竞赛培优

实践新课程 探索新方法 体验新理念

新课标
数学竞赛阶梯训练

九年级

丁保荣 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新课标数学竞赛阶梯训练

（九年级）

丁保荣　主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学竞赛阶梯训练．九年级／丁保荣主编．—杭州：浙江大学出版社，2004.7(2008 重印)
ISBN 978-7-308-03755-6

Ⅰ．新...　Ⅱ．丁...　Ⅲ．数学课—初中—习题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 015221 号

新课标数学竞赛阶梯训练·九年级

主编　丁保荣

责任编辑	王建英　杨晓鸣
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310028) (E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn) (网址：http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话：0571—88925592，88273066(传真)
排　　版	杭州求是图文制作有限公司
印　　刷	杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	17.25
字　　数	380 千字
版 印 次	2004 年 8 月第 1 版　2008 年 9 月第 8 次印刷
印　　数	34001-37000
书　　号	ISBN 978-7-308-03755-6
定　　价	20.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

编写说明

新课改下的数学教学"要创造性地使用教材，积极开发、利用各种教学资源为学生提供丰富多彩的学习素材；关注学生的个性差异，有效地实施差异教学，使每个学生都得到发展。""对于学有余力并对数学有浓厚兴趣的学生，教师要为他们提供足够的材料，指导他们阅读，发展他们的数学才能。"

为此，我们策划了新课标数学竞赛同步阶梯训练丛书，共分七年级、八年级、九年级三个分册。本套书进行了新的探索，分年级配合教学进度，顺应学习需要，使初中数学竞赛（数奥）大纲的知识点同步渗透在新教材的各章训练中，为教师提供一种崭新的指导思想，为学生提供一种科学的训练方法，在编写过程中，力求突出以下几点：

1. 体验新课改理念

本套书以新课改下的新教材为背景，以新课标、《初中数学竞赛大纲》为指南，培养学生科学探究精神和创新思维习惯，以激发独立思考和创新意识。

2. 探索新解题方法

本套书以近年来全国各地中考和国内外各级数学竞赛中的典型试题为编选范围，集中体现新中考、新竞赛、新特点。如：由知识立意转向能力立意，在知识交会点上命题，强调应用、创新意识培养，倡导问题的开放性、探索性等。

3. 实践新训练模式

本套书与新课标下的新教材各章完全同步，将数学奥林匹克对知识与能力的要求渗透在与课程同步的阶梯训练题中。丛书通过丰富的栏目实践新课标的理念，【赛点导入】为你导航；【赛题精析】为你引路；【赛题训练】让你大显身手；详尽的【参考答案】让更多学生得到发展的数奥训练模式，并以同步超前训练为特色，促进学生数学才能发展，丛书是提高学生数学素养的理想读物。

本套书在编著过程中得到金华市教科所原所长黄维龙老师，数学教研员蒋光清、徐显扬老师，丁金达、吴务伦老师的指点，义乌市绣湖中学数学组的方利生、王桂芳、王帼芳、王菊清、刘智建、刘旭萍、朱秀云、朱汝芳、朱晓

燕、朱海妹、何星天、陈晓岚、陈志强、罗大明、秀惠民、金旭颖、金和谦、骆雄军、戚茂功等老师帮助编选。

丁保荣

目　录

九年级(上册)

九年级(下册)

九年级(上册)

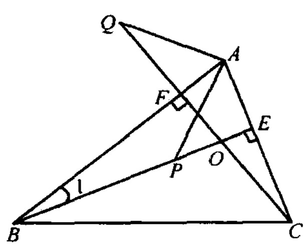
一、探索与证明(一)

【赛点导入】

1. 合情推理是根据已有知识和经验,在某种情境和过程中推出可能性结论的推理,归纳推理、类比推理和统计推理是合情推理的三种重要形式．合情推理的实质是"发现",关注合情推理能力的培养,有助于发展创新精神．演绎推理即证明,是由一个或几个已知判断推出另一个未知判断的思维形式．

2. 本讲所证明的命题大都与等腰三角形,直角三角形有关,主要包括等腰三角形(含等边三角形)的性质与判定;直角三角形的性质与判定;线段中垂线性质定理及逆定理;角平分线性质定理及逆定理．对于以前没有探索过的命题,尽可能创设一些问题情境,提供自主探索的空间,然后再进行证明,体会合情推理与演绎推理在获得结论中各自发挥的作用．

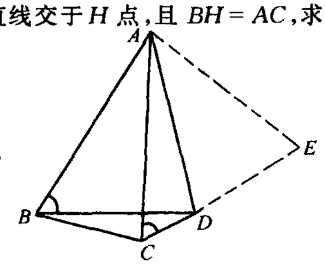
【赛题精析】



例1 ("希望杯"竞赛试题)如图,已知:BE,CF 是$\triangle ABC$的高,且 $BP=AC$,$CQ=AB$,求证 $AP\perp AQ$.

【分析】 要证明 $AP\perp AQ$,只要证$\angle QAP=90°$,这就要利用已知中含有$90°$角(垂直)的条件,由于$\angle AFQ=90°$,所以$\angle Q+\angle QAF=90°$,那么只要证$\angle Q=\angle PAB$,就可得$\angle QAP=90°$,而$\angle Q$,$\angle PAB$ 分别是$\triangle AQC$,$\triangle PAB$ 的内角．自然联想到证$\triangle AQC\cong\triangle PAB$,因已知 $AC=PB$,$QC=AB$,还缺条件$\angle 1=\angle ACQ$,而这是易证的．

例2 ("五羊杯"竞赛试题)在$\triangle ABC$ 中,高 AD 和 BE 两直线交于 H 点,且 $BH=AC$,求$\angle ABC$ 的度数．



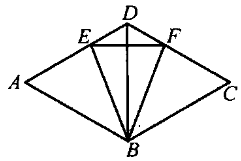
【分析】 本例没有给出图形,解题时首先画出图形,由于锐角三角形的高在三角形内,钝角三角形的高在三角形外,因此,本例图形有两种情况．

例3 (全国联赛试题)已知:如图,$\angle ABD=\angle ACD=60°$,

$\angle ADB = 90° - \frac{1}{2}\angle BDC$,求证:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

【分析】 解本题的关键为条件$\angle ADB = 90° - \frac{1}{2}\angle BDC$ 的应用,由于条件中没有 90°,及$\frac{1}{2}\angle BDC$,因此考虑把此条件变形为$2\angle ADB = 180° - \angle BDC$,从而想到延长 CD,产生 $180° - \angle BDC$ 的形式.

例4 (山东省竞赛试题)正$\triangle ABD$ 和正$\triangle CBD$ 的边长均为 a,现把它们拼合起来(如图),E 是 AD 上异于 A,D 两点的一动点,F 是 CD 上一动点,满足:$AE + CF = a$.



(1)求证:不论 E,F 怎样移动,$\triangle BEF$ 总是正三角形.

(2)求$\triangle BEF$ 面积的最小值.

【分析】 要证明一个三角形为正三角形,只要证明它是有一个角为 60°的等腰三角形即可,由已知条件可知图中有不少相等的线段和 60°的角,可通过三角形全等来达到目的.

例5 (四川省竞赛试题)已知一个直角三角形的直角边长分别为 x,y,斜边长为 z,面积为$\frac{z^2}{4}$.求证:这个三角形是等腰三角形.

【分析】 从已知条件可以推出许多结论,例如,三角形两锐角和为 90°;直角边 x,y 均小于斜边 z;由勾股定理知 $x^2 + y^2 = z^2$①;由已知条件及直角三角形面积等于两直角边乘积的一半,得出$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}z^2$②;等等,哪些结论(就本题而言)是有用的?

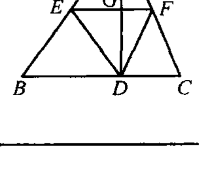
现在转向求证的结论.我们应当考虑更具有普遍性的问题,怎样证明三角形是等腰的?这一问题也有多种回答(这也正是解题难的又一个原因).例如,可以证明三角形有两边相等,或证明有两角相等等等.就本题而言,因已知条件中没有关于角的更多的信息(又转向了已知),因此,我们应选择证明三角形有两边相等,且应设法证明两直角边相等,即 $x = y$,这等价于 $x - y = 0$③.

因此,求证的结论提示我们应从①、②两式中消去 z,以产生关于 x,y 的关系.我们有:$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$,这可变形为:$x^2 - 2xy + y^2 = 0$,即$(x - y)^2 = 0$,所以③得证.

例6 (上海市竞赛试题)设 a,b,c 都是正整数,a 是素数,且 $a^2 + b^2 = c^2$,求证:$c = b + 1$.

【分析】 注意 a 是素数这个条件,要证 $c = b + 1$,只要证 $c - b = 1$,而 $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$,思路就清晰了.

例7 如图,已知在$\triangle ABC$ 中,$AD \perp BC$,垂足为 D,E,F 分别是 AB,AC 的中点,G 是 EF 与 AD 交点.



(1)EF 和 AD 之间有什么特殊的位置关系?请证明你找到的结论.

(2)若要使四边形 $AEDF$ 是菱形,则$\triangle ABC$ 应满足什么条件?

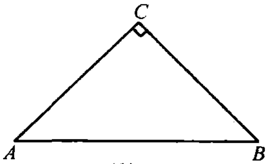
【分析】 (1)EF 是$\triangle ABC$ 的中位线,由中位线的性质及 $AD \perp BC$ 的条件

可猜想出 EF 与 AD 之间的特殊位置关系．

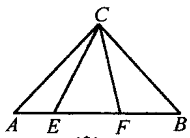
(2)由(1)的结论，若 $EG=GF$，则可证四边形 $AEDF$ 为菱形，只要证 $AE=AF$，也就是证 $AB=AC$ 即可．

例 8　如图(1)，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle C=90°$．

(1)操作并观察：如图(2)，将三角板的 45°角的顶点与点 C 重合，使这个角落在 $\angle ACB$ 的内部，两边分别与斜边 AB 交于 E，F 两点，然后将这个角绕着点 C 在 $\angle ACB$ 的内部旋转，观察在点 E，F 的位置发生变化时，AE，EF，FB 中最长线段是否始终是 EF？写出观察结果：



(1)

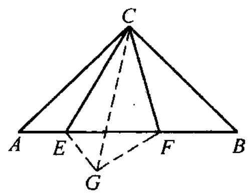


(2)

(2)探索：AE，EF，FB 这三条线段能否组成以 EF 为斜边的直角三角形(即能否有 $EF^2=AE^2+BF^2$)？如果能，试加以说明．

【分析】 对于问题(1)，只需在旋转 $\angle ECF$ 中用刻度尺量一量或观察，即可得到线段 AE，EF，FB 中最长线段是 EF．

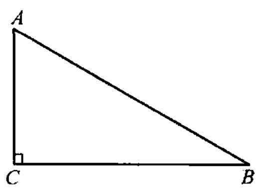
对于问题(2)，要判断是否满足 $EF^2=AE^2+BF^2$，就应先通过图形变换，使同一线段 AB 上的三线段 AE，EF，FB 成为一个三角形的三条边，再对其形状加以判定．分析题意，不可能通过线段的平移来达到目的．于是得到以下方法：

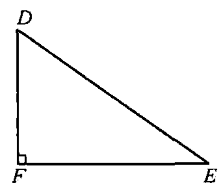


(3)

因为 $\angle ECF=\angle ACE+\angle BCF=45°$，$AC=BC$，所以可把 $\triangle BCF$ 沿 CF 所在直线翻折，得到 $\triangle GCF$，见图(3)，所以 $BF=FG$，连结 EG，易知 $AE=EG$，在 $\triangle EGF$ 中易得 $\angle EGF=90°$．

例 9　如图，已知 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle DEF$ 不相似，其中 $\angle C$、$\angle F$ 为直角，能否分别将这两个三角形分割成两个三角形，使 $\triangle ABC$ 所分成的两个三角形与 $\triangle DEF$ 所分成的两个三角形分别对应相似？能的话，请设计出一种分割方案．





【分析】 首先，应该确定“将一个三角形分割成两个三角形”的分割形式．将一个三角形分割成两部分，有两种可能形式：一种是不经过三角形顶点的直线分割，另一种是经过其中一个顶点的直线分割．由于前一种分割将三角形分成的两部分分别是一个三角形和一个四边形，这种分割形式不符合要求，因此分割形式只能是过其中一个内角顶点的直线分割．

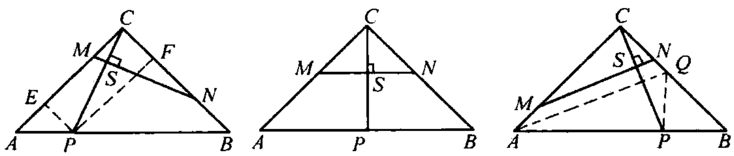
其次，是确定过哪个顶点的直线分割．究竟所过的顶点是与直角、锐角无关，还是必须过锐角或者必须过直角顶点？为此，我们必须对过锐角顶点或过直角顶点两种直线分割进行探讨．

由于过一个内角顶点的直线分割，总是保留其他两个内角，因此这两个三角形都进行直线分割时，就保留了四个内角．

如果两个直角三角形都是过直角顶点的直线分割，那么余下的四个锐角都应该保留．但是由于这两个直角三角形不相似，因此其中一个直角三角形的任意一个锐角不可能等于另一个直角三角形中的任意一个锐角．正基于此，过一个直角三角形顶点的直线分割应注意构建与另一直角三角形中的锐角相等的角．由于直角三角形中的两个锐角互余，因此，可将其中一个直角三角形中的直角分割成分别与另一个直角三角形的两个锐角相等的两个角．这个方案是可行的．

如果两个直角三角形都是过锐角顶点的直线分割，那么这两个直角三角形都分别保留一个直角和一个锐角．因此，一个直角三角形中所保留的锐角必须要与另一个直角三角形中分割后所得的一个锐角相等．另一个直角三角形也应该同样处理．只有这样，才能得到相似三角形，才能完成符合条件的分割．余下的问题是两个直角三角形在分割后所留下的另一组三角形——直角三角形是否相似，这个问题的答案是肯定的，并不难加以证明．

例10 如图 AB 是等腰直角三角形 ABC 的斜边，P 是 AB 上不与 A，B 重合的一个动点，S 是线段 CP 上的一个点．MN 过 S 且 $MN\perp CP$，MN 分别与 AC，BC 相交于 M，N．



(a) (b) (c)

(1)观察与填空：

如图(b)，当点 P 运动到 AB 的中点位置时，AP 与 BP 的大小关系是：__________；CP 与 AB 的位置关系是：__________；MN 与 AB 的位置关系是：__________；CM 与 CN 的大小关系是：__________．于是，当 P 是 AB 的中点时，$\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$成立．

(2)探索与证明：

如图(a)，(c)，当 P 不是 AB 的中点时，$\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$是否仍然成立？请加以证明．

【分析】 本例通过对由于点 P 运动变化而产生的有关线段的位置关系及大小关系变化的观察转入对$\frac{PA}{PB}$与$\frac{CM}{CN}$是否始终相等的研究．研究的方法是从“特殊到一般”的方法．第(1)题研究的是当 P 运动到 AB 中点位置时的情况，无论是直观判断还是推理证明都比较容易，因此让大家以填空的形式得出肯定的结论．

虽然第(1)题不是本题研究的重点，但是它不仅为整个题目设置了悬念，而且为第(2)题的思考提供了方向与动力；虽然第(1)题研究的仅仅是运动过程中特殊的一瞬，但是由于它是“整个”运动中的一瞬间，因此我们在研究本题时应该把这一瞬间置于整个运动过程中来考察．于是，在

点 P 从点 A 的右侧附近处移动至点 B 的左侧附近处这一过程中，我们可以看到：当 $PA<PB$ 时，$CM<CN$；当 $PA>PB$ 时，$CM>CN$；当 $PA=PB$ 时，$CM=CN$. 由于 $PA=PB$，即 $\frac{PA}{PB}=1$，$CM=CN$ 即 $\frac{CM}{CN}=1$，因此，“当 P 是 AB 中点时，$\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$ 成立”. 但是从“当 $PA<PB$ 时，$CM<CN$；当 $PA>PB$ 时，$CM>CN$”是不能推出 $\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$ 的，因此当 P 不是 AB 中点时，“$\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$”仅仅是猜测，从图(a)，(c)中估测，再从图(b)是图(a)与图(c)的“过渡”这一事实，作出这一猜测是“合情合理”的．

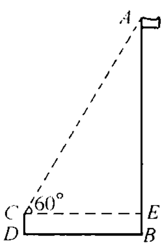
看到 CM 和 CN 是 $\mathrm{Rt}\triangle CMN$ 的两条直角边，而 PA 与 PB 在同一条直线上，未构成直角三角形，于是就有这样的思路：①能否将 PA，PB“改造”成一个直角三角形的两条直角边？②能否将 $\frac{PA}{PB}$ 转化成与它相等的线段比——这线段比中的两条线段成为一个直角三角形中的两条直角边，且它们的比等于 $\frac{PA}{PB}$？然后证明符合①、②两种条件的直角三角形与 $\mathrm{Rt}\triangle CMN$ 相似．为此，作 $PE\perp AC$，$PF\perp BC$，E，F 分别为垂足．容易证明，$\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$. 那么能否证明 $\frac{PE}{PF}=\frac{CM}{CN}$？这时容易看到或想到四边形 $PFCE$ 是矩形，有 $PF=EC$. 这样，PE 和 EC 已成为一个直角三角形中的两条直角边．于是把问题化归为：“能否证明 $\triangle EPC\backsim\triangle CMN$？”此时，这一问题已不难解决．

【赛题训练】

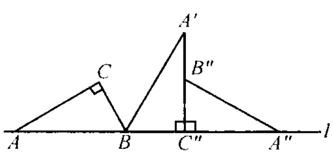
A 级

1. 如图，某同学用一个有 $60°$ 角的直角三角板估测学校旗杆 AB 的高度，他将 $60°$ 角的直角边水平放在 1.5 米高的支架 CD 上，三角板的斜边与旗杆的顶点在同一直线上，他又量得 D，B 的距离为 5 米，则旗杆 AB 的高度约为________米．(精确到 1 米，$\sqrt{3}$ 取 1.73)

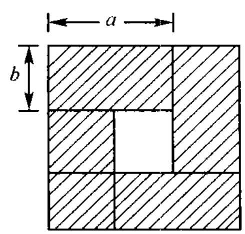
2. 如图，把直角三角形 ABC 的斜边 AB 放在定直线 l 上，按顺时针方向在 l 上转动两次，使它转到 $\triangle A''B''C''$ 的位置．设 $BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，则当顶点 A 运动到 A'' 的位置时，点 A 经过的路线与直线 l 所围成的面积是________．(计算结果不取近似值)



(第 1 题图)



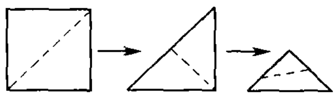
(第 2 题图)



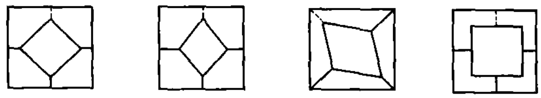
(第 3 题图)

3. 如图是用四张全等的矩形纸片拼成的图形，请利用图中空白部分的面积的不同表示方法写出一个关于 a，b 的恒等式__________.

4. 如图(1)，小强拿一张正方形的纸，沿虚线对折一次得图(2)，再对折一次得图(3)，然后用剪刀沿图(3)中的虚线剪去一个角，再打开的形状是（　）

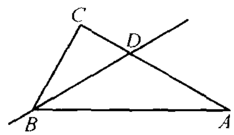


(1)　(2)　(3)



A　B　C　D

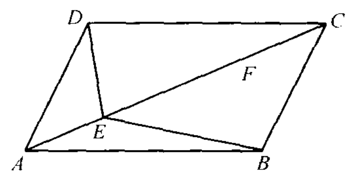
5. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，直线 BD 交 AC 于 D，把直角三角形沿直线 BD 翻折，使点 C 落在斜边 AB 上，如果△ABD 是等腰三角形，那么$\angle A$ 等于（　）



A. 60°　B. 45°　C. 30°　D. 22.5°

6. 为美化环境，计划在某小区内用 30 平方米的草皮铺设一块边长为 10 米的等腰三角形绿地，请你求出这个等腰三角形绿地的另两边长.

7. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 在对角线 AC 上，且 $AE=CF$，请你以 F 为一个端点，和图中已标明字母的某一点，连成一条新线段，猜想并证明它和图中已有的某一条线段相等（只需证明一组线段相等即可）.

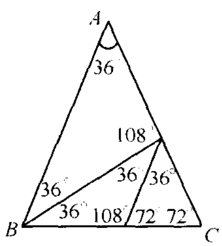


(1)连结__________.

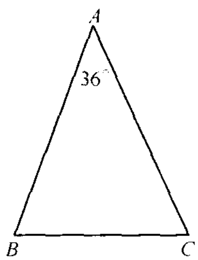
(2)猜想：__________ = __________.

(3)证明：

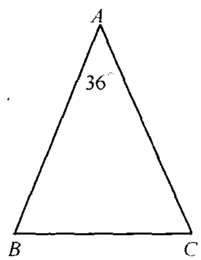
8. 已知，如图△ABC 中 $AB=AC$，$\angle A=36^\circ$，仿照图(1)，请你再设计两种不同的分法，将△ABC 分割成 3 个三角形，使得每个三角形都是等腰三角形.（图(2)，图(3)供画图用，作图工具不限，不要求写出画法，不要求证明；要求标出所分得的每个等腰三角形三个内角的度数）.



图(1)



图(2)



图(3)

9. 取一张矩形的纸进行折叠，具体操作过程如下：

第一步：先把矩形 $ABCD$ 对折，折痕为 MN，如图①；

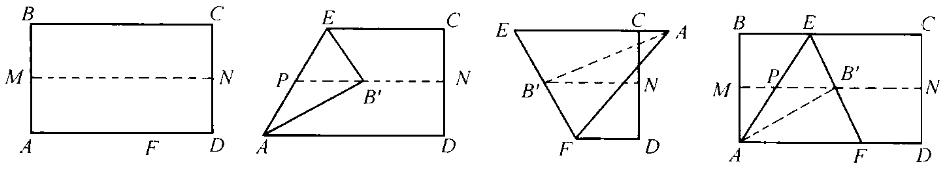
第二步：再把 B 点叠在折痕线 MN 上，折痕为 AE，点 B 在 MN 上的对应点为 B'，得 Rt△$AB'E$，如图②；

第三步：沿 EB' 线折叠得折痕 EF，如图③.

利用展开图④探究：

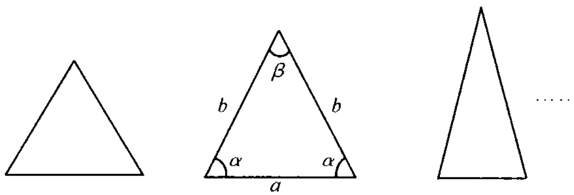
(1)$\triangle AEF$ 是什么三角形？证明你的结论；

(2)对于任一矩形，按照上述方法是否都能折出这种三角形？请说明理由．



① ② ③ ④

10．如图，这些等腰三角形与正三角形的形状有差异，我们把它与正三角形的接近程度称为“正度”．在研究“正度”时，应保证相似三角形的“正度”相等．



设等腰三角形的底和腰分别为 a，b，底角和顶角分别为 α，β，要求“正度”的值是非负数．

同学甲认为：可用式子 $|a-b|$ 来表示“正度”，$|a-b|$ 的值越小，表示等腰三角形越接近正三角形；

同学乙认为：可用式子 $|\alpha-\beta|$ 来表示“正度”，$|\alpha-\beta|$ 的值越小，表示等腰三角形越接近正三角形．

探究：(1)他们的方案哪个较为合理，为什么？

(2)对你认为不够合理的方案，请加以改进(给出式子即可)；

(3)请再给出一种衡量“正度”的表达式．

B 级

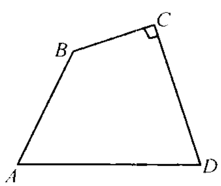
1．设 Rt$\triangle ABC$ 的三边均为整数，且 $AB=3$，$AC=5$，则 BC 边上的中线 AD 的长是(　)

A．$3\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{15}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{13}$

2．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=4-\sqrt{2}$，$BC=1$，$CD=3$，$\angle B=135°$，$\angle C=90°$，则 $\angle D$ 等于(　)

A．60°　　B．67.5°

C．75°　　D．条件不够

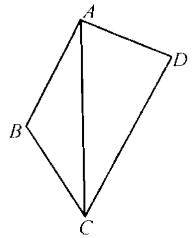


(第 2 题图)

3．(江苏省竞赛试题)如图(见下页)，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$AB=BC=2\sqrt{3}$，$AC=6$，$AD=3$，则 CD 的长是(　)

A．4　　B．$4\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$　　　　D. $3\sqrt{3}$



(第 3 题图)

4.(山东省竞赛试题)设直角三角形的三边长分别是 a,b,c,若 $c-b=b-a>0$,则 $\frac{c-a}{c+a}=$(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

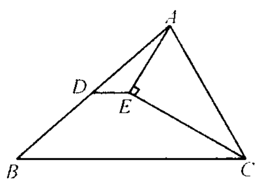
5.(2001,全国联赛题)已知在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$\angle ABC=15°$,$BC=1$,则 AC 的长为(　)

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. 0.3　　D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

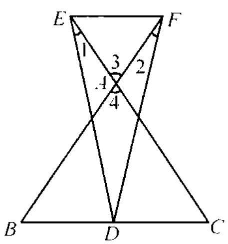
6.(《学习报》公开赛试题)在等边三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 D,作$\angle DAE=60°$,DE 交$\angle C$ 的外角平分线于 E,那么$\triangle ADE$ 是什么三角形?证明你的结论.

7.(希望杯竞赛试题)如图,$\triangle ABC$ 中,CE 平分$\angle ACB$,且 $AE\perp CE$,$\angle AED+\angle CAE=180°$.求证:$ED\parallel BC$.

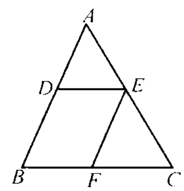
8.(希望杯竞赛试题)如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle B=\angle C$,D 是 BC 的中点,$\angle BDE=\angle CDF$,DE,DF 分别交 CA,BA 延长线于 E,F.求证:$EF\parallel BC$.



(第 7 题图)



(第 8 题图)



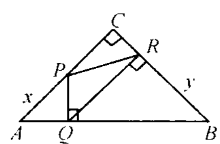
(第 9 题图)

9.(希望杯竞赛试题)如图,$\triangle ABC$ 中,$AB=4$,点 D,E,F 分别在 AB,AC,BC 上,且 $DE\parallel BC$,$EF\parallel AB$.(1)当 D 点为 AB 中点时,求 $S_{四边形BFED}:S_{\triangle ABC}$ 的值;

(2)D 点在何处时,$S_{四边形BFED}:S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}$?

(3)能否可以使 $S_{四边形BFED}>\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$?为什么?

10.(希望杯竞赛试题)如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle C=90°$,腰长为 1,P 是 AC 上不重合于点 A,C 的任意一点,$PQ\perp AB$,$QR\perp BC$,设 $AP=x$,$BR=y$.(1)求 y 与 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围;



(2)x 为何值时,$PR\parallel AB$?

(3)x 为何值时,$AP=PR$?

二、一元二次方程

【赛点导入】

1. 一元二次方程是解数学问题的重要工具，应熟练求解．解一般形式的一元二次方程，因式分解法较便捷，它体现了“降次求解”的基本思想；公式法具有一般性，是解一元二次方程的主要方法；配方法是推导公式法的关键，特殊情况下适用配方法．

2. 解有些与一元二次方程相关的问题时，直接求解常给解题带来诸多不便，若运用整体思想，构造零值多项式，降次变形等相关转化思想方法，往往能使问题获得简解．如配方法把方程转化为$(x+a)^2=b$的形式，体现了形式的转化；公式法直接利用公式，把方程中的“未知”转化为“已知”；分解因式法通过“降次”把一元二次方程转化为两个一元一次方程等．在其他数学领域中，转化思想方法运用也很广泛．

【赛题精析】

例1 （江苏省竞赛试题）若两个方程$x^2+ax+b=0$和$x^2+bx+a=0$只有一个公共根，则（　）

A. $a=b$　　B. $a+b=0$　　C. $a+b=1$　　D. $a+b=-1$

【分析】 先确定方程的公共根，再将这个公共根代入某一个方程，即可得a，b满足的关系式

例2 （山东省竞赛试题）方程$|x|-\frac{4}{x}=\frac{3|x|}{x}$的实根个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】 通过去分母、去绝对值符号，将绝对值方程转化为一元二次方程求解．

例3 （第十一届“希望杯”竞赛题）已知$a+\frac{1}{a}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，则$a^5+\frac{1}{a^3}=$__________．

【分析】 待求式无规律可循，考虑求出a的值，再代入求值．

例4 （全国联赛试题）已知关于x的方程$(a-1)x^2+2x-a-1=0$的根都是整数，那么符合条件的整数a有__________个．

【分析】 方程根的表达式简单，从直接求解入手，解题的关键是要全面确定整数a的个数．

例5 （第十届“祖冲之杯”竞赛试题）试求出所有这样的正整数a，使得二次方程$ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$至少有一个整数根．

【分析】 根的表达式复杂，从关于 a 的两个等式中消去 a 也较困难，由于 a 的次数较低，不妨先将原方程变形为关于 a 的一次方程．

例6 （五城市联赛试题）已知 n 为正整数，且 n^2-71 能被 $7n+55$ 整除，试求 n 的值．

【分析】 引入参数，将多项式的整除问题转化为求一元二次方程的整数根问题．

例7 （北京市竞赛试题）已知方程 $x^2-mx+m+5=0$ 有两个实根 α,β；方程 $x^2-(8m+1)x+15m+7=0$ 有两个实根 α,γ，求 $\alpha^2\beta\gamma$ 的值．

【分析】 由题可知，α 是两个方程的公共根，由于两个方程的根不便求出，因此可从消去二次项入手．

例8 设 a,b 为实数，证明：方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 有两个不等实根，且一根大于 a，另一根小于 a.

【分析】 为证方程有两个不等实根，只需证 $\Delta>0$. 对于后一结论可用两种方法证明：一种方法是先把根求出来，再证明；另一种方法是设两根为 x_1 及 x_2，利用韦达定理证明 x_1-a 与 x_2-a 异号即 $(x_1-a)(x_2-a)<0$.

例9 （第九届"祖冲之杯"竞赛试题）是否存在这样的实数 k，使得二次方程 $x^2+(2k-1)x-(3k+2)=0$ 有两个实数根，且两根都在 2 与 4 之间？如果有，试确定 k 的取值范围；如果没有，试述理由．

【分析】 由于方程有实根，则 $\Delta\geqslant0$，又两根都在 2 和 4 之间，则当 $x=2$ 或 4 时，$x^2+(2k-1)x-(3k+2)>0$，且 $2<\frac{x_1+x_2}{2}<4$.

例10 （第十届"祖冲之杯"竞赛试题）已知 m,n 是二次方程 $x^2+1999x+7=0$ 的两个根，求 $(m^2+1998m+6)(n^2+2000n+8)$ 的值．

【分析】 若求出 m,n 值或展开待求式，则计算繁难，由方程根的定义可得 m,n 的等式，不妨从变形等式入手．

【赛题训练】

A 级

1. 下列方程中，关于 x 的一元二次方程是（ ）

A. $3(x+1)^2=2(x+1)$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-2=0$

C. $ax^2+bx+c=0$　　D. $x^2+2x=x^2-1$

2. 若 $x^2+mx-15=(x+3)(x+n)$，则 m 的值为（ ）

A. -5　　B. 5　　C. -2　　D. 2