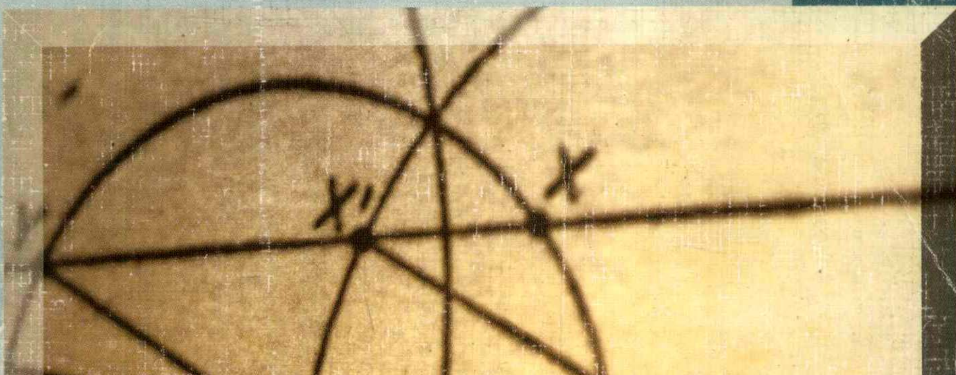
高等数学

上册

主编　胡聪娥　宋晓新



河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/胡聪娥主编. —开封:河南大学出版社,2004.6

高等院校教材

ISBN 7-81091-170-8

Ⅰ.高… Ⅱ.胡… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 023829 号

书　　名 高等数学(上册)

主　　编 胡聪娥　宋晓新

出 版 人 王刘纯

责任编辑 王　慧

责任校对 雪　丰

责任印制 苗　卉

封面设计 张　伟

出　版 河南大学出版社

地址:河南省开封市明伦街 85 号　　邮编:475001

电话:0378-2864669(行管部)　0378-2825001(营销部)

网址:www. hupress. com　E-mail:bangong@hupress. com

经　销 河南省新华书店

排　版 河南大学出版社印务公司

印　刷 河南第一新华印刷厂

版　次 2004 年 4 月第 1 版　　**印　次** 2004 年 4 月第 1 次印刷

开　本 787mm×960mm　1/16　　**印　张** 19.25

字　数 356 千字　　**印　数** 1-3000 册

ISBN 7-81091-170-8/O·135　　**定　价**:(全二册)40.00 元　(上册)20.00 元

前　　言

高等数学是以极限论为基础，以微积分为主要工具，以微分方程为联系实际的桥梁，并利用坐标、向量、张量和算子等工具，研究变量间数量关系与空间形式的科学。

新世纪对人才培养提出了更新更高的要求，为了经济的可持续发展，为了我们的诺贝尔奖，高等教育改革势在必行。而高等数学是高等院校众多专业必修的重要基础理论课，高等数学教学质量的好坏直接影响到后继课程的学习及人才素质的提高。我们在总结多年教学经验的基础上，曾于 1994 年 7 月由河南大学出版社出版了《高等数学》教材，经过反复实践、探索、推敲，为适应经济迅猛发展和高新技术对数学的要求，我们又重新编写了这套高等数学教材。本书是根据工、化、生、地类高等数学教学大纲编写，参照 1992 年 5 月全国工科数学教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，超出基本要求的内容标有“*”号，同时参照物理专业高等数学教学大纲增加了场论一章，也加有“*”号，作为选学内容。编写时精选经典核心内容，兼并压缩或取消一些陈旧和重复的内容，并适当引用一些现代数学符号，渗透了一些现代数学的观点、思想、方法和技巧。

本书总结了河南大学及部分兄弟院校在高等数学教学上多年的教学经验，论述简明、深入浅出、循序渐进，力求做到通俗易懂、结构严谨、重点突出、逻辑清晰。

本书突出了极限观点与元素法，增加了实际应用的例题和习题，并加强了在解题技巧、解题思路、解题方法方面的论述，用一题多解等方法启迪读者的思维，提高解题能力。同时又精选了近几年的考研真题作为例题和习题。每一章末有总习题，其中标有“◇”符号的为近几年的考研题，有助于培养学生综合分析问题的能力，开拓学生的知识视野，使学生学有目标，为考研和应用奠定基础。

本书分为上、下两册。上册包括函数与极限、一元函数微分学及其应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何。下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、场论、级数和微分方程。书末附有习题答案。

参加本书编写的有宋晓新（第一章、第二章）、裴明（第三章）、胡聪娥（第四章）、职占江、胡聪娥（第五章）、汤平（第六章）、张建国（第七章）、李水灿（第八章）、刘华珂（第九章）、刘鸣放（第十章）、杜春雨（第十一章、第十二章）、王景周

（第十三章）。

全书由胡聪娥统稿，上册由胡聪娥通审定稿，下册由杜春雨、张建国通审定稿。本书在编写过程中，得到侯玉华、李起升、李登峰教授，王天泽特聘教授以及出版社王慧编辑的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于水平有限，难免有不妥之处，敬请读者提出宝贵意见。

编　者

2003 年 12 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一，它是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，也是高等数学的主要研究对象．而极限方法是研究变量的一种基本方法，它贯穿在高等数学教学的全过程中．本章主要研究函数的极限与函数的连续性．

第一节　集　　合

集合是我们在中学熟悉的概念，现在我们着重介绍在高等数学中常用的数集．

一、区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$，数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的闭区间，记为 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$．类似地记

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

称为以 a,b 为端点的开区间，这里 $a\overline{\in}(a,b)$，$b\overline{\in}(a,b)$．

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 称为半开区间．

以上区间统称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间的长度．

此外还有无穷区间．引进记号 $\pm\infty$（分别读作正、负无穷大），类似地定义无穷区间

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

数集 $\mathbf{R}$ 亦可记为 $(-\infty,+\infty)$．

注　今后，在不需详述的情形下，所有区间一律简称区间，常用 I 表示．

二、邻域

研究中常要考虑一点邻近的情况，故引入邻域概念．

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

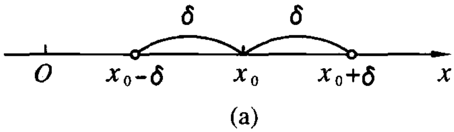
点 x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域半径．因为

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

所以 $U(x_0,\delta)$ 就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$（图 1-1(a)）.

有时需要把邻域的中心去掉，即点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$（图 1-1(b)），即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$



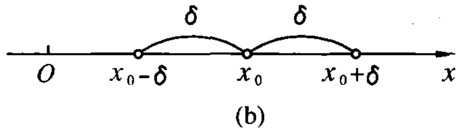


图 1-1

注 当我们不强调邻域的半径时，常将邻域和去心邻域分别记为 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$.

三、常用的集合表示

全体整数的集合记作 **Z**，全体正整数的集合记作 **N**，全体有理数的集合记作 **Q**，全体实数的集合记作 **R**.

四、常用的数学符号

“$\forall$”表示“对每一个”或“对任一个”；“$\exists$”表示“存在”；“$A\Rightarrow B$”表示“命题 A 成立，则命题 B 成立”；“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 等价于 B”或“A 是 B 的充分必要条件”；“max”表示“最大”，“min”表示“最小”.

习 题 1—1

1. 用区间表示 x 的变化范围：

(1) $|x-1|<3$；　　(2) $x^2\leqslant 9$；

(3) $x\geqslant 5$；　　(4) $x-1<3$；

(5) $|x+1|>2$；　　(6) $x\in\mathring{U}\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. 用邻域表示绝对值不等式中 x 所在区间，并指出邻域的中心、半径：

(1) $|x|<\dfrac{1}{3}$；　　(2) $|x-3|<1$；

(3) $0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$.

第二节 函　　数

在自然界及社会实践中，我们常遇到各种不同的量，如长度、面积、重量、温

度、距离、压强等. 在某一过程中保持不变的量称为常量，常用 a,b,c 等表示；在变化过程中可取不同数值的量称为变量，常用 x,y,z,u,v 等表示. 如受热金属球的体积 V 和直径 d 均为变量，而圆周率 $\pi=3.14159\cdots$ 为常量.

一、函数概念

在同一过程中往往同时有几个变量，它们互相联系，互相制约，而且按照一定规律变化着. 本章先研究两个变量的相依关系，后面第八章再研究多个变量之间的关系.

我们先看几个实例：

例 1 半径为 R 的球的体积

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

对任一 $R\in(0,+\infty)$，由上述关系可确定体积 V 的对应值.

例 2 自由落体运动

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

设物体开始下落的时刻为 $t=0$，着地的时刻为 $t=T$，则对任一 $t\in[0,T]$，由上述关系即可确定下落距离 s 的相应数值.

例 3 水的沸点 T 随气压 P 变化如下表

气压 P(mm)	300	350	400	450	500	585	600	650	700
沸点 T(℃)	75.8	79.6	83.0	85.8	88.5	91.2	93.5	95.7	97.6

由上表可见，水的沸点随气压升高而升高，它反映了水的沸点 T 对气压 P 的依赖关系. 当气压在表中给的范围内取定某个值时，水的沸点 T 由表可查出对应值.

类似的例子很多，虽然它们的实际意义不同，但都反映了两个变量之间的相依关系. 并且当其中一个变量在其变化范围内取定一个数值时，根据规律或法则，另一个变量有确定的数值与之对应. 由变量之间的这种依赖关系，我们抽象出函数的定义.

定义 **设 x,y 为两个变量，D 为非空集合. 如果对任一 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. D 称为该函数的定义域(有时记为 D_f)，x 称为自变量，y 称为因变量.**

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记为 $y=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}=y_0$. 当 x 取遍 D 中所有的数值时，对应的函数值的集合

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

特别地,对一些函数 $y=f(x)$,当自变量 x 取不同值时,因变量 y 也可以取相同值.例如,函数

$$f(x)=C \quad (C\text{ 为常数}),$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{C\}$,称为常数函数.

注 同时观察几个不同函数时,不能用同一字母表示,可用 $y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=g(x)$等表示.为方便起见,有时也可以用 $y=y(x)$表示.

函数的定义域是能够使函数有定义的自变量 x 的集合.在实际问题中,函数的定义域是根据所考虑问题的实际意义确定的.如例 1 中 $D=(0,+\infty)$,例 2 中 $D=[0,T]$.

如果对于任一 $x\in D$,对应的函数值是惟一的,称这种函数为单值函数,否则为多值函数.

例如 $y=x^3$,$y=\sin x$ 等为单值函数.又例如由方程 $x^2+y^2=R^2$ 所确定的函数 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$就是多值函数,$x\in[-R,R]$.

注 凡是没有特别说明,我们所讨论的函数均指单值函数.对于多值函数,则分为几个单值分支来讨论.例如 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$,$x\in[-R,R]$,分为两个单值分支 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$.

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$.在平面直角坐标系中,让自变量 x 沿横轴变化,因变量 y 沿纵轴变化,则平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$的图形或图像.(如图 1-2)

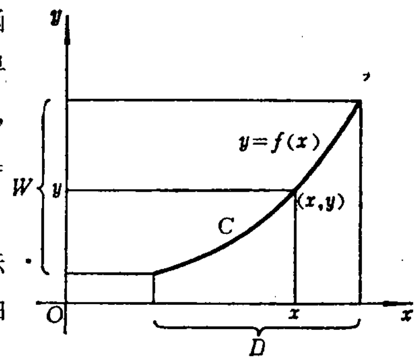


图 1-2

例 4 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,图形如图 1-3.

例 5 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数.定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-4.

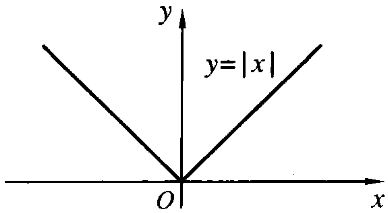


图 1-3

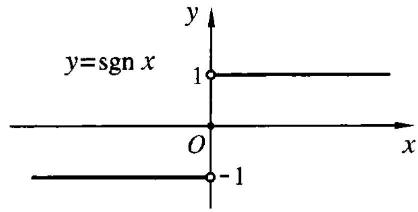


图 1-4

例 6 高斯(Gauss)函数 $y=[x]$表示不超过 x 的最大整数部分. 例如$[3.5]=3$,$[-3.51]=-4$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-\pi]=-4$,$[-11]=-11$ 等. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\mathbf{Z}$,图形如图 1-5,又称为阶梯曲线.

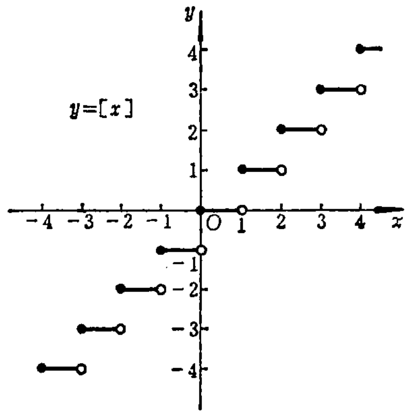


图 1-5

例 7 狄里赫莱(Dirichlet)函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{0,1\}$.

在定义域的不同子集上对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数,如例 4、例 5、例 7.

注 例 7 的图形无法画出! 请思考! 为什么?

德国数学家狄里赫莱对函数作了广义的论述:两个变量之间,只要有数值上的确定法则对应关系,不管是否可用同一个数学公式来表示对应关系,也不管是否能做出图像来,均可认为是函数关系.

例 8 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,求 $f(1)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(1+h)$.

解
$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{5},$$

$$f(1+h)=\frac{1}{(1+h)^2+1}=\frac{1}{h^2+2h+2}.$$

例 9 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 2x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(2)$.

解 $f(-2)=1+(-2)=-1$,$f(0)=1+0=1$,$f(2)=2\times 2=4$.

二、函数的基本性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少). 如果等号不成立,则称 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加(或严格单调减少). 单调增加和单调减少函数统称为单调函数,I 称为单调区间.(如图 1-6)

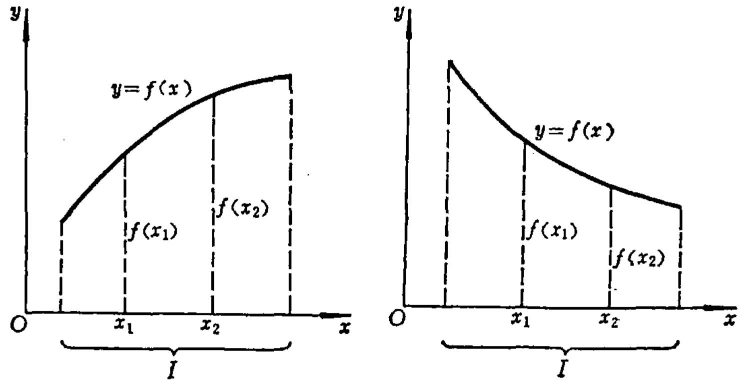


图 1-6

例如,函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的. 函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的;函数 $y=x^2$ 在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

注 并非所有函数都有单调区间. 如:例 7 就没有单调区间,也就是说,狄里赫莱函数不是单调函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,如果 $\exists$ 常数 $K>0$,使 $\forall x \in X$,恒有

$$|f(x)| \leqslant K,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界,或称 $f(x)$ 在 X 上为有界函数;若 $\exists$ 常数 K_1,使 $\forall x \in X$,恒有

$$f(x) \leqslant K_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界;若 $\exists$ 常数 K_2,使 $\forall x \in X$,恒有

$$f(x) \geqslant K_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

在 X 上有下界的函数 $f(x)$ 的最大下界 m 称为 $f(x)$ 在 X 上的下确界,记为

$$m=\inf f(x) \qquad (x \in X);$$

在 X 上有上界的函数 $f(x)$ 的最小上界 M 称为 $f(x)$ 在 X 上的上确界,记为

$$M=\sup f(x) \qquad (x\in X).$$

显然，$f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界.

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有上界$+1$，有下界-1，故 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

又如，$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无上界，有下界 1，故$\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界. 但 $y=\frac{1}{x}$在$(1,2)$内有界，如

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1, \quad x\in(1,2).$$

再如，$y=\frac{1}{x}$在$[1,2]$上有上确界

$$M=\sup\frac{1}{x}=1, \quad x\in[1,2],$$

也有下确界

$$m=\inf\frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \qquad x\in[1,2].$$

注 有上确界者必有上界，有下确界者必有下界，但反之不然！

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$在对称区间 $I=(-a,a)(a>0)$内有定义. 若对 $\forall x\in I$，恒有

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$在 I 上是奇(或偶)函数.

奇函数的图形关于原点成中心对称，偶函数的图形关于 y 轴成轴对称.（如图 1-7）

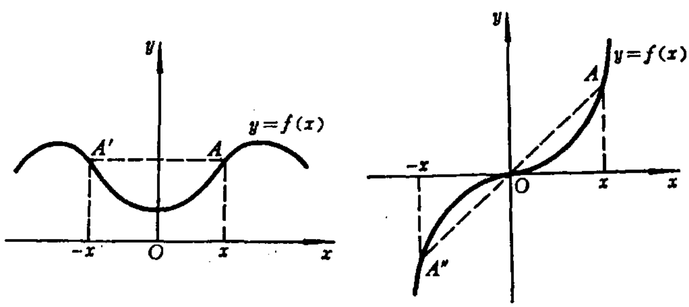


图 1-7

例如，$y=x$，$y=x^3$，$y=x^5$ 为奇函数，$y=x^2$，$y=x^4$ 为偶函数. 一般地，当 n 为奇数时，即 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}$，$y=x^n$ 为奇函数；当 n 为偶数时，即 $n=2k,k\in\mathbf{N}$，$y=x^n$ 为偶函数.

此外常见奇函数有 $\sin x,\tan x,\cot x$；常见偶函数有 $\cos x,\sec x,|x|$，常数 C 等.

注 有的函数既非奇函数又非偶函数，例如 $y=a^x$，$y=\log_a x$，$y=\sin x+\cos x$，$y=x+1$ 等.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $\exists\, T>0$，使 $\forall\, x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期.

显然，若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in \mathbf{Z})$ 也是 $f(x)$ 的周期.

约定 周期约定为使函数值重复出现的自变量增减的最小正值.

例如，$\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期 $T=2\pi$，$\tan x,\cot x$ 的周期 $T=\pi$.

注 最小正周期不一定存在.

例如，狄里赫莱函数 $y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

任何正有理数都是它的周期，是一个周期函数. 因为不存在最小正有理数，所以它没有最小正周期.

三、反函数

研究变量的相依关系时，可以根据需要选其中一个为自变量，另一个为因变量. 如：自由落体运动中，下降距离 h 是时间 t 的函数，

$$h=h(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 t 为自变量，h 为因变量. 反之，下降时间 t 也是下落距离 h 的函数，

$$t=\varphi(h)=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

这里，h 为自变量，t 为因变量. $t=\varphi(h)$ 称为 $h=h(t)$ 的反函数，而 $h=h(t)$ 叫直接函数. 于是我们引入反函数的定义.

定义 设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，值域为 W. 如果对于 $\forall\, y\in W$，总有惟一确定并满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则 x 是 y 的函数，y 是自变量，x 是因变量，该函数称为原函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y) \quad \text{或} \quad x=\varphi(y).$$

原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数，它与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

反函数与直接函数的定义域与值域正好互换，即反函数 $x=f^{-1}(y)$ 定义域为 W，值域为 D.

注 单调函数必有反函数. 尽管 $y=f(x)$ 是单值函数，但反函数 $x=f^{-1}(y)$

不一定是单值函数. 如 $y=x^2$ 是单值函数,其定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $W=[0,+\infty)$, $\forall y\in W$ 对应值有两个 $x=\pm\sqrt{y}$,故 $y=x^2$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$是多值函数. 但在 $D_1=[0,+\infty)$上 $y=x^2$ 的反函数 $x=\sqrt{y}$是单值的,同样,在 $D_2=(-\infty,0]$上 $y=x^2$ 的反函数 $x=-\sqrt{y}$也是单值的.

一个函数如有反函数,则 x 与 y 必一一对应,即单值单调函数,否则不存在反函数. 但可适当限制自变量变化范围,使其一一对应再研究其反函数. $y=x^2$ 就是这样.

注 习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,故 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$也可写成 $y=f^{-1}(x)$,称为 $y=f(x)$的矫形反函数,而 $x=f^{-1}(y)$叫做本义反函数.

约定 以后说的反函数通常指矫形反函数,简称反函数.

一个函数 $y=f(x)$与它的本义反函数 $x=f^{-1}(y)$的图形在同一坐标系下理应为同一曲线,而与它的矫形反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形在同一坐标系下关于直线 $y=x$ 对称.(如图 1-8)

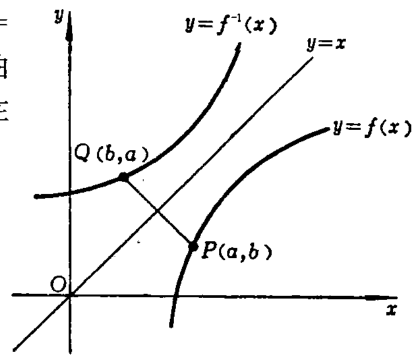


图 1-8

例 10 求 $y=3x+1$ 的反函数.

解 由 $y=3x+1$,得

$$x=\frac{y-1}{3},$$

所求反函数为 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$.

习 题 1—2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}$;　　(2) $y=\cos\sqrt{x^2-1}$;

(3) $y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$;　　(4) $y=\ln\ln x$;

(5) $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$;　　(6) $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1;\end{cases}$

(7) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

2. 求下列函数的函数值:

(1) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(0),f(a),f(a+b)$;