定光桂 著

数学分析的方法与技巧选讲

科学出版社
www.sciencep.com

数学分析的方法与技巧选讲

定光桂 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书主要介绍和讨论了赋范、赋准范和赋拟范空间及其上的线性算子的基本概念、所谓"线性泛函的三大原理"即：Hahn-Banach 定理、开映象与闭图像定理以及共鸣定理(一致有界原理), Hilbert空间的基本内容, 著名的可分空间(改范)等价于 $C[a, b]$以及严格凸空间, (作为上述空间推广的)拓扑向量空间的基本而有用的一些概念和特性. 本书的创新之处在于把赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间结合起来进行深入讨论(特别是创造了许多有趣的反例说明它们的差异点).

本书适合高校数学专业师生及相关专业科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析的方法与技巧选讲/定光桂著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-024348-5

Ⅰ. 数… Ⅱ. 定… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 050649 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 4 月第一次印刷 印张：5 3/4

印数：1—3 000 字数：107 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

本书的目的是诱导学生学会独立思考, 从而逐步培养自己的独立研究能力. 因此, 本书仅将传授知识作为次要目的, 而将思维的训练作为首要的宗旨.

本书的内容编排十分注重思维的启发. 我们试图通过这些系统安排的内容, 使那些对思维训练有兴趣的青年人渐渐习惯独立思考, 从而培养他们的思维习惯, 逐步培养出他们独立研究的能力. 一些国际知名的教育家认为: 一种好的教育, 应该系统地给予学生自己发现新事物的能力和机会. 因此要教育和培养青年人逐渐掌握以下方法: 对于不熟悉的, 学会与已熟悉的相联系; 对于不习惯的, 训练与已习惯的相类比; 从特殊的、个别的现象, 善于联想地推广到普遍的、一般性的结果 (如同将一堆乱石通过智慧和劳动创造出美丽的雕塑一样) 乃是最最重要的. 当然, 这样的教育在数学领域中无疑比在其他科学领域更为重要. 而且, 这样的教育在数学领域中的成效也显得更加明显和清晰, 因此, 年轻人通过数学来培养自己发现新事物的能力与机会, 显然是一个极好的途径 (当然不是唯一的途径). 而本书正是试图贯彻这种教育, 给青年人一个训练与实践的机会. 在这里, 笔者还必须特别地提醒读者, 在阅读本书或者自己思考问题时, 绝不要被可能遇到的困难所吓倒而止步或放弃, 应该永远记住伟大的文学家罗曼·罗兰的一句名言: "天才免不了有障碍, 因为障碍会创造天才."

本书所选择的内容大多是从人们十分熟悉或容易理解的事实或常理出发, 然后通过一步一步地深入思考、逻辑推理, 进而引出一些非常巧妙、漂亮的结果 (命题). 例如, 通过 "瞎青蛙掉沟" 这个栩栩如生的例子, 我们抽象出了一个关于稠密性的有用的数学命题; 通过传统的智力游戏 "如何用六根火柴棍搭出四个全等的正三角形", 我们给出了一个全新的思维方法, 即 "升空法"; 通过 "势", 我们介绍了 "左右为难" 型归谬法. 我们所取的材料, 有一些散布于某些书刊及论文中, 有一些则是笔者自己在学习和科研中的心得. 诚然, 数学分析的技巧与方法十分丰富, 这里不能一一涉及, 本书只选取了一些有代表性的、典型的方法予以介绍, 这也就是本书称为选讲的原因.

为了适合较广泛的青年人学习, 使青年人较早就能获得独立思考的训练与培养, 本书所取的内容一般均不需要很多的知识基础, 学过一般初等微积分 (极限、微分、级数等) 知识的读者都可以看懂. 本书第 2 章和第 3 章的后面几节是加了 * 号的, 读者可以根据自己的实际情况有所选择地阅读. 虽然有时为了引入某种数学方法或技巧, 可能会涉及一些非大学低年级的数学教学内容, 但此时我们将会把所需

的定义或命题介绍出来, 读者只要将其作为 “阶梯”, 不必去仔细钻研, 而要专心去体会研讨我们要讲的主题 (内容).

本书是基于我在南开大学曾开设的公共选修课 “数学分析的技巧” 而充实整理出来的. 1994 年, 当我从美国做客座教授访问三年后回校时, 因为系里的教学工作已经安排完毕, 于是我开设了上述这门新课, 当时有 200 多位理科学生 (不仅仅是数学系) 参加. 课堂气氛活跃, 学生反应强烈, 取得了良好效果. 遗憾的是, 第二学期以后至今, 我又 “步入正轨”, 除了指导研究生之外, 我一直专心讲授数学系的 “泛函分析” 和 “拓扑线性空间” 等专门的分析课程, 再也没重开此门选修课. 如今, 事隔近 15 年后, 我重新拿起当年的讲稿, 思考当年这门选修课为什么能如此受到学生欢迎, 我想, 其实就是由于我们的取材: 我们将一些典型、有趣的数学分析技巧方法收于其中; 并且我们从人们最易接受的初等知识入手, 逐步深入, 直至我们要介绍的结果. 我真切地希望读者通过对本书的学习, 不但最终能掌握我们所介绍的一些分析的技巧方法, 而且能逐步培养自己 “举一反三”、善于联想、善于开拓等创造性思维的能力, 为今后的深入学习和研究打下一个坚实、良好的基础。当然, 对于本书中所讲述的各种思维技巧的掌握程度, 必然会是因人而异的. 不过对于任何读者, 通过此书的学习都必定会再次体会到古老的格言 “开卷有益” 的真谛.

最后, 我要特别感谢天津理工大学数学系的研究生张宝瑞同学, 为了本书初稿的打印, 他辛苦、认真地工作了今年的整整一个暑假; 我也要感谢他的同学陈小云和智琛, 特别是我的博士生王瑞东, 他们三人认真、细致地完成了本书的校对工作.

定光桂

2008 年 9 月于南开大学

目　　录

第 1 章　有关稠密性的某些命题

本章介绍一些与稠密性相关联的命题. 1.1 节从一个很浅显的事例 ——“瞎青蛙掉沟” 导出一些并不浅显, 甚至可以说是 “颇具难度” 的命题: 有关在单位圆周上取不同形式的 “正整数弧度” 之点的集合的一些特性. 并且, 在 1.1 节最后将给出以下一个有趣的命题: “在单位圆周上, 所有取 ‘正整数弧度’ 之点的集合在该圆周上是稠密的”. 1.2 节用类似于 1.1 节的证明思路导出一些有关不同类型的 “无理数” 集在实数集 $\mathbb{R}$ 上的稠密性命题. 最后, 1.3 节将介绍有关某些不存在极限的数列在其上、下极限点间的稠密性命题, 并将介绍这些命题在相应级数理论方面的推论.

1.1　单位圆周上取正整数弧度之点集的稠密性

作为本节的开始, 让我们首先来观察一个十分浅显的事例, 那就是 “瞎青蛙掉沟” 的例子, 我们会十分信服这样一个事实: 当一个瞎眼青蛙以一定的跃度沿一直线向前跳跃时, 如果在其前进路上有一小沟, 且该沟的宽度比此青蛙的跃度大, 那么, 此瞎眼青蛙必定会掉入沟中.

下面就来将此观察到的事例抽象归结为一个数学命题, 即下面的引理:

引理 1.1　如果 $0 < a < b$ 以及 $0 < \delta < b - a$, 那么必定存在一个正整数 n_0, 使 $n_0\delta \in (a, b)$.

证　首先, 由 Archimedes(阿基米德) 原理可知, 此时必存在一正整数 n, 使 $n\delta > a$.

今设 n_0 为满足上述不等式的最小正整数, 那么可得到关系式

$$n_0\delta > a \quad 及 \quad (n_0 - 1)\delta \leqslant a. \tag{1.1}$$

因而, 从 (1.1) 中第二式及引理假设, 可导出

$$(n_0 - 1)\delta + \delta < a + (b - a),$$

即有 $n_0\delta < b$. 于是, 再注意到 (1.1) 中第一式, 可以得到结论: $n_0\delta \in (a, b)$. □

引理 1.2　如果 $\Delta = (a, b), x_0 < a$, 以及 $0 < \delta < |\Delta|$(这里, $|\Delta|$ 表示区间 Δ 的长度), 那么必定存在一个正整数 n_0, 使得 $x_0 + n_0\delta \in \Delta$.

证　这里, 只要取 $a' = a - x_0$ 及 $b' = b - x_0$, 则可从引理 1.1 直接导出本引理结论. □

从引理 1.2 可导出以下一些命题:

定理 1.1　如果 $\widehat{\Delta}$ 是单位圆周上的一段弧, 其长 $|\widehat{\Delta}| > 2$, 那么 $\widehat{\Delta}$ 内必定包含着无穷多个弧度为正偶数的点 (以圆周上任一点作起点计量).

证　首先, 取圆弧 $\widehat{\Delta}$ 的一部分并以逆时针方向令其端点分别为 A, B. 且使其长满足条件:

$$2 < |\,\widehat{AB}\,| < 4.$$

然后任取圆周上一点 x_0 为计量弧度 (弧长) 的起始点, (这里及以后, 我们均按惯例, 以逆时针方向作为弧度的正向计量). 不失一般性, 可以假设 x_0 不在弧 $\widehat{AB}$ 内, 即 $x_0 \notin \widehat{AB}$. 事实上, 如果有 $x_0 \in \widehat{AB}$ (图 1.1), 从 Archimedes 原理可知: 必存在一正偶数 $2m_0$, 使 $2m_0 > |\,\widehat{x_0B}\,|$, 再注意到上面假设: $|\,\widehat{AB}\,| < 4$ 以及单位圆周长 $2\pi > 6$, 因此圆周上在 $\widehat{AB}$ 弧以外的弧段, 其弧长必大于 2, 于是从引理 1.1, 当取上述 m_0 为满足不等式 $2m > |\,\widehat{x_0B}\,|$ 中的最小正整数时, 可导出: 该圆周上对应于此 $2m_0$ 弧度的点 $P_{2m_0} \notin \widehat{AB}$. 因此, 那时只要将此点 P_{2m_0} 来代替 x_0 讨论即可.

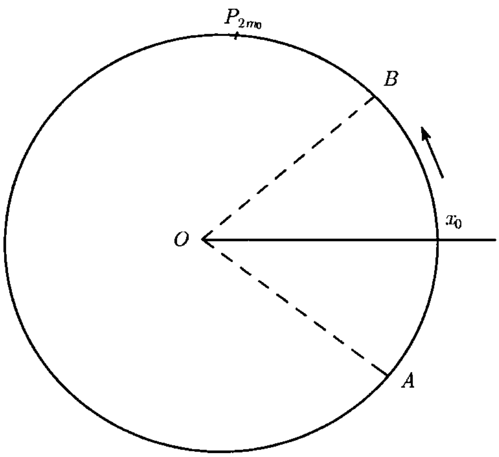

图 1.1

现令 (按逆时针方向计量, 见图 1.2):

$$a = |\,\widehat{x_0A}\,| \quad 及 \quad b = |\,\widehat{x_0B}\,|.$$

从前面取法约定, 显然有关系式: $2 < b - a < 4$.

然后再令 $\delta = 2$, 那么, 从引理 1.1 可取到一正整数 n_0, 使得 $n_0\delta \in (a, b)$, 即 $2n_0 \in (a, b)$, 从而其在圆周上相应的点 $P_{2n_0} \in \widehat{AB}$.

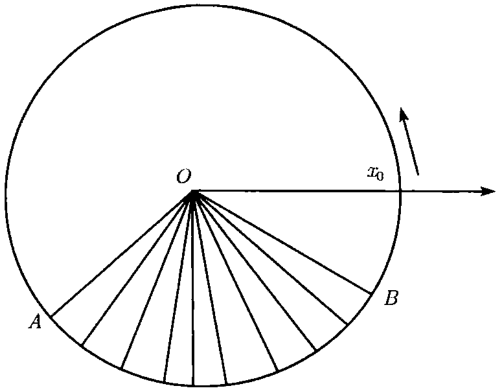

图 1.2

类似地, 再从 Archimedes 原理, 还可找到一个最小的正整数 m_1, 使得 $m_1\delta > b$, 即 $2m_1 > b$ (从而有 $m_1 > n_0$). 于是, 当我们又令

$$x_1 = P_{2m_1} \quad 及\ \Delta_1 = (a + 2\pi, b + 2\pi)$$

时, 从引理 1.2 又可得到一个正整数 n_1, 使 $2m_1 + 2n_1 \in \Delta_1$, 从而其在圆周上相应的点 $P_{2(m_1+n_1)} \in \widehat{AB}$.

然后, 接下来再取一最小的正整数 m_2, 使得 $m_2\delta > b + 2\pi$, 即 $2m_2 > b + 2\pi$(从而有 $m_2 > m_1 + n_1$), 并当又令

$$x_2 = P_{2m_2}, \quad \Delta_2 = (a + 4\pi, b + 4\pi)$$

时, 从引理 1.2 同样可以得到一正整数 n_2, 使 $2(m_2 + n_2) \in \Delta_2$, 也即其在圆周上相应的点 $P_{2(m_2+n_2)} \in \widehat{AB}$.

如此做下去, 并注意到圆周长 2π 乃是一个无理数, 因而上述点均不会重合, 由此便可得到无穷多个弧度为正偶数的点, 他们均在弧 $\widehat{AB}$ 之内; 而注意到 $\widehat{AB}$ 乃是弧 $\widehat{\Delta}$ 的一部分, 此时即证得: 在弧 $\widehat{\Delta}$ 内必含有无穷多个弧度为正偶数的点. □

类似地, 不难验证以下两个定理:

定理 1.2 如果 $\widehat{\Delta}$ 是单位圆周上的一段弧, 其长 $|\widehat{\Delta}| > 2$, 那么 $\widehat{\Delta}$ 内必包含着无穷多个弧度为正奇数的点 (以圆周上任一点作始点计量).

定理 1.3 如果 $\widehat{\Delta}$ 是单位圆周上的一段弧, 其长 $|\widehat{\Delta}| > 1$, 那么 $\widehat{\Delta}$ 内必包含着无穷多个弧度为正整数的点 (以圆周上任一点作始点计量).

从以上定理不难导出下面推理:

推理 1.1 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1)$ 均是不存在的.

证　令 $\widehat{\Delta}_1$ 及 $\widehat{\Delta}_2$ 分别为单位圆周上各以 $\pi/2$ 及 $3\pi/2$ 为中心, 弧长均为 $2\pi/3$ 的弧段 (图 1.3).

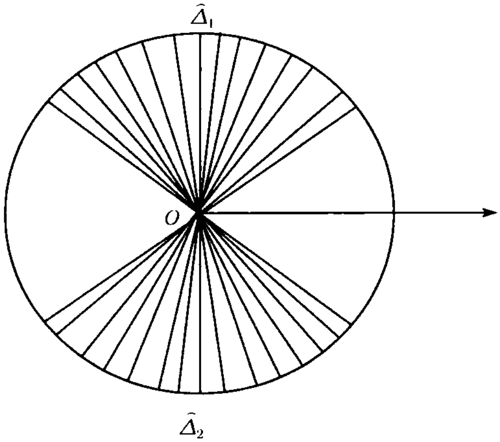

图 1.3

从定理 1.1 和定理 1.2 可知: 必有无穷多个弧度为 $2n$ 及 $2n+1$ 的点落在 $\widehat{\Delta}_1$ 及 $\widehat{\Delta}_2$ 弧段上. 于是, 我们注意到: 当点落在弧段 $\widehat{\Delta}_1$ 时, 相应函数 $\sin x$ 的值必均大于

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

类似地, 当点落在弧段 $\widehat{\Delta}_2$ 时, 相应函数 $\sin x$ 的值必均小于 $-1/2$. 由此, 从极限的唯一性便可导出结论: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$ 均是不存在的. □

从推理 1.1, 注意到极限理论的一个性质: "对于一个存在极限的序列而言, 其任意子序列亦均是有与其相同之极限的". 因而可以直接得到下面的推理:

推理 1.2　极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 是不存在的.

同样地, 利用定理 1.2 还可以导出下面一个推理:

推理 1.3　$\sin(n^2)\nrightarrow 0\ (n\to\infty)$.

证　反之, 如果有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n^2)=0$, 那么, 注意到 $\sin x$ 的反函数的连续性, 可导出如下的结论: 对于正数 $\varepsilon_0=\pi/12$, 必定存在一个正整数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 必存在着一个正整数 K_n, 使有

$$|n^2-K_n\pi|<\frac{\pi}{12},$$

由此得到

$$|[(n+1)^2-n^2]-\widetilde{K}_n\,\pi|<\frac{\pi}{6},$$

此即导出：

$$|(2n+1)-\widetilde{K_n}\,\pi|<\frac{\pi}{6},\quad \forall n>N$$

(这里, $\widetilde{K_n}$ 为某一整数). 这样一来就得到了下面一个结论：在单位圆周上, 除了有限个点外, 所有弧度为正奇数的点全部落在上述两个以 $n\pi$ 为中心, 弧度均为 $\pi/3$ 的弧段内 (图 1.4).

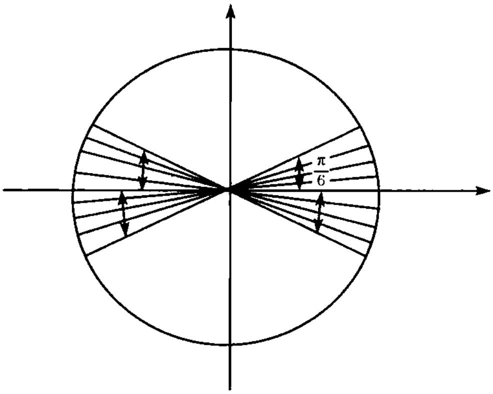

图 1.4

也即, 余下的两个弧段, 其弧度均为 $2\pi/3(>2)$, 但却只含有有限个弧度为正奇数的点, 但这显然是与定理 1.2 的结果相矛盾的, 由此归谬得出本推理结论. □

下面给出三个注：

注 1.1 利用推理 1.3 的证明方法, 不难导出结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n^2)$ 是不存在的.

注 1.2 利用推理 1.1 中有关 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$ 不存在的结论和推理 1.3, 亦可从初等的三角公式导出有关 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n^2)$ 不存在的结论.

事实上, 反之, 如设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n^2)$ 存在. 那么, 从 $\cos(2x)=1-2\sin^2x$ 得知：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n^2)$ 亦存在; 且当注意到关系式：

$$\sin[(2n)^2]=\sin[2(2n^2)]=2\sin(2n^2)\cdot\cos(2n^2)$$

及推理 1.3 的结果, 可导出：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n^2)$ 存在.

再注意到关系式：$\sin(2n^2)=2\sin(n^2)\cos(n^2)$, 从上段结论和推理 1.3, 以及开始的假设可推出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n^2)$ 亦存在. 于是, 最后由关系式：

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)&=\sin[(n+1)^2-n^2]\\&=\sin(n+1)^2\cdot\cos n^2-\cos(n+1)^2\cdot\sin(n^2),\end{aligned}$$

可导出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)$ 是存在的. 但这显然与前面推理 1.1 的结果矛盾. 因而归谬验得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n^2)$ 不存在的结论.

注 1.3　用上面类似的方法, 也完全可以导出有关函数 $\cos x$ 的上述一些类似结果.

下面将要转向有关稠密性问题的讨论. 为此, 先来给出稠密性的定义:

定义 1.1　设 A 和 D 均为实数集, 说集 D 是**稠密于** A 的, 是指对于任意的数 $\varepsilon>0$, 集 A 的任一点 a 为中心的 ε 邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内必定含有集 D 的点.

下面来介绍本节最后一个, 也是最重要的一个定理:

定理 1.4　在单位圆周上, 当以任一点为起始点计量弧度时, 其所有取正整数弧度之点集必是稠密于该圆周的.

证　反之, 如果在此圆周上存在一圆弧 $\widehat{\varDelta}_0$ (图 1.5), 使其满足条件: $|\widehat{\varDelta}_0|<1$, 并且在 $\widehat{\varDelta}_0$ 内没有任何取正整数弧度的点. 那么, 当我们令 $\widehat{\varDelta}_0=\widehat{AB}$, 并记 A 和 B 点对应的弧度分别为 a_0 和 b_0 时, 可断言以下四点:

(i) 当令

$$a_1=a_0-1 \quad 及 \quad b_1=b_0-1,$$

且令其相应于圆周上的点为 $A_1=P_{a_1}$ 及 $B_1=P_{b_1}$ 时, 那么圆弧 $\widehat{\varDelta}_1=\widehat{A_1B_1}$(即为圆弧 $\widehat{AB}$ 按顺时针方向平移一个弧度而成之新圆弧) 内必亦不含有取正整数弧度的点. 否则, 当有点 $P_{n_1}\in\widehat{\varDelta}_1$ 时, 必有点 $P_{n_1+1}\in\widehat{\varDelta}_0$, 即有弧度为正整数 n_1+1 的点落在圆弧 $\widehat{\varDelta}_0$ 内, 而这显然与开始的假设矛盾.

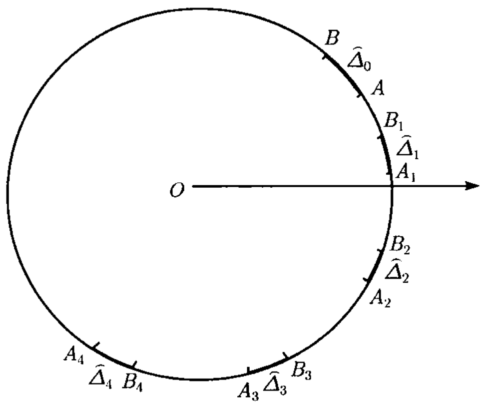

图 1.5

(ii) 当类似上面 (i) 作圆弧 $\widehat{\varDelta}_n=\widehat{A_nB_n}$ 时, 其中, $A_n=P_{a_n},B_n=P_{b_n}$, 而 $a_n=a_{n-1}-1,b_n=b_{n-1}-1(\forall n\in\mathbb{N})$, 则每一个圆弧 $\widehat{\varDelta}_n$ 内均不含有正整数弧度的点,

并且有 $|\widehat{\Delta}_n| = |\widehat{\Delta}_0|, \forall n \in \mathbb{N}$ (这里及以后, 我们均用符号 $\mathbb{N}$ 来代表所有正整数的集合).

(iii) 对于任意的两个正整数 n 和 m, 如果 $n \neq m$, 则有 $\widehat{\Delta}_n \neq \widehat{\Delta}_m$ (即互不重合). 事实上, 反之, 如有 $n_0 < m_0 (n_0, m_0 \in \mathbb{N})$, 使得弧段 $\widehat{\Delta}_{n_0}$ 与 $\widehat{\Delta}_{m_0}$ 相重合, 那么由 $\widehat{\Delta}_n$ 的取法则有 $a_{n_0} - 2k_0\pi = a_{m_0}$ (其中, k_0 为某一正整数), 注意到 a_n 的取法, 从上即得到

$$a_0 - n_0 - 2k_0\pi = a_0 - m_0,$$

也即导出: $m_0 - n_0 = 2k_0\pi$. 但注意到 π 是一个无理数, 因此上等式是不可能成立的, 由此归谬验证得 (iii) 的结论.

(iv) 圆弧列 $\{\widehat{\Delta}_n\}$ 中, 至少有两个相交. 事实上, 注意到圆周长是一个常值, 而弧段长 $|\widehat{\Delta}_n| = |\widehat{\Delta}_0|$ 也均为同一正常数 $(\forall n \in \mathbb{N})$, 因此这些弧段列 $\{\widehat{\Delta}_n\}$ 在圆周上是不可能均相互不交的.

这样一来, 从 (iv) 就可以找到两个正整数 n_1 和 m_1, 使得 $n_1 < m_1$, 并且圆弧 $\widehat{\Delta}_{n_1}$ 与 $\widehat{\Delta}_{m_1}$ 具有非空的交集 $\widehat{\Delta}_{n_1} \cap \widehat{\Delta}_{m_1}$ (这里符号 $\cap$ 代表交, 即集间的公共部分). 今设上两弧段的并 "并集" $\widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1}$ (这里, 符号 $\cup$ 代表并, 也即集之总合部分) 所合成的弧段之长

$$|\widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1}| = |\widehat{\Delta}_0| + \beta_0,$$

那么, 从 (iii) 显然可知: $\beta_0 > 0$.

再注意到, 由于 $\widehat{\Delta}_{n_1} \cap \widehat{\Delta}_{m_1} \neq \varnothing$, 因而, 从 $\{\widehat{\Delta}_n\}$ 的做法可知, 上两弧段的平移弧段亦有 $\widehat{\Delta}_{n_1+1} \cap \widehat{\Delta}_{m_1+1} \neq \varnothing$, $\widehat{\Delta}_{n_1+2} \cap \widehat{\Delta}_{m_1+2} \neq \varnothing, \cdots$. 特别地, 可以得到

$$\widehat{\Delta}_{n_1+(m_1-n_1)} \cap \widehat{\Delta}_{m_1+(m_1-n_1)} \neq \varnothing,$$

即弧段 $\widehat{\Delta}_{m_1+(m_1-n_1)}$ 与 $\widehat{\Delta}_{m_1}$ 也是相互联结的. 而当我们再注意到 (iii) 时, 还知圆弧段 $\widehat{\Delta}_{n_1}, \widehat{\Delta}_{m_1}, \widehat{\Delta}_{m_1+(m_1-n_1)}$ 均是互相不重合的; 且从对称性还知: 它们合起来所成的弧段的长

$$|\widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1} \cup \widehat{\Delta}_{2m_1-n_1}| = |\widehat{\Delta}_0| + 2\beta_0.$$

类似地, 还可得到

$$|\widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1} \cup \widehat{\Delta}_{2m_1-n_1} \cup \widehat{\Delta}_{3m_1-2n_1}| = |\widehat{\Delta}_0| + 3\beta_0.$$

一般地, 有

$$|\widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1} \cup \cdots \cup \widehat{\Delta}_{m_1+k(m_1-n_1)}| = |\widehat{\Delta}_0| + (k+1)\beta_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

最后, 当我们再次注意到 Archimedes 原理时, 可得到一正整数 k_0, 使得

$$|\widehat{\Delta}_0| + (k_0+1)\beta_0 > 1.$$

由此, 从定理 1.3 可导出: 在圆弧段 $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}_{n_1} \cup \widehat{\Delta}_{m_1} \cup \cdots \cup \widehat{\Delta}_{m_1+k_0(m_1-n_1)}$ 之内必定含有弧度为正整数的点, 但这显然与 (ii) 的结果相矛盾, 由此, 归谬证得本定理结论. □

1.2　某些无理数集的稠密性

利用 1.1 节的证明思路, 我们可以来讨论某些类型的无理数集合在整个实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性问题.

首先给出下面一个重要定理, 其证明技巧是十分美妙的.

定理 1.5　设 ξ_0 为任意给定的一个无理数; 那么, 所有形如 $i\xi_0 + j$ (这里, i, j 为任意的整数) 的数集必是稠密于实数集 $\mathbb{R}$ 的.

证　设 Δ 为实轴上任意的一个开区间; 那么, 必存在一个正整数 n_0, 使

$$\frac{1}{n_0} < |\Delta|. \tag{1.2}$$

然后, 我们注意到: 对于任意的正整数 n, 数 $n\xi_0$ 亦必为无理数, 且必位于某两整数 i_n 与 i_n+1 之间, 即有

$$i_n < n\xi_0 < i_n + 1,$$

从而有 $0 < n\xi_0 - i_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

今设 $x_n = n\xi_0 - i_n$, 那么有

$$x_n \in (0,1), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

现在, 让我们来研究 $(0,1)$ 区间内的 n_0+1 个点: $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0+1}$. 首先, 从式 (1.3) 可知, 必存在着其中两个点 x_{n_1} 及 x_{n_2}, 使得 $1 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant n_0 + 1$ 及

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{1}{n_0} \tag{1.4}$$

(否则就有 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n_0+1} x_k - \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n_0+1} x_k \geqslant n_0 \cdot \dfrac{1}{n_0} = 1$, 与式 (1.3) 矛盾). 而当再次注意到 ξ_0 是无理数的假设时, 还可导出

$$x_{n_2} - x_{n_1} = (n_2 - n_1)\xi_0 - (i_{n_2} - i_{n_1}) \neq 0. \tag{1.5}$$

这样一来, 注意到关系式 (1.2), (1.4), (1.5), 由引理 1.1, 可取到一个正整数 k_0, 使得

$$k_0 \cdot |x_{n_2} - x_{n_1}| \in \Delta.$$

此即导出

$$k_0(x_{n_2} - x_{n_1}) \in \Delta \quad \text{或} - k_0(x_{n_2} - x_{n_1}) \in \Delta.$$

最后, 我们注意到上述的 $\pm k_0(x_{n_2} - x_{n_1})$ 均为形如 $i\xi_0 + j$ (i, j 为整数) 类型的数, 因而, 我们证得本定理结论. □

类似上面的证明, 容易得到下面的定理:

定理 1.6 设 ξ_0 为任意一个无理数, 那么, 所有形如 $2i\xi_0 + 2j$ (这里, i, j 为任意的整数) 的数的集合必是稠密于实数集 $\mathbb{R}$ 的.

证 这里, 只要注意到: 对于实数轴上的任一开区间 Δ, 必定存在着一个正整数 n_0, 使其满足条件

$$\frac{2}{n_0} < |\Delta|,$$

那么, 类似于定理 1.5 中证明, 当我们考虑区间 $(0,1)$ 中 n_0+1 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0+1}$ 时, 亦可取出两个点 x_{n_1}, x_{n_2}, 使其满足条件

$$0 \neq |x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{1}{n_0},$$

由此得到

$$0 \neq 2|x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{2}{n_0} < |\Delta|.$$

这样一来, 类似地, 利用引理 1.1 立即便可导出: 存在一个正整数 k_0, 使得 $k_0[2(x_{n_2} - x_{n_1})]$ 或 $-k_0[2(x_{n_2} - x_{n_1})]$ 必有一个落在区间 Δ 内. 此即证得本定理结论. □

类似地, 有下面定理:

定理 1.7 设 ξ_0 为任意一个无理数, 那么, 所有形如 $(2i+1)\xi_0 + (2j+1)$ (这里, i, j 为任意整数) 的数的集合必是稠密于实数集 $\mathbb{R}$ 的.

证 对于实轴上的任意一个开区间 $\Delta = (a, b)$, 令开区间: $\Delta_1 = (a + \xi_0 + 1, b + \xi_0 + 1)$, 然后利用定理 1.6 的结果可导出本定理的结论. □

利用完全类似的方法, 还可以得到下面的定理.

定理 1.8 假设 ξ_0 为任一无理数; 那么, 所有形如 $2i\xi_0 + j, i\xi_0 + 2j, (2i+1)\xi_0 + j, i\xi_0 + (2j+1), 2i\xi_0 + (2j+1)$ 以及 $(2i+1)\xi_0 + 2j$ 的数的集合均是稠于整个实数集 $\mathbb{R}$ 的 (这里, $i, j \in \mathbb{Z}$).

从定理 1.5 还可以得到下面两个推理:

推理 1.4　如果 a, b 为任意两个实数, 那么, 有关系式:

$$\inf\{|ia+jb| : i,j\text{不同时为 }0, i,j\in\mathbb{Z}\}=0.$$

证　当 a 或 b 有一个为 0 时, 上面结论显然是成立的.

下面, 假设 $a,b\neq 0$, 并来证明本结论. 首先令 $\xi=a/b$, 那么, 当 ξ 为一有理数 q/p 时, 只要取: $i=p, j=-q$, 则可直接验明本推理结论.

当 ξ 为一无理数时, 注意到定理 1.5, 可得到

$$\inf\{|i\xi+j| : i,j\in\mathbb{Z},\text{且不同时为 }0\}=0,$$

从而导出

$$\begin{aligned}&\inf\{|ia+jb| : i,j\in\mathbb{Z},\text{且不同时为 }0\}\\=&|b|\cdot\inf\{|i\xi+j| : i,j\in\mathbb{Z},\text{且不同时为 }0\}\\=&0,\end{aligned}$$

这就完成了本推理的证明. □

推理 1.5　如果 $a>0, b>0$, 那么, 有

$$\inf\{|na-mb| : n,m\in\mathbb{N}\}=0.$$

证　反之, 此时如有

$$\inf\{|na-mb| : n,m\in\mathbb{N}\}=\alpha>0, \tag{1.6}$$

那么, 由对称性, 对于数集 $\{(na-mb)|n,m\in\mathbb{N}\}$ 的对称集 $\{(mb-na)|m,n\in\mathbb{N}\}$ 必亦有关系式

$$\inf\{|mb-na| : m,n\in\mathbb{N}\}=\alpha. \tag{1.7}$$

由于 $a>0, b>0$ 的假设, 还不难看出

$$\inf\{|na+mb| : n,m\in\mathbb{N}\}=a+b, \tag{1.8}$$

$$\inf\{|na| : n\in\mathbb{N}\}=a, \tag{1.9}$$

$$\inf\{|mb| : m\in\mathbb{N}\}=b. \tag{1.10}$$

因此, 综合关系式 (1.6)~(1.10), 立即导出

$$\inf\{|ia+jb| : i,j\text{不同时为 }0, i,j\in\mathbb{Z}\}=\min\{a,b,\alpha\}>0.$$

但这显然与推理 1.4 矛盾. 由此归谬证得本推理结论. □

注 1.4　推理 1.5 将在 5.1 节用到.

1.3 数列在其上、下极限间的稠密性

利用 1.1 节的类似思维方法, 亦可得出涉及一个数列在其上、下极限间的稠密性命题. 首先, 给出下面一个定理:

定理 1.9 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在, 且亦非 $\pm\infty$;

(ii) $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$, 或有 $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$.

那么, 当令

$$m = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad 及 \quad M = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

时, 数集 $\{x_n\}$ 在区间 (m, M) 内必是稠密的.

证 首先, 由假设 (i) 可知: $m \neq M$(这里, m 可取 $-\infty$, M 可取 $+\infty$).

反之, 如存在区间 $(a,b) \subset (m,M)$, 使得 (a,b) 内不含有 $\{x_n\}$ 中的元. 那么, 从下 (上) 极限的定义, 由假设 (ii) 则有关系式

$$x_n - x_{n-1} > -(b-a) \quad (相应地, x_n - x_{n-1} < b-a), \quad \forall n > N,$$

即有

$$x_{n-1} - x_n < b-a \quad (相应地, x_n - x_{n-1} < b-a), \quad \forall n > N. \tag{1.11}$$

下面分两种情况来验证定理结论.

(1) 当 m 及 M 均为有限值时.

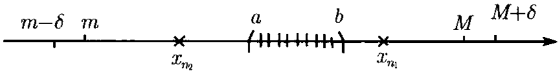

图 1.6

此时, 注意到 M, m 分别为数列 $\{x_n\}$ 的上、下极限的假设, 因而, 对于任意的正数 $\delta < b-a$, 必定存在两个正整数 n_1, n_2 (图 1.6), 使得 $n_2 > n_1 > N$ 及

$$x_{n_1} \in (b-\delta, M+\delta), \quad x_{n_2} \in (m-\delta, a+\delta)$$

$$(相应地, x_{n_2} \in (b-\delta, M+\delta), \quad x_{n_1} \in (m-\delta, a+\delta)).$$

由于开始已经假设区间 (a,b) 内没有 $\{x_n\}$ 中的点, 因而从上面关系式有

$$x_{n_1} \in [b, M+\delta) \quad 及\ x_{n_2} \in (m-\delta, a]$$

$$(相应地, x_{n_2} \in [b, M+\delta) \quad 及 \quad x_{n_1} \in (m-\delta, a]).$$