上海市教育委员会重点课程建设项目

概率论与数理统计

叶慈南　刘锡平　主编

GAILULUNYUSHULITONGJI

科学出版社
www.sciencep.com

上海市教育委员会重点课程建设项目

概率论与数理统计

叶慈南　刘锡平　主编

曹伟丽　范洪福　樊亚莉　副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

全书共有 9 章，分别介绍了随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析及方差分析. 每章最后都有一节介绍综合例题. 每节都有相当数量的习题，每章末附有复习题，书末附有部分习题答案.

本书可作为高等院校工科、理科(非数学专业)以及其他各相关专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为工程技术人员等实际工作者的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/ 叶慈南，刘锡平主编. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023914-3

I. 概… II. ① 叶… ② 刘… III. ① 概率论—高等学校—教材 ② 数理统计—高等学校—教材 IV. 021

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第003450号

责任编辑：谭宏宇 房 阳 / 责任校对：赵桂芬

责任印制：刘 学 / 封面设计：一 明

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http:// www.sciencep.com

上海宝山杨中印刷厂印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年 1 月第一次印刷 印张：20 ¼

印数：1—5 200 字数：391 000

定价：31.00元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的一门学科，是最活跃的数学学科之一. 因为随机性的影响无处不在，所以概率论与数理统计的应用十分广泛，不仅在自然科学、工程技术、工农业生产等领域有着广泛的应用，在经济、医学、金融、保险等领域也有着越来越广泛的应用. 正因如此，“概率论与数理统计”也成为各专业大学生最重要的数学必修课之一.

本书是我们在上海理工大学多年教授“概率论与数理统计”课程教学实践基础上编写而成的. 学习本书内容只需微积分学和线性代数的相关知识. 本书共 9 章，包括两部分内容. 前 5 章是概率论部分，后 4 章是数理统计部分. 在撰写本书过程中，为了便于读者理解和掌握，我们力求将概念叙述得清晰易懂. 本书还注意了举例的多样性，所举例子涉及工业、农业、工程技术、保险、医学、经济等多个领域，以使读者在理解基本概念、掌握基本方法的同时，体会到概率统计应用的广泛性. 本书在每节末都附有习题，每章末附有复习题，全书末附有部分习题答案.

本书可作为高等院校工科和理科（非数学专业）各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为其他专业该课程的教材；工程技术人员、自然科学工作者和社会科学工作者可将其作为自学用书.

我们在编写本书的过程中作了一些尝试：除第 9 章外，每章的最后编写了一节“综合例题”. 在“综合例题”一节中，我们选编了一些稍难的、综合运用概率统计知识的例子或教材正文内容的一些补充例子，供使用本教材的教师在授课时选用，也供学有余力的学生课外阅读. 编写本书过程中的这些尝试是为教学过程中的“分层次教学”作准备的. 对于每周 3 学时的课程，讲授本书时可略去带*的内容以及“综合例题”内容；对于每周 4 学时的课程，可讲完全书的内容；对于开展“分层次教学”的每周 3 学时学习本课程的基础较好的班级，可选用“综合例题”中的一些例子和带*部分的若干内容.

本书的编写作如下分工：第 1、2 章由刘锡平编写；第 3、5 章和 4.6~4.8 节由范洪福编写；4.1~4.5 节和 4.8 节由樊亚莉编写；第 6、8 章和 9.1~9.3 节由叶慈南编写；第 7 章和 9.4 节由曹伟丽编写. 全书由叶慈南统稿. 在本书初稿完成之后，资深统计学家、华东师范大学统计系茆诗松教授仔细审阅了全部书稿，提出了许多宝贵的修改意见，为提高本书的质量起了很大的作用.

本书的编写工作得到上海市教育委员会重点课程建设项目和教育部高等教育司教学改革项目的资助. 在编写过程中, 上海理工大学工程数学教研室许多教师提出了建设性的意见和建议, 上海理工大学理学院和教务部门给予了大力帮助. 本书的出版得到了科学出版社的大力支持. 在此一并致以深深的谢意.

由于我们水平有限, 书中不当以及疏漏之处在所难免, 恳请广大读者和同行批评指正.

编　者

2008 年 10 月 1 日

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象数量规律性的学科，它是一个重要的数学分支. 概率论产生于17世纪，当时人们为了研究在赌博中的赔率问题而产生了一些简单的概率模型. 后来由于在社会活动、生产实践中不断提出的一些新的随机问题，如测量误差、航海风险、人生寿命等，人们开始对一些简单的随机模型进行系统研究. 20世纪30年代，随着数学理论的不断完善、科学技术的发展、一些新兴学科的出现，概率论在理论上和应用上都得到了迅速发展. 现在，不仅在自然科学、工程技术、工农业生产等领域有着广泛的应用，在经济、金融、保险、医学等领域也扮演着越来越重要的角色.

本章介绍概率论的基本概念及运算，是学习以后各章内容的重要基础.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象

如果细心观察，我们不难发现，在自然界和人类社会活动中存在着两类不同的现象. 有一类现象，在确定的条件下只有一种结果出现，称为**确定性现象**. 例如，在一个标准大气压下，纯水加热到100℃一定会沸腾；真空中带同号电荷的粒子必然相互排斥；在平面直角坐标系中，抛物线 $y=1-x^2$ 和 $y=-1+x^2$ 所围成的平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 等. 对于这类现象，无论重复多少次，只要前提条件相同，都会出现同一个结果.

还有一类现象，它们在一定条件下进行试验，可能出现的结果不止一个. 例如，上抛一枚质地均匀的硬币，它落地后可能正面朝上，也可能是反面朝上，但是在抛掷前无法确定；新战士进行射击训练，如果要求其直到击中目标才能停止射击，那么他射击的次数可能为 1，2，…，但在开始前是无法确定他今天到底要射击多少次；测量刚刚从商场里买回的灯泡的使用寿命，可能长一些也可能短一些，结果可能是集合 $\Omega=\{t|\ t\geqslant 0\}$ 中的任何一个数值；一次感冒治愈所需要的时间可能为集合 $\Omega=\{t|\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 中的某个数值(其中 T 为感冒的最长发病时间)等. 在相同条件下进行试验可能出现不同结果的现象称为**随机现象**.

1.1.2 样本空间与随机事件

一般地, 我们是通过试验来研究随机现象的, 这里所指的试验包括各种各样的科学实验, 也包括对随机现象某种特征的观察、分析. 具有以下两个特征的试验称为**随机试验**, 简称**试验**:

(1) 可重复性 可以在相同条件下重复进行;

(2) 不确定性 试验的可能结果不止一个, 试验前可以知道试验的所有可能结果, 但每次试验具体出现哪种结果, 事先无法确定.

随机试验常用 E 表示, 随机试验随处可见. 例如,

试验 E_1: 上抛一枚质地均匀的硬币, 观察落地后出现"正面", 还是"反面";

试验 E_2: 掷一枚骰子, 观察出现的点数;

试验 E_3: 某市电话号码查询台在一个时间段内接到的查询电话次数;

试验 E_4: 在一批电子元件中随机地抽取一只, 检测其使用寿命.

研究随机试验各种结果出现的规律性是概率论的重要内容. 为了获得这些规律, 有时通过大量重复试验; 有时根据问题的实际情况、经验或套用一些熟知的简单模型, 通过理论推算来得到其规律性.

也有一些随机现象是不可重复的, 如重大体育比赛的胜负、流行病的爆发、火山爆发对环境造成的影响等. 概率论也研究不可重复的随机现象. 为方便起见, 在以后的讨论中所说的随机试验也包括对不可重复的随机现象的观察和分析.

根据前面的讨论知道, 随机试验可能出现的结果不止一个, 试验可能出现的所有结果组成的集合称为该试验的**样本空间**, 样本空间常用大写字母 Ω 表示. 如前面提到的试验 E_1, E_2, E_3, E_4 的样本空间可分别写为 Ω_1={正面、反面}, $\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Omega_3=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$. 样本空间的每一个元素称为一个**样本点**.

从前面的例子不难看出, 样本空间可能是有限集, 如 Ω_1 中只有"正面"、"反面"两个样本点; Ω_2 中只有 6 个样本点. 而有些样本空间是无限集, 其中包含无限多个样本点, 如 Ω_3 中的样本点是所有非负整数; Ω_4 中的样本点是所有非负实数.

在对某些问题的研究中, 有时我们关心的不仅仅是某一个样本点出现的情况, 而且常常需要研究在试验中满足一定条件的那些样本点出现的机会有多大. 如在试验 E_2 中是否出现偶数$\{2, 4, 6\}$, 在检测电子元件的试验中, 若假设其寿命不小于 5000 小时为合格, 那么在试验 E_4 中我们所关心的是在$\{t \mid t\geqslant 5000\}$中的那些结果是否出现, 这些都是样本空间的子集. 我们把样本空间的某些样本点组成的集合称为**随机事件**, 简称**事件**, 常用大写字母 A、B、C、$\cdots$ 表示. 如在试验 E_2 中事件

“出现偶数”，表示为 $A_1=\{2, 4, 6\}$，事件“小于 4 点”可表示为 $B_1=\{1, 2, 3\}$. 在试验 E_4 中，事件 A_2 为“元件合格”，则 $A_2=\{t|\ t\geqslant 5000\}$，“元件不合格”可表示为 $B_2=\{t|\ t<5000\}$.

在一次试验中，说事件 A 发生了，当且仅当试验的结果恰是 A 中的一个样本点出现. 值得注意的是，在学习过程中，要注意培养将“用语言叙述的事件”与“用数学的集合符号表示的事件”进行“互译”的能力.

特殊地，将仅有一个样本点的事件，称为**基本事件**. 在一定条件下必然发生的事件称为**必然事件**，如“从一批产品中随机抽取 10 件，不合格品数不超过 10 件”. 在一定条件下必然不会发生的事件称为**不可能事件**，如“从一批产品中随机抽取 10 件，不合格品数超过 10 件”. 显然，必然事件是样本空间 Ω 本身. 而不可能事件是 Ω 的空子集，用 $\varnothing$ 表示，在每次试验中，它都不可能发生.

例 1.1.1 试写出下列随机试验的样本空间：

(1) 将一枚硬币连续抛掷 3 次，观察其正反面出现的情况；

(2) 某电话交换机在一个时间段内接到的电话呼叫次数；

(3) 某种电子元件的使用寿命.

解 (1) 将抛掷硬币出现正面记为 H，出现反面记为 T，如连续抛掷三次依次为正、正、反，则用 HHT 表示，于是 $\Omega_1=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$.

(2) 电话交换机在一个时间段内接到的电话呼叫次数可能为 0，即该时间段内没有来电，也可能有 n 次，n 为自然数. 故样本空间 $\Omega_2=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

(3) 电子元件的使用寿命可能长一些，也可能短一些，但不会出现小于 0 的情况，因此样本空间 $\Omega_3=\{t\mid t\geqslant 0\}=[0,+\infty)$.

1.1.3 事件间的关系与运算

通过前面的讨论可以知道，事件是样本空间的子集. 一个随机试验可能出现的各种结果，对应各式各样的事件，这些事件之间存在着各种关系，它们的关系与运算同集合论中所讨论的集合关系与运算完全类似. 在讨论事件之间的关系与运算时，仍用集合的符号和概念表示，但是值得注意的是要理解它们在概率论中“事件”的意义. 并且可借助文氏(Venn)图来研究这些关系与运算，这样可使问题变得直观起来.

在以下的讨论中，总假设 A, B, C 为同一个样本空间 Ω 的事件.

1. 事件的包含关系

若事件 A 中的所有样本点都是事件 B 中的样本点，则称事件 A 包含于 B，或称事件 B 包含 A，记作 $A\subset B$，即如果事件 $A\subset B$，则意味着 A 发生必然导致 B 发生，

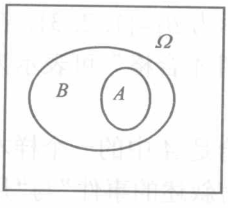

图 1.1.1　$A\subset B$

如图 1.1.1 所示.

例 1.1.2　在前面所讨论的试验 E_4 中，设事件 A 为"元件寿命不小于 2000 小时"，事件 B 为"元件寿命大于1000 小时"，即 $A=\{t|\ t\geqslant 2000\}$, $B=\{t|\ t>1000\}$，则有 $A\subset B$.

2. 事件相等

若事件 A 中的所有样本点都是事件 B 中的样本点，同时事件 B 中的所有样本点也都是事件 A 中的样本点，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，即如果事件 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则 $A=B$.

3. 事件的和

设 A 与 B 都是随机事件，则"事件 A 与 B 至少有一个发生"也是一个随机事件，称为事件 A 与 B 的和(或并)，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega\mid \omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，如图 1.1.2 所示.

例 1.1.3　考虑前面所讨论的试验 E_2：掷一枚骰子，观察出现的点数.

设事件 A="出现偶数点"，B="出现的点数大于 4"，则 $A\cup B$="出现点数为偶数或大于 4"，即 $A\cup B=\{2, 4, 5, 6\}$.

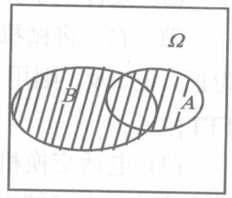

图 1.1.2　$A\cup B$

类似地，事件和的概念可推广到 n 个事件的场合：$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生"；甚至可推广到可列个事件的场合：$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示"事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生".

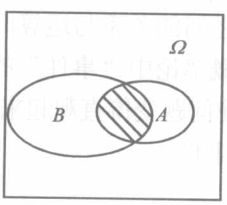

图 1.1.3　AB

4. 事件的积

设 A 与 B 都是随机事件，则"事件 A 与 B 同时发生"也是一个随机事件，称为事件 A 与 B 的积(或交)，记作 AB(或 $A\cap B$)，即 $AB=\{\omega\mid \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，如图 1.1.3 所示.

例 1.1.4　考虑例 1.1.3 中的事件 A="出现偶数点"，B="出现的点数大于 4"，则 AB="出现点数为偶数且大于 4"，其中只含有一个样本点，即 AB="出现点数

为 6”，它是一个基本事件.

类似地，事件积的概念可推广到 n 个事件的场合：$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”，甚至可推广到可列个事件的场合：$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示“事件 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生”.

5. 互不相容事件

如果事件 A 与 B 没有公共的样本点，则称 A 与 B 为互不相容事件，即 A 与 B 为互不相容事件的充分必要条件是 $AB=\varnothing$，如图 1.1.4 所示.

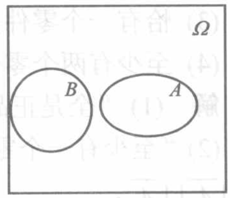

图 1.1.4　A 与 B 互不相容

例 1.1.5　考虑前面所讨论的试验 E_3：某市电话号码查询台在一个时间段内接到的查询电话次数. 设事件 A=“查询次数是 100 的倍数”，B=“出现的点数不超过 30 次”，则 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 互不相容.

6. 事件的差

设 A 与 B 都是随机事件，则“事件 A 发生，但 B 不发生”也是一个随机事件，称该事件为事件 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，即 $A-B=\{\omega|\omega\in A \text{ 但 } \omega\notin B\}$，如图 1.1.5 所示.

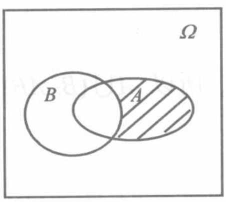

图 1.1.5　$A-B$

7. 事件的逆

设 A 是随机事件，则“事件 A 不发生”也是一个随机事件，称该事件为 A 的逆事件(或对立事件)，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\{\omega|\omega\notin A\}$，如图 1.1.6 所示.

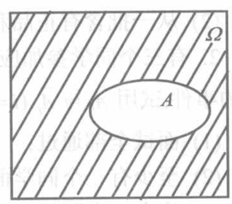

图 1.1.6　$\overline{A}$

对于 A 的逆事件 $\overline{A}$ 有 $A\cup\overline{A}=\Omega$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$.

引进了逆事件的记号以后，事件 A 与 B 的差事件也可表示为

$$A-B=A\overline{B}. \tag{1.1.1}$$

与在集合论中完全类似，事件运算有以下运算律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$ ；

(4) 德·摩根(De Morgan)律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.6 一个工人生产了三个零件，事件 A_i 表示“他生产的第 i 个零件为正品”$(i=1, 2, 3)$.试写出以下事件：

(1) 全是正品；

(2) 至少有一个零件是次品；

(3) 恰有一个零件是次品；

(4) 至少有两个零件是次品.

解 (1)“全是正品”，即 A_1, A_2, A_3 同时发生，表示为 $A_1A_2A_3$；

(2)“至少有一个零件是次品”，即 A_1, A_2, A_3 没有同时发生，表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$ 或 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；

(3) “恰有一个零件是次品”表示为 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup \overline{A_1}A_2A_3$；

(4) “至少有两个零件是次品”表示为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}$.

例 1.1.7 化简下列各式：

(1) $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$;

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$.

解 (1) 因为 $A\cup(B-AB)=A\cup B$, $A\cup(C-AC)=A\cup C$, 所以 $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$.

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A\cup(B\overline{B})=A$.

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 从一批含有正品和次品的元件中任选一个，观察选到的元件是正品还是次品；

(2) 从一批含有正品和次品的元件中任选三个，观察选到的元件中正品的件数.

2. 有三个同学参加应聘面试，以 A_i 与 $\overline{A_i}$ $(i=1,2,3)$ 分别表示第 i 个同学面试“通过”、“不通过”的事件.试用 A_i 与 $\overline{A_i}$ $(i=1,2,3)$ 表示以下事件：

(1) 面试全部通过；

(2) 至少有一个同学面试通过；

(3) 恰有一个同学面试通过；

(4) 至少有两个同学面试没有通过.

3. 设 A,B,C 为三个随机事件，试将下列事件用 A, B, C 表示出来：

(1) A 发生，B, C 不发生；

(2) C 发生，A, B 不发生；

(3) 三个随机事件都发生；

(4) 三个随机事件至少有一个发生；