

在职攻读硕士学位全国联考辅导丛书

 学苑教育  
XY CHINA  
学苑集团·智力服务于中国

点石成金 系列

在职硕士全国联考命题研究组 组编

# GCT

# 数学

# 专项辅导教程

(根据最新考试大纲编写)

2009年  
最新版

- 专业权威** 与考试大纲同步, 由权威考试机构、资深GCT辅导专家编写
- 讲解经典** 选取历年经典考试真题, 融合几十万考生使用经验
- 严谨实用** 历经教师多年授课使用, 不断修改完善, 更加贴近考生需求

吉林大学出版社

· 联考红宝书 ·  
· 畅销全中国 ·

在职攻读硕士学位全国联考辅导丛书

 学苑教育  
XY CHINA  
学苑集团·智力服务于中国

点石成金 系列

在职硕士全国联考命题研究组 组编

# GCT

# 数学

## 专项辅导教程

(根据最新考试大纲编写)

2009年  
最新版

主编◎张乃岳

吉林大学出版社

### 图书在版编目(CIP)数据

GCT 数学专项辅导教程/在职硕士全国联考命题研究组编.  
—长春:吉林大学出版社,2009.5  
(在职攻读硕士学位全国联考辅导丛书.点石成金系列)  
ISBN 978-7-5601-3857-2

I. G… II. 在… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料  
IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 079968 号

书 名:GCT 数学专项辅导教程  
作 者:在职硕士全国联考命题研究组编

责任编辑、责任校对:王世林  
吉林大学出版社出版、发行  
开本:730×1000 毫米 1/16  
总印张:262 总字数:4192 千字  
ISBN 978-7-5601-3857-2

封面设计:奇文堂·潘峰  
三河市南阳印刷有限公司 印刷  
2009 年 5 月 第 1 次印刷  
总定价:500.00 元

版权所有 翻印必究  
社址:长春市明德路 421 号 邮编:130021  
发行部电话:0431-88499826  
网址:<http://www.jlup.com.cn>  
E-mail:[jlup@mail.jlu.edu.cn](mailto:jlup@mail.jlu.edu.cn)

## 《点石成金系列》编委会成员

(按姓氏拼音排序)

- 曹书畅:**学苑中心英语教研组核心成员,中国人民大学客座教授,学苑中心独家主讲。对在职研究生英语应试技巧和历年真题有深入研究,其缜密的授课逻辑思维,通俗易懂的教学方法,独特清晰的讲授风格,深受学员的欢迎。
- 陈慕泽:**教授,博士生导师,逻辑教研室主任。教育部研究基地、中山大学逻辑与认知研究所兼职研究员,中国逻辑学会常务理事,中国逻辑学会形式逻辑专业委员会主任,中国逻辑学会现代逻辑专业委员会副主任,北京市逻辑学会副会长。多年从事在职硕士考试的辅导工作。
- 冯玉军:**中国人民大学法学院副教授,法学博士,中国法学会法理学研究会理事。经济法学、现实法理论、后现代法学、法律全球化、比较经济法和区域法制问题为其主要研究领域。
- 关海庭:**北京大学法学博士,北京大学政府管理学院教授、博士生导师。多年帮助考生进行考前辅导,精研MPA历年真题,被誉为MPA辅导专家。
- 高鹏怀:**中国人民大学法学博士,中国人民大学公共管理博士后,中央民族大学MPA中心执行主任,副教授,硕士生导师。已出版《历史比较中的社会福利国家模式》、《比较选举制度》、《比较政党与政党政治》、《公共服务中的财政管理》等专著或译著;主编或参编《公共事业管理概论》《公共管理基础》等多部教材;主持或参与科研项目14项。
- 郭建华:**中国人民大学商学院副教授,MPAcc考前辅导专家,十余年财会考试培训经验,主编了大量会计方面的教材、工具书和辅导书。讲课如行云流水,脉络清晰,重点突出,通俗易懂,深受广大考生的欢迎和信赖。
- 韩秀桃:**司法部司法研究所研究员,法学博士,中国人民大学法学博士后。中国传统法律文化、近现代司法改革和司法制度、地域法律文化为其主要研究领域。
- 胡楠:**学苑中心综合学科研究组核心成员,北京师范大学客座教授,精通在职研究生心理学综合应试技巧,精研历年真题,具有丰富的教学经验。
- 刘庆华:**清华大学数学科学系副教授,2003年全国工程硕士研究生入学考试《数学考前辅导教程》主编。长期从事工程硕士数学考前辅导工作,清华大学、社科赛斯MBA培训中心工程硕士辅导班主讲教师。
- 李元起:**中国人民大学法学院副教授,硕士生导师,法学博士,宪法学辅导专家。长期从事律考、司法考试的辅导工作,能够准确把握命题思路、命题要求,预测命中率非常高。
- 孙茂竹:**中国人民大学教授,全国高校财务理论研究会理事。著有《管理会计》、《企业会计学》、《公司理财学》、《审计学》等。
- 田卫平:**北京交通大学人文学院副教授,全国大学语文研究会理事。参加编写教育部公共管理硕士专业学位联考语文考试大纲及考试指南、会计硕士专业学位联考语文考试大纲及考试指南,并编著多种考研语文辅导教材,长年讲



授 GCT、MBA 等考研语文辅导课程,具有丰富教学经验。

- 王飞燕:**清华大学数学科学系教授,曾获清华大学优秀教学成果奖。学苑中心考研辅导班教学主讲和工程硕士入学考试辅导教学主讲。讲课风格深入浅出,条理规范,重点突出准确,受到学员一致欢迎。
- 王 蕙:**英语语言学硕士,年轻教授。学苑中心在职英语研究小组核心成员之一,学苑中心独家主讲。与王建华老师一起被称作在职英语辅导界的“黄金搭档”。参加历年在职人员攻读硕士学位英语联考和同等学力人员申请硕士学位全国统一英语水平考试阅卷。
- 王建华:**中国人民大学外语学院杰出的青年教师,语言测试认知学博士、英语语言学硕士。参与同等学力全国统一考试英语阅卷工作。素有“在职英语辅导第一人”及“考试大师”的美称。学苑中心独家主讲。
- 王利平:**中国人民大学管理学博士,日本福岛大学访问学者,日本横滨国立大学进修。中国人民大学中小企业发展研究中心副主任,中华全国供销合作经济学会理事,全国高校商务管理研究会副会长。管理学的权威专家,学苑中心的特邀讲师。
- 王维燕:**北京航空航天大学副教授,教学经验丰富,讲课生动风趣,课堂气氛轻松活泼,善于启发式教学,积极为学生总结重点内容。多年从事在职人员考前辅导工作,对历年真题研究深入透彻。
- 王武籍:**求真求实的教学风格,一丝不苟的做人态度,严谨治学,教学细腻,有多年的语文教学工作经验,在教学中游刃有余,课堂生动活跃,要点突出,精研作文辅导,早在上世纪 90 年代就在中央电视台指导全国考生作文写作。学苑中心特邀讲师。
- 杨 帆:**博士后,中国人民大学信息学院教授,硕士生导师。C<sup>\*</sup>—动力系统,国家自然科学基金项目负责人之一,《美国数学评论》评论员。长期从事在职教育考前辅导工作,其教学方式和辅导内容深得学员喜爱。
- 尹振海:**中国人民大学文学院副教授,硕士生导师。曾参与制定 MPA 与 MPAcc 考试大纲,人大出版社系列教材《高分突破语文分册》编者之一。长期参与中国人民大学考前辅导教学,并长期担任清华大学、社科院、国家行政学院考前辅导任务。
- 张 磊:**英语语言学硕士,中国青年政治学院优秀教授,京城著名同等学力英语辅导专家,美国芝加哥大学高级访问学者,全国讲授在职英语联考辅导课和同等学力英语考前辅导课程,对考纲研究透彻,针对性强,重点突出,紧扣考点,应试技巧实用有效,深受广大学员欢迎。
- 张乃岳:**北京大学著名数学考试辅导专家,数学教育链式教学法(CHAIN)的创始人。所使用的“题盆式”、“三基式”以及“面向特征的解题方法”等考试应试法是很多考生应试的法宝。讲课风趣幽默,能够深入透彻地讲解数学的概念和定理,深受考生们的好评。
- 朱煜华:**清华、北大、人大、华杰 MBA 联考逻辑主讲教授,被誉为全国 MBA 联考逻辑辅导“领袖人物”。《MBA 联考逻辑应试精华教程》(命题委员会全国唯一指定参考用书,06 年修改版由华杰 MBA 及机械工业出版社联合推出)作者;理论扎实,应试实用性特别强。
- 赵晓耕:**中国人民大学法学院教授,博士生导师,中国法律史学会理事,中国政法大学法制史研究中心兼职研究员,具有丰富的教学经验。

# 前 言

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, 简称“GCT”)是国务院学位委员会办公室组织的全国统一考试,主要对象为参加工程硕士、农业推广硕士、兽医硕士、风景园林硕士、翻译硕士、汉语国际教育硕士以及高等学校教师和中等职业学校教师在职攻读硕士学位等入学考试的考生。GCT 考试属于综合素质型考试。GCT 试卷由四部分组成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。试卷满分为 400 分,每部分各占 100 分,考试时间为 3 小时,每部分为 45 分钟。考试试题均为客观选择题。GCT 试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学、军事学、管理学等门类,试题重点考核考生综合能力水平和反应速度。

为了帮助广大考生在短时间内了解考试内容,顺利通过 GCT 第一阶段的综合考试,我们针对在职人员的特点,依据我们多年的考试辅导经验,紧密结合考试大纲,精心编写了《GCT 数学专项辅导教程》。

本书在编写上力求突出以下特色:

**标准严谨:**严格按照最新 GCT 考试大纲编写的考前辅导用书。

**专业权威:**由权威机构、资深 GCT 辅导专家主持编写。

**准确指导:**根据考试大纲的要求,依次从算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数方面系统地给予介绍和总结,同时结合历年考试情况,突出 GCT 数学应试能力考试的特点。为了加强考生对各部分考试内容的理解、掌握和应用,短时间内提高应试能力,首先,从分析考试大纲入手,让考生了解历年 GCT 考试的重难点,结合历年考试要点对重难点知识进行讲解、分析和总结,帮助考生在最短的时间内,掌握考试的重难点所在;其次,指导考生如何掌握答题技巧,快速、正确地答对题获得有效分数,对考生来讲尤为重要,本教程通过典型例题的讲解,告诉考生如何答题考取高分。

**本教程的优势:**有条理、有针对性地对各章节的考试内容进行了总结,对重难点进行点拨和辅导;同时,根据考试要求在各章节里为考生精心准备了历年真题和大量的专项练习,并配之以详细的解析,且每一部分都设计了历年考点对比表,目的是帮助考生快速理解、消化考试的知识点,在较短时间内迅速提高数学水平和应试能力。

我们衷心希望考生能够通过本书的学习,在考试中取得优异的成绩。本书由于编写时间有限,书中难免会有一些缺点或纰漏,希望广大考生和相关领域的专家及老师给予批评和指正,以帮助我们不断的改进和提高。

编 者

2009 年 5 月

# 学苑集团简介

## 关于我们

学苑集团，由1997年成立的北京学苑科技开发中心发展壮大而来，目前集团以在职人员高端教育为核心，有短期考前辅导系统、学位教育系统、出国培训系统、企业管理咨询系统、海外交流等多个发展平台，是一家集教育培训、教育服务、企业咨询、国际交流、图书出版于一体的综合性教育科技集团。

目前集团由中际华夏企业管理发展研究中心、北京学苑科技开发中心、学苑纵横文化交流中心、加拿大爱尔德纳中心四家全资企业组成。

目前集团业务在全球范围开展，先后多伦多、法兰克福、北京、上海、广州等地区设立直属分部。并与全球50家机构组成了庞大的学苑集团业务网络群。

在未来的日子里，我们将继续以“智力服务于社会、提高企业与个人整体竞争力”为目标，用我们的努力，与大家共同“启迪广袤思维，追求卓越表现，迈向成功与卓越”。

## 我们的业务

**中际华夏——管理咨询、学位教育系统：**由学苑集团的中际华夏企业管理中心承担运作。定期举办与国民经济密切相关领域的研讨会、论坛，同时为政府与地方区域经济决策、企业投融资与经营等项目进行筛选与决策，中际华夏的定位是“为区域产业提升与地区发展提供服务的综合型咨询机构”。

**学苑中国——短期考试辅导系统：**由学苑集团的北京学苑科技开发中心承担运作。历经十年发展，考试培训内容已涵盖了所有研究生考试种类，职业资格考试和国家外语类的等级考试。通过我们的直属分部和代理商的努力，每年有近两万多名学员参加学苑中国的各种辅导培训。优秀的培训辅导和完善的教学保障体系使得学苑中国成为中国在职教育行业中的一个知名机构。

**学苑纵横——图书策划与出版系统：**由学苑集团的学苑纵横文化交流中心承担运作。主要负责学苑教育集团在职教育培训、在职考研、企业管理与咨询等方面图书的策划、编辑和出版工作。在多年学历教育培训的基础上，出版了同等学力人员申请硕士学位全国统一考试辅导丛书、在职攻读硕士学位全国联考辅导丛书、全国普研考试系列辅导丛书、企业管理与咨询等领域的图书、音像制品等。

**爱尔德纳——出国培训系统、海外交流系统：**学苑集团与加拿大爱尔德纳中心共同投资成立的北京爱尔德纳中心承担运作了学苑集团的出国培训和国际交流业务。主要业务：来华投资咨询和考察、地方招商引资、出国培训、出国就业服务等。我们的业务在加拿大和欧洲得到了很大的发展。



# 目 录

## 第一部分 算术

第一章	数的概念	( 2 )
第二章	数的运算	( 5 )
第三章	数的整除	( 9 )
第四章	比和比例	( 12 )
第五章	平均数	( 15 )

## 第二部分 代数

第一章	实数的运算	( 18 )
第二章	复数	( 21 )
第三章	代数式	( 24 )
第四章	方程和不等式	( 30 )
第五章	数列	( 34 )
第六章	排列与组合	( 38 )
第七章	概率论初步	( 42 )

## 第三部分 几何

第一章	平面几何	( 54 )
第二章	立体几何	( 71 )
第三章	三角函数	( 78 )
第四章	解析几何	( 90 )

## 第四部分 微积分

第一章	函数	(104)
第二章	极限	(108)
第三章	连续	(119)
第四章	导数与微分	(124)
第五章	微分中值定理	(132)
第六章	导数的应用	(141)





第七章	不定积分 .....	(145)
第八章	定积分的计算 .....	(151)
第九章	定积分的应用 .....	(160)

### 第五部分 线性代数

第一章	行列式 .....	(166)
第二章	矩阵 .....	(178)
第三章	向量组 .....	(209)
第四章	线性方程组 .....	(229)

# 第一部分 算术





# 第一章

## 数的概念

### ● 考纲要求及应试指导

1. 自然数、整数的概念
2. 分数、小数、百分数的概念

### 知 识 点 总 结

1. 自然数是形如  $0, 1, 2, \dots$  的数. 注意: 自然数是从  $0$  开始的. 自然数的符号记作  $N$ .

2. 整数包括正整数 (形如  $1, 2, \dots$  的数)、负整数 (形如  $-1, -2, \dots$  的数) 和零 ( $0$ ). 整数的符号记作  $Z$ .

3. 分数是整数之比的形式, 形如  $\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, -1\frac{2}{3}$ . 分子和分母互质的分数称为最简分数, 例如  $\frac{2}{3}, \frac{7}{5}$  等. 分子比分母小的分数称为真分数, 例如  $\frac{2}{3}$ . 分子比分母大的分数称为假分数, 例如  $\frac{7}{5}$ . 同时具有整数部分和分数部分的分数称为带分数, 例如  $1\frac{2}{3}$ . 分数也同样分为正分数和负分数. 分数都可以化为有限小数或者无限循环小数.

4. 小数是具有小数点的数, 形如  $0.2, 3.23, 1.2$  等. 小数按照小数点后面的数字分类的话, 可以分为有限小数 (例如  $0.2$ ), 无限循环小数 (例如  $0.333\dots$ ) 和无限不循环小数 (例如  $\pi=3.1415926\dots$ ) 三种类型. 有限小数和无限循环小数都可以化为分数.

5. 百分数是具有百分比符号的数, 形如  $1\%, 30\%, 35.6\%$  等.

### 重 难 点 分 析

#### 1. 化循环小数为分数的方法

如何将一个循环小数化成分数是本部分的难点, 我们可以使用下面例题 1、例题 2 和例题 3 中的方法将各种循环小数化为分数.

#### ● 典型例题

**【例 1】** 将纯循环小数  $0.\dot{3}=0.333\dots$  化为分数形式.



**解：**我们可以设  $x=0.\dot{3}=0.333\dots$ ，则将  $x$  的小数点向右移动一位，实际上就是将  $x$  扩大了 10 倍，得到：

$$x=0.333\dots \quad (1)$$

$$10x=3.333\dots \quad (2)$$

因此，我们可以用 (2) 式减去 (1) 式，得到：

$$9x=3$$

因此，我们得到：

$$x=\frac{1}{3}$$

也就是：

$$0.\dot{3}=0.333\dots=\frac{1}{3}$$

**【例 2】**将纯循环小数  $0.\dot{1}\dot{3}=0.1313\dots$  化为分数形式.

**解：**我们可以设  $x=0.\dot{1}\dot{3}=0.1313\dots$ ，则将  $x$  的小数点向右移动两位（移动的位数就是循环小数循环节的位数），实际上就是将  $x$  扩大了 100 倍，得到：

$$x=0.1313\dots \quad (1)$$

$$100x=13.1313\dots \quad (2)$$

因此，我们可以用 (2) 式减去 (1) 式，得到：

$$99x=13$$

因此，我们得到：

$$x=\frac{13}{99}$$

也就是：

$$0.\dot{1}\dot{3}=0.1313\dots=\frac{13}{99}$$

**【例 3】**将混循环小数  $0.2\dot{1}\dot{3}=0.21313\dots$  化为分数形式.

**解：**我们可以设  $x=0.2\dot{1}\dot{3}=0.21313\dots$ ，则将  $x$  的小数点向右移动一位（移动的位数就是循环小数非循环节的位数），实际上就是将  $x$  扩大了 10 倍，得到：

$$10x=2.1313\dots$$

因此，我们可以按照例题 2 的方法，得到：

$$10x=2+\frac{13}{99}=2\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$$

也就是：

$$0.2\dot{1}\dot{3}=0.21313\dots=\frac{211}{99}$$



## 专项练习题

1. 在实数  $\pi$ ,  $\frac{289}{17}$ ,  $-2$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $0.999\cdots$ ,  $\sqrt[3]{64}$  中, 经过化简之后, 是整数的有几个 ( )

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个



## 参考答案及解析

1. 解答: 在  $\pi$ ,  $\frac{289}{17}$ ,  $-2$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $0.999\cdots$ ,  $\sqrt[3]{64}$  这些数中,  $\pi$  为无理数, 是无限不循环小数, 无法化成分数;  $\frac{289}{17}=17$  是整数;  $-2$ ,  $0$  显然是整数;  $\sqrt{3}$  是无理数, 无法化成分数;  $\sqrt[3]{64}=4$  是整数; 而  $0.999\cdots$  按照例题的解法不难知道  $0.999\cdots=1$  也是一个整数; 因此,  $\pi$ ,  $\frac{289}{17}$ ,  $-2$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $0.999\cdots$ ,  $\sqrt[3]{64}$  一共有 5 个整数, 应该选择 D 选项.

## 历年考点对比

年度	2003 年	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
分值	0	0	0	0	0	0



## 第二章

### 数的运算

#### 考纲要求及应试指导

1. 整数的四则运算
2. 小数的四则运算
3. 分数的四则运算

#### 知识点总结

1. 整数的四则运算包括整数之间的加、减、乘、除（除数不为零）四种运算。

2. 整数对于加法运算、减法运算和乘法运算是封闭的，也就是说：任意给定两个整数  $a, b \in \mathbf{Z}$ ，可以得到  $a+b \in \mathbf{Z}$ ，以及  $a \times b \in \mathbf{Z}$ 。

3. 整数的带余除法：用一个整数  $a$  去除整数  $b$ ，且  $a > 0$ ，则必有并且只有两个整数  $q$  与  $r$ ，使  $b = aq + r$ ， $0 \leq r < a$ 。这就是带余除法的一般表达式。当  $r = 0$  时，记为  $a \mid b$ ，称为  $b$  被  $a$  整除；当  $r \neq 0$  时，记为  $a \nmid b$ ，称为  $b$  不能被  $a$  整除，或者说， $b$  除以  $a$  的余数不为零。

利用余数将自然数分类，在解决实际问题中有广泛应用。我们说，任何一个自然数  $b$  被正整数  $a$  除时，余数只可能是  $0, 1, 2, \dots, a-1$ 。这样就可以把自然数分为  $a$  类。例如，一个自然数被 4 除，余数只能是  $0, 1, 2, 3$  中的一个。因此，所有自然数按被 4 除时的余数分为 4 类，即  $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ 。任何自然数都在这四类之中。

我们还关心带余除法中的另一个问题，即是当两个整数  $a, b$  除以不为 0 的同一整数  $n$  时，余数相同，称为同余问题。一般地，记为  $a \equiv b \pmod{n}$ 。记号“ $\equiv$ ”读作“同余于”，“ $\pmod{n}$ ”读作“模”，此式读作“ $a$  同余于  $b$  模  $n$ ”或“ $a$  与  $b$  对模  $n$  同余”。

例如： $32 \equiv 7 \pmod{5}$ ，是由于 32 与 7 分别被 5 除，余数都是 2。读作“32 与 7 对模 5 同余”。

4. 在同余问题中，常用的性质有：（1）同一模的同余式可以相加，就是如果  $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ ， $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ ，那么  $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$ 。（2）同一模的同余式可以相乘，如果  $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ ， $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ ，那么  $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$ 。（3）同余式双方可乘以同一整数，就是如果  $a \equiv b \pmod{n}$ ，对于任何整数  $k$ ，那么  $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}$ 。



(4) 同余式双方可“约去”一个共同的因子(与模数互质的因数). 就是如果  $a \equiv b \pmod{n}$ ,  $a_1q = a$ ,  $b_1q = b$ ,  $q$  与  $n$  互质, 那么  $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$

### 重 难 点 分 析

#### 1. 带余除法的应用

如何在不求出具体的结果的情况下找到余数是本部分的难点.

#### 2. 计算问题

某些计算问题, 包括整数、小数以及分数的综合计算.

### 典型例题

**【例 1】** 求  $1273 \times 465$  的积, 被 7 除的余数 ( )

A. 1                      B. 3                      C. 4                      D. 6

**分析:** 直接用 7 去除  $1273 \times 465$  的积, 计算太繁琐, 利用带余除法的一般表达式去做, 可简化运算.

**解:** 设  $1273 \times 465$  的积被 7 除, 商  $p$ , 余数  $r$ .

$$\text{得 } 1273 \times 465 = 7p + r \quad (1)$$

$$\text{又 } \because 1273 = 7a + 6, 465 = 7b + 3.$$

$$\therefore 1273 \times 465 = (7a + 6)(7b + 3) = 7(7ab + 3a + 6b + 2) + 4 \quad (2)$$

比较 (1)、(2), 得  $r = 4$ .

**评注:** 求余数, 对式中的商  $p$ 、 $a$ 、 $b$  是多少, 我们并不关心. 实际要做的是找到余数 6 和 3, 求出  $6 \times 3 = 18$ , 除以 7 的余数 4.

所以应该选择 C 选项.

**【例 2】** 求  $13^{13} + 14^{14} + 15^{15}$  被 13 除的余数是 ( )

A. 3                      B. 5                      C. 8                      D. 9

**分析:** 直接计算求余数非常困难. 因为  $13 \mid 13^{13}$ , 所以只需算  $14^{14} + 15^{15}$  被 13 除的余数. 注意到  $14 \div 13$  余 1,  $15 \div 13$  余 2, 利用同余性质, 问题可大大简化.

**解:**  $\because 13^{13}$  能被 13 整除, 余数为 0.

$$\text{而 } 14 \equiv 1 \pmod{13}, 15 \equiv 2 \pmod{13}.$$

$$\text{由同余性质 (2), 得 } 14^{14} \equiv 1^{14} \equiv 1 \pmod{13} \text{ 并且 } 15^{15} \equiv 2^{15} \equiv 8 \pmod{13}.$$

$$\text{由同余性质 (1), 得 } 13^{13} + 14^{14} + 15^{15} \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 9 \pmod{13}.$$

即  $13^{13} + 14^{14} + 15^{15}$  被 13 除的余数为 9.

所以应该选择 D 选项.

本题实际上是利用了同余式的性质求余数, 使求余数的问题大大简化.

**【例 3】** 两整数  $a$ 、 $b$ ,  $a$  除以 7 余 2,  $b$  除以 7 余 5, 当  $a^2 > 3b$  时, 求  $a^2 - 3b$  的差除以 7 的余数 ( )



- A. 3                      B. 5                      C. 8                      D. 9

**分析：**利用带余除法的一般表达式，代入式子  $a^2 - 3b$  中，经过变形就可得到所求的余数。

**解：**设  $a=7m+2$ ,  $b=7n+5$ ,

当  $a^2 > 3b$  时,  $a^2 - 3b > 0$ .

$$\therefore a^2 - 3b = (7m+2)^2 - 3(7n+5) = 49m^2 + 28m + 4 - 21n - 15 = 7(7m^2 + 4m - 3n - 2) + 3.$$

得  $a^2 - 3b$  除以 7 余 3.

所以应该选择 A 选项.

本题中变形  $a^2 - 3b$  的目标，就是将它写成带余除法的一般式  $b=aq+r$ ，而我们关心的只是式中的  $r$  值.

**【例 4】** 求  $x$  ( $0 \leq x < 100$ ), 使  $x \equiv 14 \pmod{15}$ , 且  $x \equiv 5 \pmod{8}$  则  $x$  可以是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 7                      D. 9

**分析：**所求的  $x$  是不小于 0 且小于 100 的整数， $x$  满足被 15 去除余 14，被 8 去除余 5，根据这两个条件，容易找出整数  $x$ .

**解：** $\because 0 \leq x < 100$ ，满足  $x \equiv 14 \pmod{15}$  的整数有 14、29、44、59、74、89；

满足  $x \equiv 5 \pmod{8}$  的整数有 5、13、21、29、37、45、53、61、69、77、85、93.

则同时满足上述两个条件的只有  $x=29$ .

所以应该选择 B 选项.

注意到满足条件的各个数，依次相差的就是“模数”，找出这些数以及同时满足两个条件的数，就不困难了.

**【例 5】** 今有物，不知其数，三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二，问物几何？ ( )

- A. 12                      B. 23                      C. 24                      D. 25

**分析：**本问题是有一个数，被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求此数. 利用带余除法表达式表示这个数，然后求出各除数 3、5、7 的最小公倍数 105，再令与 105 相乘的数为 0，就可得到满足条件的最小整数.

**解：**设这堆物为  $x$ ，根据题意，得：

$$x=3a+2, x=5b+3, x=7c+2.$$

$\because 3 \times 5 \times 7 = 105$ ，且 3、5、7 互质，所以最小公倍数为 105.

$$\text{上三式变形为} \begin{cases} 35x=105a+70 & (1) \\ 21x=105b+63 & (2) \\ 15x=105c+30 & (3) \end{cases}$$





由 (2) + (3) - (1), 得  $x=105(b+c-a)+23$ .

取  $b+c-a=0$ , 则  $x=23$ .

所以应该选择 B 选项.

这是我国古代一个典型的余数问题. 这类问题通常是先求出各除数的最小公倍数, 然后写出要求数的表达式. 当出现加上一个常数, 就可取与最小公倍数相乘的这个数为 0; 当出现减去一个常数, 可取这个乘数为 1, 另外,  $x=23$  只不过是满足本例条件的最小正整数而已.

### 专项练习题

1. 已知  $a=\frac{2002}{2003}$ ,  $b=\frac{2003}{2004}$ ,  $c=\frac{2004}{2005}$ , 则 ( )

A.  $a>b>c$

B.  $b>c>a$

C.  $c>a>b$

D.  $c>b>a$

2.  $\frac{\sum_{i=1}^{101} 1}{\sum_{i=1}^{101} (-1)^{i-1}} =$  ( )

A. 100

B. 101

C. 102

D. 103



### 参考答案及解析

1. 解答:  $a=1-\frac{1}{2003}$ ;  $b=1-\frac{1}{2004}$ ;  $c=1-\frac{1}{2005}$  又因为  $\frac{1}{2003}>\frac{1}{2004}>\frac{1}{2005}$ , 所以  $1-\frac{1}{2003}<1-\frac{1}{2004}<1-\frac{1}{2005}$ , 也就是  $c>b>a$ , 选择 D 选项.

2. 解答: 分子为  $\sum_{i=1}^{101} 1 = 101$ , 分母为  $\sum_{i=1}^{101} (-1)^{i-1} = 1-1+1-1+\dots+1 = 1$ , 选择 B 选项.

### 历年考点对比

年度	2003年	2004年	2005年	2006年	2007年	2008年
分值	4	4	4	4	4	4