宁夏大学"十一五"教材建设丛书
陈育宁 主编

结构力学（Ⅱ）

张长领 主编

宁夏人民出版社
NINGXIA PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

结构力学（Ⅱ）

张长领　主编

宁夏人民出版社
NINGXIA PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

结构力学. (Ⅱ) / 张长领主编. —银川:宁夏人民出版社,
2005.9

ISBN 7-227-03013-X

Ⅰ.结… Ⅱ.张… Ⅲ.结构力学 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 100081 号

结构力学(Ⅱ) 张长领 主编

责任编辑 那大庆 杨文琴
封面设计 张 宁
出版发行 宁夏人民出版社
地 址 银川市北京东路 139 号出版大厦
经 销 新华书店
印 刷 宁夏捷诚彩色印务有限公司
开 本 880×1230mm 1/32
印 张 8
字 数 200 千
版 次 2005 年 8 月第 1 版
印 次 2005 年 8 月第 1 次印刷
印 数 1150 册
书 号 ISBN 7-227-03013-X/S·162
定 价 18.00 元

宁夏人民出版社
NINGXIA PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

责任编辑 那大庆 杨文琴
封面设计 张 宁

序

陈育宁

教材建设是高等学校教学基本建设的重要组成部分，选用和编写高质量的教材，是高校不断提高教学水平、保障教学质量的基础。

为了落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和宁夏大学“十一五”教学工作规划及教材建设的主要任务，更新课程体系，提高教学质量，以适应现代化建设和市场经济的需要，适应培养面向21世纪新型高素质人才的需要，启动宁夏大学“十一五”教材建设工程，编写、出版“宁夏大学‘十一五’教材建设”丛书，是必要和及时的。

这套丛书的编写和出版，必须坚持为我校的教育教学工作服务，要根据我校专业建设、课程建设、生源状况、教学水平及师资力量等实际情况，充分发挥我校学科优势和专业特长，努力使教材建设不断深化，整体水平不断提高；要逐步建立以国家规划教材的使用为重点，特色鲜明的自编教材为补充的学校教材建设与管理体制；要不断扩大教材种类，提高教材质量，探索教材建设与供应新途径，建立

教材编写与选用新机制，开拓教材使用与管理新局面。

近年来，我校的教育教学工作随着学校规模的不断扩大和办学实力的增强，有了新的发展和提高。2005年，教育部与宁夏回族自治区政府签署协议，共建宁夏大学，为我校加快发展提供了新的机遇。实现学校的发展目标，培养高素质的建设人才，主动服务于国家和地方经济社会发展，是我校面临的重要战略任务。而高层次、高质量的人才培养，必须要求有高水平、高质量的教材建设。为此，本科教育的学科、专业及课程设置，都要作相应的调整。"宁夏大学'十一五'教材建设"丛书的编写和出版，要适应这一调整，紧紧把握中国高等教育改革与发展的脉搏，与时俱进，面向未来，服务社会；要结合21世纪社会、经济、科技、文化、教育发展的新特点，吸收新成果，解决新问题；要根据素质教育和学分制教学管理的需要，突出适用性和针对性；要在加强基础课、实验课教材编写与出版的同时，不断深化基础理论研究，拓宽教材知识面，努力实现整套教材科学性、系统性、开放性、前瞻性和实践性的有机结合，充分体现起点高、水平高，结构严密、体系科学，观点正确、应用性强的特点。

我们相信，在我校广大教师和科研骨干的努力下，在出版界同人的支持下，"宁夏大学'十一五'教材建设"丛书的编写出版，必将提高质量，多出精品，形成特色；必将面向市场，走向社会，服务教学，为宣传宁夏大学，树立宁夏大学学术形象，推动宁夏大学本科教学水平不断提高发挥积极作用。

2005年8月于银川

前　言

“结构力学”是土木工程专业的一门主要专业基础课，在高等工科院校土木工程专业系列教材中，由《结构力学（Ⅰ）》和《结构力学（Ⅱ）》组成。《结构力学（Ⅰ）》侧重对经典理论与方法的介绍，《结构力学（Ⅱ）》注重结构力学的计算机基础理论与方法。本书是《结构力学（Ⅰ）》第二版（孙俊 、张长领主编，重庆大学出版社）的配套教材，可供土木工程专业的研究生、本科生、专科生使用，也可作为本专业在职人员职业考试的参考书。

《结构力学（Ⅱ）》具有以下特点：努力适应学生素质教育的发展方向，同时适应在校学生和在职人员学习的要求；注意与相关课程的贯通、融合，理论联系实际，尽可能减少不必要的相互重叠；注重基本概念、基本原理、基本方法；注重吸取现行同类教材之长，又注意融入教学经验和体会；注意符合宽口径土木工程专业对本课程的基本要求。这样有助于启发式教学，有助于不同层次的读者选学，有助于培养学生的自学能力。

本书在编写过程中，参阅了有关参考文献，并引用了其中的部分习题，在本书出版之际，谨向各文献的作者及支持本书编写、出版的人们致谢。

由于编者水平所限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

目录

第一部分　结构力学(Ⅱ)

第二部分 结构力学指导与实践

第11章 矩阵位移法

内容提要　结构矩阵分析方法是以传统结构力学作为理论基础、以矩阵作为数学表述形式、以电子计算机作为计算手段的方法。与传统的力法、位移法相对应,在结构矩阵分析中也有矩阵力法和矩阵位移法,或称柔度法与刚度法。矩阵位移法易于实现计算过程程序化,故本章只对矩阵位移法进行讨论。矩阵位移法是有限元法的雏形,因此也称为杆件结构的有限元法。有限元法的要点是:先把整体拆开,分解成若干个单元,这个过程称作离散化。然后再将这些单元按一定的条件集合成整体。它包含两个基本环节:一是单元分析,二是整体分析。单元分析的任务是建立单元刚度方程,形成单元刚度矩阵;整体分析的主要任务是将单元集合成整体,由单元刚度矩阵按照刚度集成规则形成整体刚度矩阵,建立整体结构的位移法基本方程,从而求出解答。在单元分析方面,单元的刚度方程在位移法一章中已经导出,在本章中只是将已有结果表示为矩阵形式,并讨论在任意坐标系中单元刚度方程的通用形式。在整体分析方面,将根据计算过程程序化的要求,提出直接由单元刚度导出整体刚度集成规则,这个集成规则是矩阵位移法的核心内容。

11.1　单元刚度矩阵(局部坐标系)

11.1.1　一般单元

图 11－1 所示为平面刚架中的一个等截面直杆单元ⓔ。设杆件除弯曲变形外,还有轴向变形。左右两端各有三个位移分量(两个移动、一个转动),杆件共有六个杆端位移分量,这是平面结构杆件单元的一般情况。设杆长为 l,截面面积为 A,截面惯性矩为 I,弹性模量为 E。单元的两个端点采用局部编码 1 和 2。由端点 1 到端点 2 的方向规定为杆轴的正方向,在图中用箭头标明。

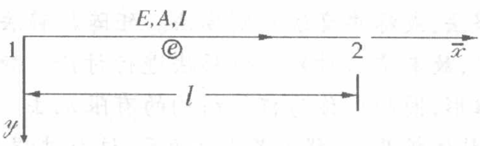

图　11－1

图中采用坐标系 $\bar{x}\bar{y}$,其中 $\bar{x}$ 轴与杆轴重合。这个坐标系称为单元坐标系或局部坐标系。字母 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 的上面都划上一横,作为局部坐标系的标志。

在局部坐标系中,一般单元的每端各有三个位移分量 $\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{\theta}$ 和对应的三个力分量 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{M}$。图 11－2 中所示的位移、力分量方向为正方向。

单元的六个杆端位移分量和六个杆端力分量按一定顺序排列,形成单元杆端位移向量 $\{\bar{\Delta}\}^{ⓔ}$ 和单元杆端力向量 $\{\bar{F}\}^{ⓔ}$ 如下:

$$\left.\begin{aligned}\{\bar{\Delta}\}^{ⓔ} &= [\bar{\Delta}_{(1)}\quad \bar{\Delta}_{(2)}\quad \bar{\Delta}_{(3)}\quad \bar{\Delta}_{(4)}\quad \bar{\Delta}_{(5)}\quad \bar{\Delta}_{(6)}]^{ⓔT}\\ &= [\bar{u}_1\quad \bar{v}_1\quad \bar{\theta}_1\quad \bar{u}_2\quad \bar{v}_2\quad \bar{\theta}_2]^{ⓔT}\\ \{\bar{F}\}^{ⓔ} &= [\bar{F}_{(1)}\quad \bar{F}_{(2)}\quad \bar{F}_{(3)}\quad \bar{F}_{(4)}\quad \bar{F}_{(5)}\quad \bar{F}_{(6)}]^{ⓔT}\\ &= [\bar{X}_1\quad \bar{Y}_1\quad \bar{M}_1\quad \bar{X}_2\quad \bar{Y}_2\quad \bar{M}_2]^{ⓔT}\end{aligned}\right\}\quad(11-1)$$

向量中的六个元素的序码记为(1)、(2)、…、(6)。由于它们是在每个单元中各自编码的,因此称为局部码——杆端位移分量(或杆端力分量)的局部码。数码(1)、(2)、…都加上括号,作为局部码的标志。

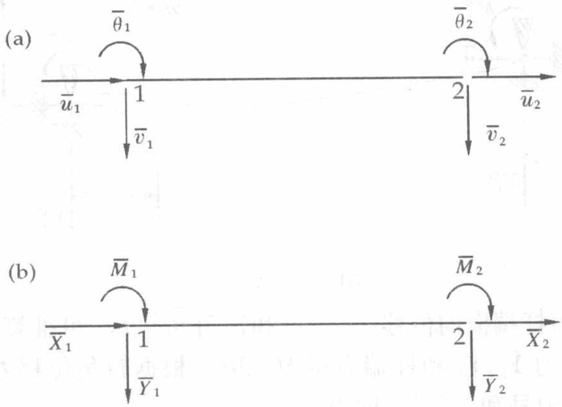

图　11－2

现在讨论单元的刚度方程。

单元刚度方程是指由单元杆端位移求单元杆端力时所建立的方程——记为“$\overline{\varDelta}\rightarrow\overline{F}$”方程。

为了建立单元刚度方程,我们按照位移法基本体系的作法,在杆件两端加上人为控制的附加约束,使基本体系在两端发生任意指定的位移$\{\overline{\varDelta}\}^{ⓔ}$,如图 11－3 所示。然后根据$\{\overline{\varDelta}\}^{ⓔ}$来推算相应的杆端力$\{\overline{F}\}^{ⓔ}$。

我们忽略轴向受力状态和弯曲受力状态之间的相互影响,分别推导轴向变形和弯曲变形的刚度方程。

首先,由杆端轴向位移 $\overline{u}_1$、$\overline{u}_2$ 可推算出相应的杆端轴向力 $\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$:

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{X}_1^{ⓔ} &= \frac{EA}{l}(\bar{u}_1^{ⓔ} - \bar{u}_2^{ⓔ}) \\
\bar{X}_2^{ⓔ} &= -\frac{EA}{l}(\bar{u}_1^{ⓔ} - \bar{u}_2^{ⓔ})
\end{aligned}\right\} \tag{11-2}
$$

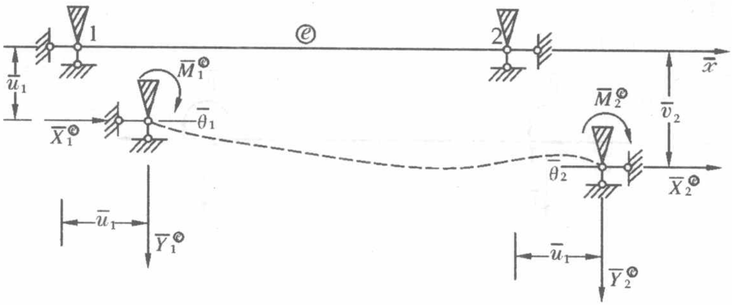

图 11-3

其次,由杆端横向位移 $\bar{v}_1^{ⓔ}$、$\bar{v}_2^{ⓔ}$ 和转角 $\bar{\theta}_1^{ⓔ}$、$\bar{\theta}_2^{ⓔ}$ 可推算出相应的杆端横向力 $\bar{Y}_1$、$\bar{Y}_2$ 和杆端力矩 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$。根据转角位移方程,并改用本章的记号和正负号,即得

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{M}_1^{ⓔ} &= \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_1^{ⓔ} + \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_2^{ⓔ} + \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_1^{ⓔ} - \bar{v}_2^{ⓔ}) \\
\bar{M}_2^{ⓔ} &= \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_1^{ⓔ} + \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_2^{ⓔ} + \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_1^{ⓔ} - \bar{v}_2^{ⓔ}) \\
\bar{Y}_1^{ⓔ} &= \frac{6EI}{l^2}(\bar{\theta}_1^{ⓔ} + \bar{\theta}_2^{ⓔ}) + \frac{12EI}{l^2}(\bar{v}_1^{ⓔ} - \bar{v}_2^{ⓔ}) \\
\bar{Y}_2^{ⓔ} &= -\frac{6EI}{l^2}(\bar{\theta}_1^{ⓔ} + \bar{\theta}_2^{ⓔ}) - \frac{12EI}{l^2}(\bar{v}_1^{ⓔ} - \bar{v}_2^{ⓔ})
\end{aligned}\right\} \tag{11-3}
$$

上面六个刚度方程(11-2)和(11-3)实际上在位移法中已经推导过。现在将它们合在一起,写成矩阵形式如下:

$$
\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}^{ⓔ}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}^{ⓔ}
\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}^{ⓔ}
\qquad (11-4)
$$

上式可记为

$$\{\bar{F}\}^{ⓔ} = [\bar{k}]^{ⓔ}\{\overline{\Delta}\}^{ⓔ} \qquad (11-5)$$

其中

$$
[\bar{k}]^{ⓔ} =
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\
(\bar{u}_1=1) & (\bar{v}_1=1) & (\bar{\theta}_1=1) & (\bar{u}_2=1) & (\bar{v}_2=1) & (\bar{\theta}_2=1)
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}^{ⓔ}
\end{array}
\qquad (11-6)
$$

式(11-5)即为所求的“$\overline{\Delta}\rightarrow\bar{F}$”方程，称为在局部坐标系中的单元

刚度方程。矩阵$[\bar{k}]^{ⓔ}$称为局部坐标系中的单元刚度矩阵。它是6×6方阵。

11.1.2　单元刚度矩阵的性质

(1)单元刚度系数的意义

$[\bar{k}]^{ⓔ}$中的每个元素称为单元刚度系数,代表由于单位杆端位移所引起的杆端力。例如,第(6)行第(3)列元素$\bar{k}^{ⓔ}_{(6)(3)}$$\left(\text{即元素}\dfrac{2EI}{l}\right)$代表当第(3)个杆端位移分量$\bar{\theta}_1=1$时引起的第(6)个杆端力分量$\bar{M}_2$。一般来说,第$(i)$行第$(j)$列元素$\bar{k}^{ⓔ}_{(i)(j)}$代表当第$(j)$个杆端位移分量$\bar{\Delta}_j$等于1(其它位移分量为零)时所引起的第$(i)$个杆端力分量$\bar{F}_i$的值。

$[\bar{k}]^{ⓔ}$中某一列的六个元素分别表示当某个杆端位移分量等于1时所引起的六个杆端力分量。例如,第1列对应于单位位移$\bar{u}_1=1$所引起的杆端力。为了帮助理解,在式(11-6)中,在$[\bar{k}]^{ⓔ}$每一列的上方都标明了对应的单位位移分量。

(2)$[\bar{k}]^{ⓔ}$是对称矩阵

$[\bar{k}]^{ⓔ}$的对称性是指其元素有如下关系

$$\bar{k}^{ⓔ}_{(i)(j)}=\bar{k}^{ⓔ}_{(j)(i)} \tag{11-7}$$

这实际上是根据反力互等定理得出的结论。

(3)一般单元的$[\bar{k}]^{ⓔ}$是奇异矩阵

$[\bar{k}]^{ⓔ}$的奇异性是指其行列式等于零,即

$$|[\bar{k}]^{ⓔ}|=0 \tag{11-8}$$

直接计算式(11-6)的矩阵行列式,便可验证上述结论。

11.1.3　特殊单元

式(11-4)是一般单元的刚度方程,其中六个杆端位移可指定为任意值。在结构中还有一些特殊单元,单元的某个或某些杆

端位移的值已知为零，而不能任意指定。各种特殊单元的刚度方程无需另行推导，只需对一般单元的刚度方程（11－4）作一些特殊处理便可自动得到。

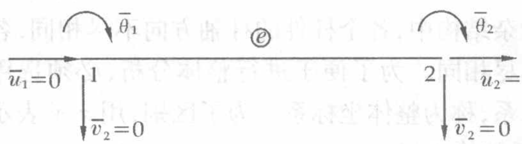

图　11－4

举例来说，计算连续梁时，我们通常忽略轴向变形。如取每跨梁作为单元（图 11－4），则只有两个杆端位移分量 $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ 可指定为任意值，而其余四个分量均已知为零：

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{u}_2 = \bar{v}_2 = 0 \tag{a}$$

将式（a）代入式（11－4），即自动得出此特殊单元的刚度方程如下

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} \tag{11－9}$$

此时单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \tag{11－10}$$

实际上这个特殊单元刚度矩阵（11－10）可由式（11－6）的一般单元刚度矩阵删去第（1）、（2）、（3）、（4）、（5）行和列后自动得出。