普通高等教育“十一五”国家级规划教材《微积分》配套用书

（一）

微积分辅导教程

◎ 主编　张学奇

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材《微积分》配套用书

（一）

微积分辅导教程

◎ 主编 张学奇

参编 陈锡祯 刘 伟
胡 蓉 刘

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

微积分辅导教程/张学奇主编.
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-09601-8

Ⅰ. 微…
Ⅱ. 张…
Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 126669 号

微积分辅导教程
主编　张学奇

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2008 年 9 月第 1 版
印　　张	20.5 插页 1	**印　　次**	2008 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	377 000	**定　　价**	29.00 元

前　言

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《微积分（上、下册）》（张学奇编著，中国人民大学出版社出版）配套使用的辅导教材，主要作为学生学习《微积分》课程的同步辅导书和习题课教材，同时也可供报考研究生的学生系统复习时使用.

根据配套辅导教材的编写要求，全书按教材章节顺序编排，与教材同步. 每章包括教学基本要求、内容概要、要点剖析、典型例题解析、常见错误分析、单元自测题等内容，对学生进行同步辅导，为教师平时的教学以及习题课提供参考. 本书突出对教学内容的提炼和概括，对知识要点的剖析和解题方法的归纳，对典型例题的分析和总结，体现数学思想与方法，注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

教学基本要求部分主要是根据经济管理类本科微积分课程的教学基本要求确定，同时也根据教学实际作了适当的修改. 对教学要求的层次，按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示要求程度上的差异.

内容概要部分以图表形式直观地列出了每一章的基本概念、基本定理、基本性质及它们之间的相互关系，一目了然，便于读者从结构上系统掌握、理解、记忆学习内容.

要点剖析部分对每一章的学习要点和基本知识点进行了深入剖析，对解题方法进行了点拨，加深学生对基本概念、基本定理、基本方法的理解和掌握.

典型例题解析部分按题型分类，力图把对基本概念的理解、基本理论的运用、基本方法的掌握、解题技能的培养融于典型范例中. 例题的选取突出典型性、示范性，包括基本题、综合题、考研真题，典型例题配有必要的分析、点评和同类题的练习，注重一题多解，拓宽学生的思路，有助于学生举一反三，提高解题能力.

各章中编排了常见错误分析，分析学生解题中经常出现的解题错误原因，纠正解题错误. 部分章节根据内容特征还编排了模型应用实例，与教材相呼应，提高学生数学建模能力. 每章中还编写了单元自测题和自测题答案与提示，便于读者检查自己对微积分基本概念、基本理论、基本方法的掌握情况.

本书由张学奇教授主编，参加编写的有：陈锡祯（第一、二章），刘伟（第三、四章），张学奇（第五、六章），胡蓉（第七、八章），刘娟（第九章）. 全书由张学奇统稿定稿.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行和读者批评指正！

编　者

2008 年 3 月

目　录

第一章　函数 …… 1
一、教学基本要求 …… 1
二、内容概要 …… 1
三、要点剖析 …… 3
四、典型例题解析 …… 5
五、常见错误分析 …… 12
单元自测题 …… 13
第二章　极限与连续 …… 16
第一节　极限的概念 …… 16
一、教学基本要求 …… 16
二、内容概要 …… 16
三、要点剖析 …… 18
四、典型例题解析 …… 20
第二节　极限的运算 …… 23
一、教学基本要求 …… 23
二、内容概要 …… 23
三、要点剖析 …… 25
四、典型例题解析 …… 27
五、常见错误分析 …… 32
第三节　函数的连续性 …… 34
一、教学基本要求 …… 34
二、内容概要 …… 34
三、要点剖析 …… 37
四、典型例题解析 …… 38
五、常见错误分析 …… 41
单元自测题 …… 41

第三章　导数与微分 …… 44
第一节　导数概念与运算 …… 44
一、教学基本要求 …… 44
二、内容概要 …… 44
三、要点剖析 …… 47
四、典型例题解析 …… 48
五、常见错误分析 …… 56
第二节　微分与导数在经济学上的应用 …… 58
一、教学基本要求 …… 58
二、内容概要 …… 59
三、要点剖析 …… 61
四、典型例题解析 …… 63
五、常见错误分析 …… 69
六、模型应用实例 …… 69
单元自测题 …… 72
第四章　一元函数微分学应用 …… 75
第一节　微分中值定理与洛必达法则 …… 75
一、教学基本要求 …… 75
二、内容概要 …… 75
三、要点剖析 …… 77
四、典型例题解析 …… 79
五、常见错误分析 …… 89
第二节　导数的应用 …… 91
一、教学基本要求 …… 91
二、内容概要 …… 91
三、要点剖析 …… 94
四、典型例题解析 …… 96
单元自测题 …… 110
第五章　积分 …… 113
第一节　积分概念与基本公式 …… 113
一、教学基本要求 …… 113
二、内容概要 …… 113
三、要点剖析 …… 117

四、典型例题解析 …… 119
五、常见错误分析 …… 124
第二节 积分法 …… 127
一、教学基本要求 …… 127
二、内容概要 …… 128
三、要点剖析 …… 129
四、典型例题解析 …… 131
五、常见错误分析 …… 141
第三节 有理函数积分与反常积分 …… 142
一、教学基本要求 …… 142
二、内容概要 …… 142
三、要点剖析 …… 144
四、典型例题解析 …… 146
五、常见错误分析 …… 150
第四节 定积分的应用 …… 151
一、教学基本要求 …… 151
二、内容概要 …… 151
三、要点剖析 …… 154
四、典型例题解析 …… 155
单元自测题 …… 162
第六章 多元函数微积分 …… 168
第一节 多元函数与偏导数 …… 168
一、教学基本要求 …… 168
二、内容概要 …… 168
三、要点剖析 …… 172
四、典型例题解析 …… 174
第二节 全微分与微分法 …… 180
一、教学基本要求 …… 180
二、内容概要 …… 180
三、要点剖析 …… 183
四、典型例题解析 …… 184
五、常见错误分析 …… 192
第三节 多元函数的极值与应用 …… 194

一、教学基本要求 …………………………………………………………… 194
二、内容概要 ……………………………………………………………… 194
三、要点剖析 ……………………………………………………………… 196
四、典型例题解析 ………………………………………………………… 197
第四节　二重积分 ………………………………………………………… 204
一、教学基本要求 ………………………………………………………… 204
二、内容概要 ……………………………………………………………… 204
三、要点剖析 ……………………………………………………………… 208
四、典型例题解析 ………………………………………………………… 209
五、常见错误分析 ………………………………………………………… 218
单元自测题 ………………………………………………………………… 220
第七章　无穷级数 ……………………………………………………… 226
第一节　数项级数概念及敛散性判别法 ………………………………… 226
一、教学基本要求 ………………………………………………………… 226
二、内容概要 ……………………………………………………………… 226
三、要点剖析 ……………………………………………………………… 229
四、典型例题解析 ………………………………………………………… 231
五、常见错误分析 ………………………………………………………… 237
第二节　幂级数 …………………………………………………………… 239
一、教学基本要求 ………………………………………………………… 239
二、内容概要 ……………………………………………………………… 239
三、要点剖析 ……………………………………………………………… 242
四、典型例题解析 ………………………………………………………… 244
五、常见错误分析 ………………………………………………………… 249
单元自测题 ………………………………………………………………… 251
第八章　常微分方程 …………………………………………………… 255
第一节　常微分方程的基本概念与一阶微分方程 ……………………… 255
一、教学基本要求 ………………………………………………………… 255
二、内容概要 ……………………………………………………………… 255
三、要点剖析 ……………………………………………………………… 257
四、典型例题解析 ………………………………………………………… 259
五、常见错误分析 ………………………………………………………… 264
第二节　二阶微分方程与微分方程模型 ………………………………… 265

一、教学基本要求 …… 265
二、内容概要 …… 266
三、要点剖析 …… 268
四、典型例题解析 …… 269
五、常见错误分析 …… 274
六、模型应用实例 …… 275
单元自测题 …… 278
第九章　差分方程 …… 282
一、教学基本要求 …… 282
二、内容概要 …… 282
三、要点剖析 …… 285
四、典型例题解析 …… 286
五、常见错误分析 …… 291
单元自测题 …… 292

综合测试题 …… 296
综合测试题参考答案 …… 307

第一章　函　　数

函数是微积分的研究对象，本章内容主要包括：函数的概念、反函数与复合函数概念、函数的几种特性、基本初等函数和初等函数的概念与性质、几种常用的经济函数模型.

一、教学基本要求

(1) 理解函数的概念，会求函数的定义域与值域. 理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(2) 理解复合函数和反函数的概念，会正确分析复合函数的复合过程.

(3) 熟悉基本初等函数的性质及其图形.

(4) 会建立简单实际问题中的函数关系式.

二、内容概要

1. 函数的概念

定义 1　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，如果有 D 到 $\mathbf{R}$ 上的一个映射(对应规则) f，使得对于每个 $x\in D$，通过映射 f 都有唯一确定的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**，x 称为 f 的**自变量**，y 称为**因变量**，函数记作 $y=f(x)$，其中 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 $D(f)$，全体函数值的集合称为函数 f 的**值域**，记作 $R(f)$.

2. 反函数与复合函数

定义 2　设函数 f 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，如果对于每个 $y\in R(f)$，有唯一的 $x\in D(f)$ 满足 $y=f(x)$，则称定义在 $R(f)$ 上的对应关系 f^{-1}：$y\to x$ 为函数 f 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，这时原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别为函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域，即

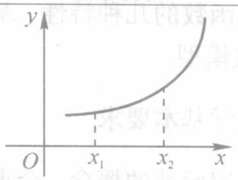
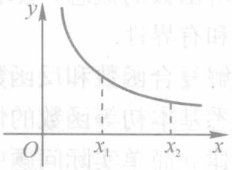
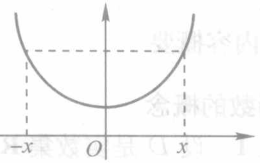
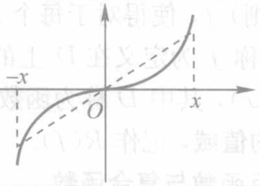
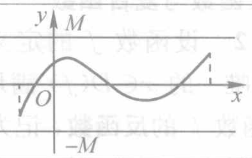
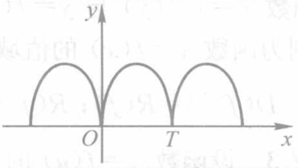
$$D(f^{-1})=R(f);\ R(f^{-1})=D(f)$$

定义 3　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，若 G

是 D 中使 $u=\varphi(x)\in U$ 的 x 的全体构成的非空数集，即 $G=\{x|x\in D,\ \varphi(x)\in U\}\neq\varnothing$，则对于任意 $x\in G$，按照对应关系 φ 和 f 确定唯一 y，于是在 G 上定义了一个函数，记作 $f\circ\varphi$，该函数称为 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的**复合函数**，记为 $y=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$，$x\in G$，其中 u 称为**中间变量**.

3. 函数的几种特性(见表 1—1)

表 1—1　　函数的几种特性

性质	定义	图形特征
单调性	函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加.	
	函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.	
奇偶性	函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，若对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数.	
	函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，若对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.	
有界性	设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在常数 $M>0$，对任意 $x\in I$，都有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 I 上有界函数.	
周期性	设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在不为零的正数 T，使得对于任意 $x\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数.	

4. 初等函数

(1) 基本初等函数（见表 1—2）

表 1—2　　**基本初等函数**

函数名称	函数表达式
常数函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为实数）
指数函数	$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

(2)初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成，且能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**，否则就是非初等函数.

5. 几种常用的经济函数模型

(1)需求函数与供给函数

设商品的需求量与供给量分别用 Q 和 S 表示，商品价格为 p，若忽略市场其他因素的影响，只考虑反映该商品的价格因素，则 Q 和 S 分别为 p 的函数，即有：

$Q=Q(p)$（价格 p 取非负值），称为**需求函数**

$S=S(p)$（价格 p 取非负值），称为**供给函数**

(2)成本函数、收益函数与利润函数

若只考虑产品的数量 q，而不考虑市场其他因素的影响，则用 $C=C(q)$ 表示总成本函数；$R=R(q)$ 表示总收益函数；总利润函数为 $L=L(q)=R(q)-C(q)$.

三、要点剖析

微积分研究的对象为函数，微积分讨论的函数主要是初等函数.

1. 函数的概念

(1) 函数的两个要素：函数的对应规则和定义域称为函数的两个要素. 一个函数只要定义域和对应规则给定，则函数也就确定. 当两个函数的定义域及对应规则都相同时，这两个函数相等.

(2) 函数的表达形式：函数定义强调了自变量 x 在定义域 D 上每取一值时，函数都有唯一确定的值 y 与它对应，而对于对应关系的形式，定义中并无限制，因此一个函数可以用解析式来表达，也可以用图像法和表格法来表达.

在用解析式表达时，可用一个式子表达，也可用几个式子表达（即分段函数）；可以用参数式（实质是以参变量为中间变量的复合函数）表达，也可以用隐式（即隐函数）表达.

（3）初等函数是由基本初等函数构成，因此对基本初等函数及其性质要非常熟悉，对基本初等函数以及性质的深入了解应结合函数图形进行，将函数的性质与图形的特点相对照，利用图形来记忆函数的性质.

2. 反函数

（1）函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；$y=f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $y=f(x)$ 的值域.

（2）求反函数的方法：通过原函数 $y=f(x)$ 的表达式解出 x 关于 y 的函数 $x=f^{-1}(y)$，然后将变量 x 与 y 互换，即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义，值域为 W，若 $W\cap U\neq\varnothing$ 时，可以在 $G=\{x|x\in D,\ \varphi(x)\in U\}\subseteq D$ 上确定复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，该函数称为 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的复合函数.

（1）构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的条件是：$W\cap U\neq\varnothing$

①当 $W\subset U$ 时，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 D.

②当 $W\cap U\neq\varnothing$，$W\not\subset U$ 时，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $G=\{x|x\in D,\ \varphi(x)\in U\}\subseteq D$.

（2）确定复合函数的方法：

①代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法称为代入法，该方法适用于初等函数的复合.

②分析法：所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该方法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

③图示法：所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法，适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合.

（3）将复合函数分解成基本初等函数的方法是从复合函数外层到里层逐层引入中间变量.

4. 函数定义域的几种求法

（1）求函数定义域的一般原则是：根据基本初等函数定义域的限定条件，列出自变量满足的不等式（组），并求解，确定出使函数有意义的一切实数. 基本初等函数的定义域见表 1—3.

表 1—3 基本初等函数的定义域

$y=\dfrac{1}{x}$，$D(f)$：$x\neq 0$	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$D(f)$：$\|x\|\leqslant 1$
$y=\sqrt[2n]{x}$，$D(f)$：$x\geqslant 0$	$y=\tan x$，$D(f)$：$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$
$y=\log_a x$，$D(f)$：$x>0$	$y=\cot x$，$D(f)$：$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

(2) 分段函数定义域是各段定义域的并集.

(3) 求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，令 $u=\varphi(x)$，由 $y=f(u)$ 的定义域作为 $u=\varphi(x)$ 的值域，解出 x 的变化范围.

(4) 已知 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，求 $y=f(u)$ 的定义域的方法：从 x 的变化范围解出 $u=\varphi(x)$ 的值域即可.

5. 函数奇偶性的判别

(1) 定义法：设 $y=f(x)$在 $(-l, l)$ 上有定义，若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 利用运算性质：奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数. 偶数个奇（或偶）函数之积仍为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数. 一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数.

四、典型例题解析

题型一　求函数定义域

例 1　求下列函数的定义域，并用区间表示.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$　(2) $y=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

(3) $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$　(4) $y=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1\\ x+1, & 1<|x|<2\end{cases}$

解　(1) 要使函数有意义，必须满足不等式 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解不等式组得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$. 所以，函数的定义域为 $[-2, 1)\cup(1, 2]$.

(2) 要使函数有意义，应有 $x^2-x-6\neq 0$ 得 $x\neq 3$ 且 $x\neq -2$. 故函数的定义域为 $(-\infty, -2)\cup(-2, 3)\cup(3, +\infty)$.

(3) 要使函数有意义，应满足不等式组

$$\begin{cases}\ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}\quad 即 \begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$$

由 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即 $x^2-5x+4\leqslant 0$，解二次不等式，得函数的定义域为 $[1, 4]$.

(4) 因为该函数为分段函数，所以其定义域为各个区间的并. $|x|\leqslant 1$ 用区间表示为 $[-1, 1]$；$1<|x|<2$ 即 $(-2, -1)\cup(1, 2)$，故函数的定义域为 $(-2, -1)\cup[-1, 1]\cup(1, 2)=(-2, 2)$.

练习 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域.

题型二　求函数表达式

例 2 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，求 $f(1)$，$f(x-1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

解 令 $f(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$，则 $f(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{2}$.

$$f(x-1)=\left.\frac{t}{1+t^2}\right|_{t=x-1}=\frac{x-1}{1+(x-1)^2}=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left.\frac{t}{1+t^2}\right|_{t=\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{x}{1+x^2}}=\frac{1+x^2}{x}=\frac{1}{x}+x$$

例 3 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x^2+\ln x, & x>0\end{cases}$，求 $f(1-x)$，$f(x-1)$.

解 因为 $f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & 1-x\leqslant 0\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & 1-x>0\end{cases}$，所以

$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & x\geqslant 1\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & x<1\end{cases}$$

类似地 $f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1), & x\leqslant 1\\ (x-1)^2+\ln(x-1), & x>1\end{cases}$

例 4 设函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$，$f(x-2)$.

解　方法 1　令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，由此可得 $x^2=tx-1$，代入 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，化简得 $f(t)=(tx-1)+\dfrac{1}{tx-1}=t^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

方法 2　因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f(t)=t^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

用类似的方法可求 $f(x-2)=(t^2-2)\big|_{t=x-2}=x^2-4x+2$.

例 5　设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x(|a|\neq|b|)$，求 $f(x)$.

解　令 $t=-\dfrac{1}{x}$ 则 $x=-\dfrac{1}{t}$，于是原方程变为 $bf(t)+af\left(-\dfrac{1}{t}\right)=-\sin\dfrac{1}{t}$，即 $bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x}$. 解联立方程组

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x \\ bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

得　$f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin x+b\sin\dfrac{1}{x}\right)$

说明　函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即 $f(x)=f(t)=f(u)$，简称函数表示法的“无关性”. 求函数表达式通常采用两种方法. 一种方法是将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式，然后利用函数表示法的“无关性”，得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换，再利用“无关性”，通过解联立方程（组）得出函数的表达式，这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

练习　(1) 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$，求 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

(2) 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$.

题型三　求反函数

例 6　求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$　(2) $f(x)=\begin{cases} x/2, & -2<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2 \\ 2^x, & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$