21世纪全国高校数学规划教材

高等数学方法

GAODENG SHUXUE FANGFA

彭勤文 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高校数学规划教材

高等数学方法

彭勤文 编 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是根据编者多年的教学实践，结合“高等数学课程教学基本要求”编写的。主要内容包括极限理论与方法、微分学及其应用、积分学及其应用、空间解析几何与向量代数、无穷级数和微分方程初步。

针对微积分学的特点，本教材以训练思想方法为目的，通过启发、引导方式对知识点进行了介绍，适当的地方添加了思考联想练习，以帮助读者了解为什么学习这些内容以及学完后有什么用处，同时，对少量精选的例题，以提出问题→搜索可能涉及的知识点→分析寻找联系的条件→尝试解决办法→修正、再分析、再尝试→达到解决问题的方式给出，而且尽可能作了概括总结，这对做练习非常有启发意义。

本书可作为高等院校工科高等数学课程教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学方法 / 彭勤文编著. —北京：北京大学出版社，2009.3
（21 世纪全国高校数学规划教材）
ISBN 978-7-301-12997-5

I. 高… II. 彭… III. 高等数学—高等学校—教材… IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 192114 号

书　　名：高等数学方法
著作责任者：彭勤文　编　著
责 任 编 辑：袁玉明
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12997-5/O・0742
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765126　出版部 62754962
网　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×980 毫米　16 开本　14.5 印张　310 千字
2009 年 3 月第 1 版　2009 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：24.00 元

前　　言

“高等数学”的主要内容基本上就是微积分学。微积分是从17世纪中叶开始，由牛顿与莱布尼兹发明之后，经过半个多世纪的思想积累和很多代人的不断努力逐渐完善的。现在它不仅是近代数学的理论基础，还是物理学和其他自然科学的基础，它也是经济、工业技术，甚至是人文科学的思想方法基础。尽管历史久远，但其中分析问题和解决问题的思想方法的影响却是深远的。

本课程不仅可以提供学习后继课程的必备知识，而且可以培养学生严谨的作风，学会分析问题的思想方法，逐步提高解决问题的能力。

高等数学是高等院校工科学生必修的数学基础课。大部分刚入学的一年级学生感到有一定的困难。除了对大学教学方式的不适应等因素外，缺少学习动力也是十分突出的普遍现象。产生这些问题的根源归纳起来有以下两点：（1）对数学教材中大量的概念、定理、习题等内容的材料堆砌、重叠产生的厌烦感。（2）照本宣科的教学模式。一方面教师千方百计陈述学习数学的必要性，加大练习量强化训练；另一方面学习者敷衍了事，其直接的后果是对较高年级的课程几乎无法继续学习。当然，任何一门学科都离不了基本概念和结论，但如果能够了解为什么要学习这些内容，学完后有什么用处，学习中产生愉悦感就可以取得相当的收获。

本教材以高等数学的思想体系为主导原则，将高等数学的内容按函数的微分学、函数的积分学两个大类组织，将空间解析几何与向量代数作为准备知识，把无穷级数与微分方程安排成微积分的应用。其中：（1）明确指出函数作为高等数学的研究对象和记号上最简明的数学特点，对极限理论从方法学的角度引入，从一元函数到多元函数顺序介绍微分学，对多元函数的微分学及其应用部分，特别指出它们与一元函数相应部分的不同点产生的原因及处理方法，而相似的地方予以缩略，减少了重复。（2）详细介绍一元函数积分学的思想方法和积分计算的必需工具——微积分学基本公式，尤其是积分上限函数的双重身份（作为积分与作为函数）在认识观念上和思想方法上的“创新”。重积分等多元函数的积分学则只作为前述思想在各种不同问题中采用特殊方法的应用，着重于各种方法产生的背景及其特定的计算方法。（3）无穷级数与微分方程安排成微积分的应用。在叙述上说明了要做什么和怎么做，加强对应用方法的介绍。（4）教材中只安排少量精选的例题。以提出问题→搜索可能涉及的知识点→分析寻找联系的条件→尝试解决办法→修正、再分析再尝试→达到解决的思想方法为主，在适当的地方，增加了扩充思考题。（5）将练习题安排在每章内容的最后，减少重复性的计算题，除非必要，一般都不指定用什么方法。

本教材积极倡导数学美学以唤起人们对于数学学习的兴趣，期待在欣赏美的过程中理解数学的思想方法，掌握基本的技能，从而真正理解数学的目的、方法、意义。

鉴于当今知识更新的速度飞快，人们迫切希望能够在有限的时间内快速了解或掌握必备的知识与技能。针对微积分学的特点，加强思想方法的训练是本书的宗旨。作为一种新的尝试，尽管编者从材料的组织到内容的叙述以及文本的打印都作了最仔细的考虑，但限于编者的水平，教材中仍可能存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正，以便进一步完善。

感谢北京大学出版社黄庆生、袁玉明等同志的大力支持，也感谢杭州电子科技大学提供教学机会，得以实践。

编　者

2008 年末于杭州

目　　录

第 1 篇　函数的微分学及其应用

第 2 篇 函数的积分学

第 1 篇　函数的微分学及其应用

概述： 微积分学的研究对象是函数，与中学数学不同之处在于要了解函数的“动态”特性。由于变量的变化范围可能处于不同的空间，理解函数的特性需要考虑其所处的空间。所谓“空间”是将有序实数组与点一一对应，采用相应的坐标系产生的。函数的“动态”特性主要表现为“趋势”问题，极限工具是解决这个问题的根本方法。

第 1 章　坐标空间与解析几何方法

坐标空间即坐标系，是为了解决一些问题而建立的参照系。一般根据不同的问题对象采用合适的坐标系，因此有多种形式的坐标系。解析几何方法把几何元素（向量或点）与有序实数组对应起来，把图形与方程或不等式组对应起来，从而可以用代数方法研究几何问题。

下面主要叙述一些基本概念，强调对空间点集的描述方法，它们对学好高等数学是非常重要的。

1.1　坐标系与点集的描述

一条标示了方向和单位长度的有向直线称为数轴。这个长度为 1、有方向的量称为单位向量（矢量）。任何一个实数都与数轴上的一个点一一对应。在数轴上，由于数的大小（或点的位置）容易区分，通常不使用点集的术语。实数的集合如：$\boldsymbol{Z}$ 表示全体自然数，$\boldsymbol{N}$ 表示全体整数，$\boldsymbol{Q}$ 表示全体有理数，$\boldsymbol{R}$ 表示全体实数，集合 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，集合 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$ 称为开区间。

由两条相互垂直的数轴构成了平面直角坐标系，这两条相互垂直的数轴分别称为 x 轴和 y 轴，如图 1-1 所示。

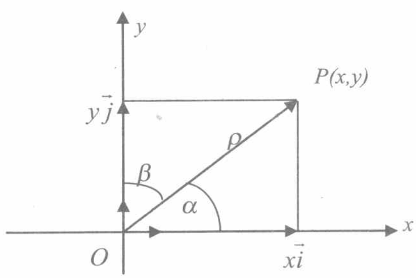

图 1-1

在平面直角坐标系中，点 P 用一对有序数组 (x,y) 表示。通过从点 P 分别向坐标轴引垂线，其交点在轴上对应的实数即是 x 和 y，分别称为点的横坐标和纵坐标。使用向量 $\overrightarrow{OP}$

的终点同样可以表示点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 用坐标表示为 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 或 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}=\{x,y\}$。把向量 $\overrightarrow{OP}$ 垂直投影到 x 轴和 y 轴可以得到向量 $x\vec{i}$ 和 $y\vec{j}$，其中 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴上的单位向量。给定平面上两个点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，利用向量运算的平行四边形法则有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$，$A,B$ 之间的距离就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模（长度）$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，规定任何两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角记为 $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$ 的取值范围是 $[0,\pi]$。

设向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴、y 轴的夹角分别为 α、β，记 $\rho=\left|\overrightarrow{OP}\right|$。因为 $\begin{cases}x=\rho\cos\alpha\\y=\rho\sin\alpha\end{cases}$，可见实数对 (ρ,α) 与 (x,y) 相互唯一确定，由数对 (ρ,α) 也可以建立一个平面坐标系，称为**极坐标系**。关系式 $\begin{cases}x=\rho\cos\alpha\\y=\rho\sin\alpha\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\alpha=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}$ 是在平面直角坐标系与极坐标系之间的坐标转化式。

平面上点的集合表示为 $D=\{(x,y)|点P(x,y)具有的性质\}$，例如由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的平面上的点的集合，利用平面直角坐标表示为：$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，利用极坐标可表示为 $D=\{(\rho,\theta)|0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$。两种表示方法描述的是同一个平面点集。

因为 $x=\rho\cos\alpha,y=\rho\cos\beta=\rho\sin\alpha$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\rho},\cos\beta=\dfrac{y}{\rho}$，容易得到 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，（这不就是**三角恒等式**嘛！）这表明向量 $\vec{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{\dfrac{x}{\rho},\dfrac{y}{\rho}\right\}=\dfrac{1}{\rho}\{x,y\}$ 是一个单位向量，这种利用向量模的倒数乘以原向量得到单位向量的方法叫做**向量的单位化**。仿照从数轴到平面直角坐标系的方法，可以推广到（三维）空间直角坐标系。在空间中取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的数轴，它们构成一个空间直角坐标系，如图 1-2 所示。

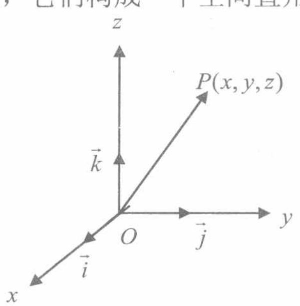

图 1-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，分别称为 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面。三个坐标面把空间分成 8 个部分，按逆时针方向从 xOy 坐标面上方到下方分别称为第一、第二、……、第八**卦限**。在坐标轴、坐标面上，点的坐标各有一定的特征。例如：xoy 坐标面上的点为 $(x,y,0)$，z 轴上点为 $(0,0,z)$ 等。按照坐标面的位置和坐标轴的方向，通常若 $z>0$ 或 $z<0$ 就说点在 xOy 坐标面的上方、下方；若 $x>0$ 或 $x<0$ 就说点在 yOz 坐标面的前方、后方，若 $y>0$ 或 $y<0$ 就说点在 zOx 坐标面的右方、左方。

点 $P(x,y,z)$ 即向量 $\overrightarrow{OP}$ 的终点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示为：$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\{x,y,z\}$。给定两个点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，利用向量运算的平行四边形法则有 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，$A,B$ 之间的距离就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模（长度）$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α、β、γ 确定了 $\overrightarrow{OP}$ 的方向，称为 $\overrightarrow{OP}$ 的**方向角**，它们的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\overrightarrow{OP}$ 的**方向余弦**。它们与向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模 $r=\left|\overrightarrow{OP}\right|$ 之间的关系为：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{r}$，显然 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$（这是三角恒等式的推广），它表明 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是单位向量。所以，任何一个非零向量 $\vec{r}=\{x,y,z\}$ 的单位化可以如下处理：$\vec{e}=\dfrac{1}{r}\vec{r}=\dfrac{1}{r}\{x,y,z\}=\left\{\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right\}$。

在空间直角坐标系中，把 x，y 坐标采用极坐标，z 保持不变，这样有 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}$。数组 (ρ,θ,z) 与 (x,y,z) 相互唯一确定，由此产生的坐标系称为**柱面坐标系**，如图 1-3 所示。点 M 是点 P 在 xOy 坐标面上的投影，ρ 是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 xOy 坐标面上的投影，θ 是 OM 与 x 轴正向的夹角。

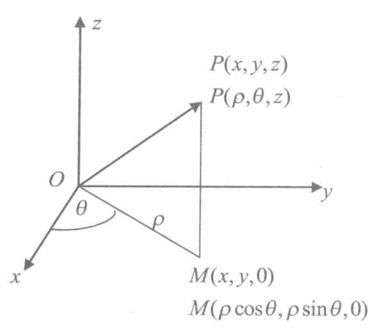

图 1-3

另外，在空间直角坐标系中，把点 $P(x,y,z)$ 投影到 xOy 坐标面上的点 $M(x,y,0)$，r 是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模，φ 是 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴正向的夹角，那么 $|OM|=\rho=r\sin\varphi, x=\rho\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，这样有 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$。数组 (r,φ,θ) 与 (x,y,z) 相互唯一确定，由此产生的坐标系称为**球面坐标系**，如图 1-4 所示。

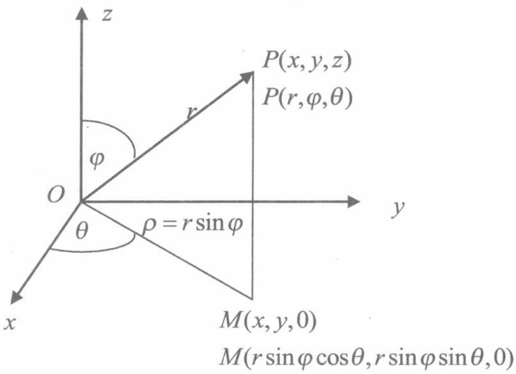

图 1-4

空间中点的集合表示为 $\Omega=\{(x,y,z)|\text{点}Q(x,y,z)\text{具有的性质}\}$，例如中心在坐标原点棱长为 2 的正方体表示为：$\Omega=\{(x,y,z)|-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant z\leqslant 1\}$。

集合 $\Omega_1=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 1,-1\leqslant z\leqslant 1\}$ 表示一个圆柱体，利用**柱面坐标**表示为：$\Omega_1=\{(\rho,\theta,z)|0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,-1\leqslant z\leqslant 1\}$；

集合 $\Omega_2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 表示一个球体，利用**球面坐标**表示为：$\Omega_2=\{(\rho,\varphi,\theta)|0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$。

平面上或空间中的点集（无序性）与数轴上的点集（有序性）具有本质的区别，这导致了一元函数与多元函数在研究中有许多差异。学习中应当特别关注课程中研究方法和结论的异同。

1.2　向量的乘积运算——数量积、向量积

向量的加、减和数乘运算与中学物理中矢量的运算规则相同，我们在这里予以省略。对任何两个向量 $\vec{a},\vec{b}$，规定了以下两种乘积运算。

（i）称 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$,　$\theta=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ **数量积**（也称**点积**）。

（ii）称模为 $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta,\theta=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 并且方向满足右手规则的向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的**向量积**（也称**叉积**）。

右手规则是用右手的四个手指从向量 $\vec{a}$ 到向量 $\vec{b}$ 握拳时竖起的大拇指即指示向量 $\vec{c}$ 的方向。

注意：数量积中的"•"和向量积中的"×"不能缺少。没有像 $\vec{a}^2$ 等记法（因为没有用处，所以不规定它的意义）。

数量积的物理背景是恒力 $\vec{F}$ 沿直线移动物体产生位移 $\vec{s}$ 过程中所做的功 $W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$，$\theta=(\widehat{\vec{F},\vec{s}})$。这是一个标量，因此称为数量积。

当 $|\vec{b}|=1$ 时 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cos\theta$ 称为向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的**投影**。注意区别，投影是数量，而投影向量是向量。

向量 $\vec{a},\vec{b}$ 数量积有以下简单的性质。

（1）两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 相互垂直即 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

（2）两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角 θ 可以从下式解出 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

（3）$\vec{a}\cdot\vec{b}==a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

设向量 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$。由于单位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 两两垂直，从而 $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$，$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$，所以

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\
&=a_x\vec{i}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_z\vec{k}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\
&=a_x\vec{i}\cdot b_x\vec{i}+a_x\vec{i}\cdot b_y\vec{j}+a_x\vec{i}\cdot b_z\vec{k}+a_y\vec{j}\cdot b_x\vec{i}+a_y\vec{j}\cdot b_y\vec{j}+a_y\vec{j}\cdot b_z\vec{k}+a_z\vec{k}\cdot b_x\vec{i}\\
&\quad+a_z\vec{k}\cdot b_y\vec{j}+a_z\vec{k}\cdot b_z\vec{k}\\
&=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}\\
&\quad+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\\
&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z
\end{aligned}
$$

特别地　$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2=|\vec{a}|^2$。

向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量积的物理背景是研究物体转动问题时，力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩，它是一

个向量，在刚体的旋转问题中力矩起重要的作用，如图 1-5 所示。

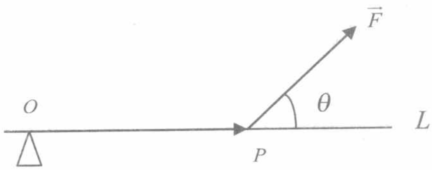

图 1-5

由向量积的定义可以推得：

（1）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$（注意零向量$\vec{0}$不能写成 0）；

（2）$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$　向量积不满足交换律；

（3）两个向量$\vec{a},\vec{b}$相互平行即$\vec{a}\parallel\vec{b}$的充分必要条件是$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$；

（4）$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$。

设向量$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$。由于单位向量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$两两垂直，从而$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，以及$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$和$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$，所以

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$，利用三阶行列式的记法上式即

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

容易看出，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$。

（5）若$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，那么$\vec{c}\perp\vec{a}$并且$\vec{c}\perp\vec{b}$。

注意：在寻求与给定的两个向量都垂直的向量时可利用性质（4），务必准确计算$\vec{a}\times\vec{b}$。

1.3　曲面及其方程

在了解了坐标空间之后，本节开始讨论空间中点的几何轨迹。虽然其方法完全类似于平面解析几何，但是由于空间中图形的描绘有很大的困难，缺乏直观，认识空间图形的基本方法是：利用投影，从三维空间到二维平面再到一维数轴，这个过程是“动态”的。也就是说，讨论的对象必须要清楚其所处的空间，投影的目的是为了解决空间问题。

空间中点的几何轨迹可以用它的坐标满足的方程来表示。动点 (x,y,z) 的坐标满足的三元方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面的方程，该方程的图形叫做曲面。关于曲面的研究，有下面两个基本问题：

（1）根据动点的几何特征，建立曲面的方程；

（2）已知曲面的方程，研究曲面的诸如位置、形状等几何特征，尤其如两个或两个以上曲面之间的位置关系等。

现在我们建立几个常见曲面的方程。

例 1.1 与一个定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 保持定长距离 R 的动点的轨迹称为**球面**，定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 叫做球心，定长距离 R 为半径。它的方程是：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 也就是 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 的样式。

球面方程有下列特点：

（1）三元二次方程，二次项系数相同，不含交叉项 xy,yz,zx；

（2）球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在 xOy 面上方和第一卦限的图形，见图 1-6 和图 1-7。

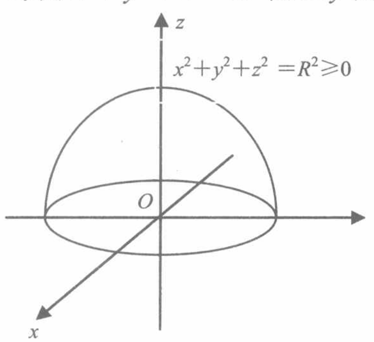

图 1-6

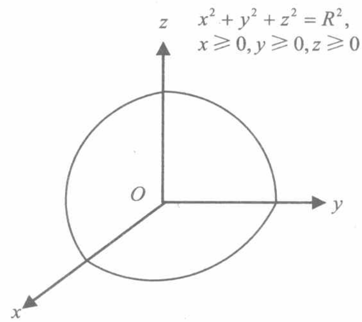

图 1-7

例 1.2 一条直线 L 绕另一条与之相交的定直线旋转一周所得的曲面叫做**圆锥面**，如图 1-8 所示。定直线 z 轴为**旋转轴**，直线 L 称为**母线**，两直线的夹角 α 称为**半顶角**，O 为顶点。

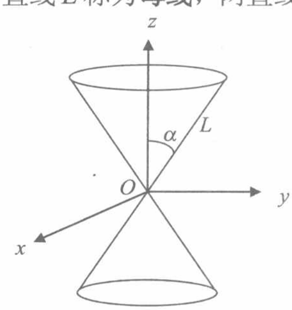

图 1-8