绩.

本书承南京大学姜东平教授仔细审阅，作者深表谢意.

编著者

目 录

高等数学

[注] 记号①表示本章(节)内容仅对数学一考生要求，②意义同此。

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第 1 章 函数、极限、连续

§1.1 函 数

一、内容精要

（一）函数的定义

设在某个过程中，有两个变量 x 和 y，当变量 x 在它的变化范围 D（实数集）内每取一个值时，变量 y 按照一定的规律有唯一确定的实数值与它对应，则称 y 为 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D.$$

x 称自变量，y 称因变量，f 称对应关系，也称 $f(x)$ 为 x 的函数. 当 x 在 D 内取值时，由对应关系 f，y 取值的集合称为函数的值域，常记为 R_f. 以后如不作另外声明，x，y 均取实数.

两个函数相同，当且仅当定义域相同，并且对应关系 f 相同. 至于自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的.

（二）函数的一些特性的定义及判定

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称于原点 $x = 0$ 的某 D 上有定义，并且对于任意 $x \in D$，必有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数；如果对于任意 $x \in D$，必有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数.

在直角坐标 xOy 中，偶函数在 D 上的图像关于 y 轴对称；奇函数在 D 上的图像关于原点 $(0,0)$ 对称.

判别函数的奇偶性的方法主要是靠定义，当然，如果函数的定义域不对称于 $x = 0$，则该函数不可能是奇（偶）函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，如果存在常数 $T > 0$，当 $x \in D$ 时，必有 $x \pm T \in D$，并且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T（如果存在的话）.

判别函数 $f(x)$ 是否为周期，主要根据定义，有时也用别的办法.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x \in X$ 时 $f(x) \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在 m，当 $x \in X$ 时 $f(x) \geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 即如果存在常数 $M > 0$，当 $x \in X$ 时 $|f(x)| \leqslant M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界，若不论 M 多么大，总有 $x \in X$，使 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

判别函数 $f(x)$ 在 X 上有上（下）界，一般是将 $f(x)$ 在 X 上放大（缩小），直至明确它小于（大于）某常数.

函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 存在极限，则存在该点的一个去心邻域 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)$ 有界；如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大（小）值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有上（下）界.

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 去心邻域内无界与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是两个概念.若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 去心邻域必无界；反之未必成立.例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 去心邻域内取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，对于任意大的 M，当正整数 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x_n)>M$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界.但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 并不为 ∞，而是振荡型的不存在.

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果对于 X 上的任意两点，$x_1,x_2,x_1<x_2$，必有 $f(x_1)\leqslant(\geqslant)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加(减少)；如果必有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加(减少).有的教科书上将这里的单调增加(减少)称为单调不减(不增)，将这里的严格单调增加(减少)称为单调增加(减少).

常用的判别单调性的方法：简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定；复杂一些的初等函数或可导的抽象函数，用微分学的方法判定，见第 2 章 §2.3，§2.4.

(三) 反函数、复合函数、初等函数、分段函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f，若对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=f(x)$ 都有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，则记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数.与此相呼应，称 $y=f(x)$ 为直接函数.反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域.

例如函数 $y=x^2$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=x^2$ 在 D 中对应的 x 不唯一，不合乎反函数定义，所以不存在反函数.若将 D 限制为 $G=[0,+\infty)$，则对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=x^2$ 在 G 内存在唯一的 x，所以存在反函数 $x=\sqrt{y},y\in R_f,x\in G$.

有时，也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合.$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

定理 若函数 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调，其值域记为 R_f，则在 R_f 上 $y=f(x)$ 存在严格单调(具有相同单调性)的反函数，其值域为 X；若又设 X 为区间，且 $y=f(x)$ 在 X 上连续，则值域 R_f 也是一个区间，且反函数在 R_f 也是连续的；若再设 $f'(x)$ 存在且不为零，则反函数在 R_f 亦可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，其中 $x=f^{-1}(y)$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ，值域是 R_φ.若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$.这里 $\varnothing$ 表示空集.

3. 初等函数

(1) **常值函数** C(C 为常数)，$x\in\mathbf{R}$；

(2) **幂函数** x^a(a 为常数)，定义域由 a 确定，但不论 a 如何，在 $(0,+\infty)$ 内总有定义；

(3) **指数函数** a^x(常数 $a>0,a\neq1$)，$x\in\mathbf{R}$；

(4) **对数函数** $\log_a x$(常数 $a>0,a\neq1$)，$x\in(0,+\infty)$；

(5) **三角函数** $\sin x,x\in\mathbf{R}$；$\cos x,x\in\mathbf{R}$；$\tan x,x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$；

$\cot x,x\in(k\pi,(k+1)\pi),k\in\mathbf{Z}$；

(6) **反三角函数** $\arcsin x,x\in[-1,1]$；$\arccos x,x\in[-1,1]$；$\arctan x,x\in\mathbf{R}$；$\mathrm{arccot}\,x,x\in\mathbf{R}$.

以上(1)～(6)类函数称**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称**初等函数**.

4. 分段函数

一个函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示，称这种形式表示的函数为分段函数.

分段函数仅是说函数的表示形式，并不是说它是几个函数.

常见的分段函数有：

(1) **绝对值函数** $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(2) **符号函数** $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(3) **取整函数** $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数：$[x] = n$，当 $n \leqslant x < n+1$，其中 n 为整数.

例如：$[\pi] = 3$，$[-\pi] = -4$，$[2] = 2$.

(4) $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$

分段函数也可能是初等函数. 例如 $|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数.

二、考查要点,解题方法、技巧与例题分析

考研题中与本节有关的可以说比比皆是，例如若用单调有界准则求极限，就要检查数列的单调性与相应的有界性；利用导数可以证明单调性，利用单调性可以证明某些不等式；定积分，甚至二重、三重、曲线、曲面积分的某些计算，牵涉到函数的奇、偶性，可以用此来化简计算；将复合函数分解为一些基本初等函数的复合，是求导的重要一环；至于说建立函数关系以及使用基本初等函数的基本性质，到处皆是.

但是单独以本节内容命题的考题不多. **大致有：函数的表示；分段函数的复合；反函数.**

(一) 求函数的表达式

1. 已知简单的函数方程，求函数的表达式

求未知函数 $f(x)$ 的题型很多，题中出现未知函数导数的，常用微分方程的办法解之；题中出现某极限者常用极限方法解之. 这里只限于仅给出函数方程求解 $f(x)$.

例 1 设对于任意 x，$f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x$，则 $f(x) =$ ________.

解 应填 $\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 2)$. 由 $f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x$，有 $f(1-t) + 2f(t) = (1-t)^2 - 2(1-t)$

$\begin{cases} f(1-x) + 2f(x) = x^2-1 \\ f(x) + 2f(1-x) = x^2-2x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x-2)$

$= t^2 - 1$，即

$$2f(x) + f(1-x) = x^2 - 1,$$
$$4f(x) + 2f(1-x) = 2x^2 - 2.$$

由此推知 $3f(x) = x^2 + 2x - 2$，$f(x)$ 即为所填.

2. 已知函数的周期性、奇偶性及 $f(x)$ 在某一区间上的表达式，求它在另一指定区间上的表达式

例 2 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x \in (2,3)$ 时 $f(x) = x^2$. 求当 $x \in (-2,0)$ 时 $f(x)$ 的表达式.

解 当 $-2 < x < -1$ 时，$2 < x + 4 < 3$，由周期性有

$$f(x) = f(x+4) = (x+4)^2.$$

当 $-1 < x < 0$ 时，$0 < -x < 1$，$2 < -x + 2 < 3$. 由 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，有

$$f(x) = f(-x) = f(-x+2) = (-x+2)^2$$

所以
$$f(x) = \begin{cases} (x+4)^2, & -2 < x < -1, \\ (-x+2)^2, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

在 $x = -1$ 处，$f(x)$ 无定义，原因是原给表达式在 $x = 3$ 处没有定义.

3. 已知复合关系求复合函数或中间函数的表达式

例 3* 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0.\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ [ ]

解 应选(D).因为

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2-x, & -x>0,\end{cases}\text{即 } f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0.\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 4* 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 $f(\varphi(x))=e^{(\varphi(x))^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,定义域 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 0$.

例 5 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$,$n=2,3,\cdots$,求 $f_n(x)$ 的表达式.

解
$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$
猜想
$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$
当 $n=1$ 时由定义知成立.设 $n=k$ 时成立,则
$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$
所以 $n=k+1$ 时亦成立.由数学归纳法知,对一切正整数 n,猜想成立.

4. 求分段函数的复合函数

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解 对于 $f(g(x))$,按 $f(x)$ 的定义,有
$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$
再由 $|g(x)|<1$,根据 $g(x)$ 的定义,其对应的 x 应 $|x|\leqslant 1$;由 $|g(x)|\geqslant 1$,对应的 x 应 $|x|>1$.于是
$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

例 7* 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ [ ]

解 应选(B).将里层的 $f[f(x)]$ 看成一个函数,所以
$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1, & |f[f(x)]|\leqslant 1,\\ 0, & |f[f(x)]|>1.\end{cases}$$
再考察 $|f[f(x)]|$,由 f 的定义知,无论里层 $|f(x)|\leqslant 1$ 还是 $|f(x)|>1$,总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$,而不可能 $|f[f(x)]|>1$.所以无论 $|x|$ 如何,总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$,从而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1.\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解
$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)-1)^2, & f(x)\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & f(x)>1.\end{cases}$$
而由 $f(x)$ 的定义,进而有

$$f(f(x))=\begin{cases}((x-1)^2-1)^2, & 当(x-1)^2\leqslant 1 且 x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^2, & 当\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1 且 x>1,\\ \dfrac{1}{1-(x-1)^2}, & 当(x-1)^2>1 且 x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & 当\dfrac{1}{1-x}>1 且 x>1.\end{cases}$$

化简之,得

$$f(f(x))=\begin{cases}(x^2-2x)^2, & 当 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, & 当 x>1,\\ \dfrac{1}{2x-x^2}, & 当 x<0.\end{cases}$$

(二) 求反函数的表达式

例 9 函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________.

解 应填

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$$

记 $y=f(x)$,当 $x\leqslant 1$ 时 $0\leqslant y<+\infty$,$x=f^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$;当 $x>1$ 时 $-\infty<y<0$,$x=f^{-1}(y)=1-\dfrac{1}{y}$,所以反函数 $f^{-1}(x)$ 如上.

评析 此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不单调,但反函数却存在,应分单调区间,再分段求出反函数.

三、综合杂例

例 10 讨论函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的定义域,奇偶性,单调性,值域,并求其反函数及反函数的定义域.

解 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$x^2\pm x+1$ 的判别式均小于0,故 $x^2\pm x+1>0$,所以 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.又因 $f(-x)=-f(x)$,所以 $y=f(x)$ 是奇函数.$x>0$ 时 $f(x)>0$,$x<0$ 时 $f(x)<0$,$f(0)=0$.

今证明,当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是严格单调增函数.为此,计算

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\\&=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2-x+1}},\end{aligned}$$

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时显然 $f'(x)>0$.因此只需证明当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时上式分子大于零即可.此等价于证明

$$((2x+1)\sqrt{x^2-x+1})^2>((2x-1)\sqrt{x^2+x+1})^2.$$

经计算,上式等价于 $x>0$.从而证明了当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 为严格单调增.并且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1,\end{aligned}$$