主　编：陈特为
副主编：邓家昭　严粤锋　胡卫星

高职高专数学

◎广东高等教育出版社

高职高专数学

主　编：陈特为
副主编：邓家昭　严粤锋　胡卫星

广东高等教育出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高职高专数学/陈特为主编. —广州：广东高等教育出版社，2008. 8
ISBN 978 - 7 - 5361 - 3700 - 4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 高等数学 - 高等学校：技术学校 - 教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 128975 号

广东高等教育出版社出版发行
地址：广州市天河区林和西横路
http：//www. gdgjs. com. cn
邮编：510500　营销电话：(020) 87553335
广州市怡升印刷有限公司印刷
787 毫米 ×1 092 毫米　16 开本　12. 25 印张　233 千字
2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
印数：3 000 册
定价：22. 00 元

前　言

数学是理工类、经济类和管理类学科的必修基础课程；数学作为工具，为学生将来从事其他工作提供可使用的工具；数学作为手段，是培养人的素质的手段.

根据高职高专院校学生的实际情况以及应用数学的程度，我们编写了《高职高专数学》一书. 内容包括微积分学及微分方程初步、线性代数、随机事件及其概率、一元随机变量及其数字特征、工程数学初步. 本书以介绍重要数学概念为主，并指出这些概念的应用，使学生对高等数学有一定的了解和掌握，为学生查阅资料、阅读文献提供有益的帮助.

本书在编写时力求突出如下特点：

(1) 从高职高专人才培养的目标出发，以应用为目的，以理论够用为度为原则，以掌握基本概念、强化应用为重点，在不影响内容的逻辑性的基础上，淡化理论体系和理论证明.

(2) 以应用为切入点，引进数学概念，并指出其应用，使学生明确学习目的，增强学习数学的信心.

(3) 从学生的感性认识入手，使学生更直观、更容易地接受学习内容，增强学习数学的兴趣.

我们相信，通过对本书的学习，一些对数学不感兴趣的高职高专学生将会逐步消除“数学恐惧症”.

本书各节附上习题，是以巩固概念和应用为目的，供学生课后练习用. 本书的学时分配如下：第1章16学时，第2章24学时，第3章10学时，第4章6学时，第5章8学时，第6章18学时. 标“*”号的内容可酌情删减. 经济类和管理类的专业，课程名称为《经济数学》，选讲前5章. 理工类的专业，课程名称为《高等数学》，选讲前3章和第6章. 本书同时作为这两门课程的教材.

本书由在高职高专院校担任数学教师多年的老师编写，其中第1章由陈特为（潮汕职业技术学院）编写，第2章、第3章由严粤锋（广东理工职业学院）编写，第4章、第5章由胡卫星（广东体育职业技术学院）编写，第6章由邓家昭（潮汕职业技术学院）编写．全书由陈特为统稿，由邓家昭对全书的初稿进行整理编辑．

本书在编写过程中，参考了高职高专基础类课程规划教材，对于这些教材的编写者，我们在此表示衷心感谢．本书曾以讲义的形式在潮汕职业技术学院试用，学院的王金芝、孙丽丽、饶晓强等老师提出了许多宝贵意见，对他们的热情支持，我们表示衷心感谢．

本书在编写和出版过程中，得到潮汕职业技术学院领导、广东高等教育出版社的大力支持，在此，我们表示深切的谢意．

由于我们对高职高专教育理解的局限性，本书难免存在不完善之处，请读者将意见及时反馈给我们，以便修订时进一步完善．

编 者

2008年5月

目　录

预备知识

1. 邻域

在数轴上，以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域（如图 0－1 所示）.

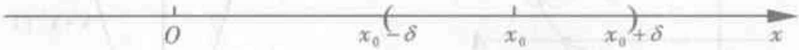

图 0–1

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，若 $u=\varphi(x)$，值域为 D_0，且 $D_0\cap D$ 非空，则称 $y=f(\varphi(x))$ 为复合函数，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量. 我们简称函数 $y=f(\varphi(x))$ 由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成.

例如：$y=e^{x^2}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的. $y=e^{\sqrt{x^2+4}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+4$ 三个函数复合而成. $y=\ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 是由 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}$ 三个函数复合而成的.

3. 极限

（1）自变量趋于无穷大时函数的极限.

当函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近某个常数 A（如图 0－2所示），我们称当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 以 A 为极限，记为

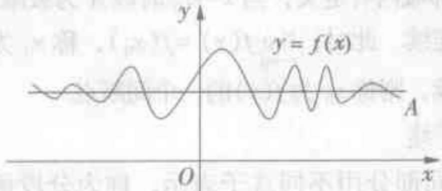

图 0–2

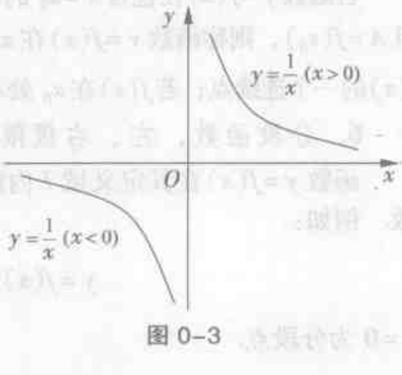

图 0–3

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

例如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（如图 0－3 所示）.

（2） 自变量趋于有限值时函数的极限.

若函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 无限趋于定点 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近某个常数 A（如图0－4所示），我们称当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

例如$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$（如图 0－5 所示）.

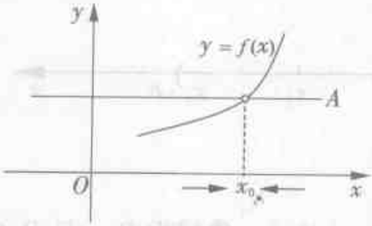

图 0－4

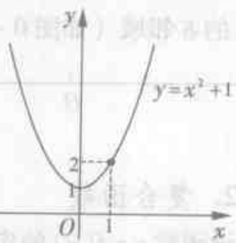

图 0－5

4. 无穷小与无穷大

无穷小：在一个极限过程中，以零为极限的变量叫做这个极限过程中的无穷小量，简称为无穷小.

无穷大：在一个极限过程中，若变量的绝对值无限增大，则称该变量为无穷大量，简称为无穷大.

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

5. 连续

若函数 $y=f(x)$ 在包含 $x=x_0$ 的一个邻域内有定义，当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，且 $A=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续. 此时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，称 x_0 为 $f(x)$ 的一个连续点；若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点.

6. 分段函数，左、右极限与连续

函数 $y=f(x)$ 在其定义域 I 内的不同部分用不同式子表示，称为分段函数. 例如：

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0, \\ x+1 & x>0. \end{cases}$$

$x=0$ 为分段点.

当自变量从 x_0 的左边趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，我们称 A 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A.$$

同理有右极限

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=B.$$

当 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$ 时，可判定当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 以 A 为极限，反之也成立. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A, \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A. \end{cases}$$

当 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ 时，我们称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；当 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ 时，我们称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然也有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0), \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \end{cases}$$

7. 排列与组合

排列与组合是计算古典概率的工具.

(1) 两个基本原理.

加法原理：若完成某项任务有 n 种方式，第一种方式有 m_1 种方法，第二种方式有 m_2 种方法，……，第 n 种方式有 m_n 种方法，则共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法完成该项任务.

乘法原理：若完成某项任务有 n 个步骤，第一个步骤有 m_1 种方法，第二个步骤有 m_2 种方法，……，第 n 个步骤有 m_n 种方法，则共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同方法完成该项任务.

(2) 排列.

从 n 个不同的元素 a_1，a_2，…，a_n 中取任 $m(0<m\leqslant n)$ 个，按照一定顺序排成一列，这样的一列元素称为一个排列. 总的排列数为 $\mathrm{P}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$. 当 $m=n$ 时，称为全排列，记为 $\mathrm{P}_n^n=n!$，其中 $n!\ =1\times2\times3\times\cdots\times n$.

当取出的 m 个元素可以重复选取时，称为可重复排列. 重复排列数为 n^m.

(3) 组合.

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，不考虑元素之间的顺序，构成一个组，称为一个组合. 组合数为 $\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

第1章 导数与微分

导数与微分是微分学中最基本的概念，导数反映的是函数值相对于自变量的变化快慢的程度，而微分反映的是当自变量有微小变化时，函数值的变化幅度. 本章主要是介绍这两个重要概念及其简单应用，同时介绍偏导数的定义.

§1.1 导数的概念

一、引例

1. 变速直线运动的瞬时速度

在物理学中，当物体做匀速直线运动时，它的瞬时速度为

$$v=\frac{s}{t}.$$

设一物体做自由落体运动，由于地球引力的作用，其下落的速度越来越快，我们需研究物体在下落过程中，在时刻 t_0 时的速度，即瞬时速度 $v(t_0)$. 自由落体运动的规律在物理学中已有公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

在 t_0 时刻物体的下落路程记为 $s(t_0)$，记 $\Delta t=t-t_0$，在 $t=t_0+\Delta t$ 时刻物体的下落路程为 $s(t)=s(t_0+\Delta t)$，于是在 t_0 到 $t=t_0+\Delta t$ 这段时间内，物体经过的路程为 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$（如图1-1所示），则在 Δt 时间内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

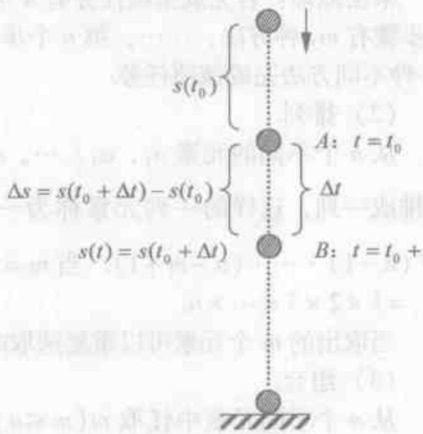

图 1-1

当物体做匀速直线运动时，这个平均速度是 t_0 时刻的瞬时速度；但对

于变速直线运动，它只能近似地反映 t_0 时刻的瞬时速度. 对确定的 t_0，显然 $|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 越接近 t_0 时刻的瞬时速度，即当 $\Delta t \to 0$ 时，$\bar{v} \to v(t_0)$.

令 $\Delta t \to 0$，若 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限存在，则此极限值称为物体在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt_0.
\end{aligned}
$$

这就是物理学中自由落体的速度公式. 物体运动在 t_0 时刻的瞬时速度反映了路程 s 对时间 t 变化快慢的程度，因此，瞬时速度 $v(t_0)$ 又称为路程 $s(t)$ 在 t_0 时刻的变化率.

2. 曲线切线的斜率

(1) 曲线切线的定义.

如图 1 - 2 所示，设点 M 是曲线 c 上的一个定点，在曲线 c 上任取一个点 N，作割线 MN. 当动点 N 沿着曲线 c 向定点 M 移动时，割线 MN 绕定点 M 摆动，当动点 N 无限接近于定点 M 时，其极限位置为 MT，则直线 MT 称为曲线 c 在点 M 处的切线.

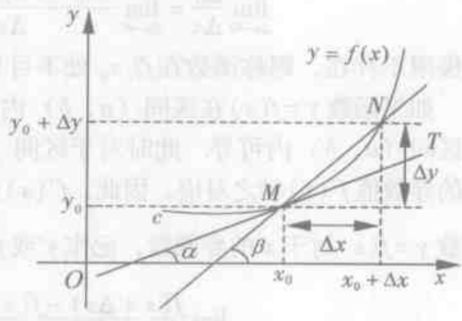

图 1-2

(2) 曲线切线的斜率.

设曲线 c 的方程为 $y=f(x)$，求曲线 c 在点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的斜率.

如图 1 - 2 所示，在曲线上取与 $M(x_0, y_0)$ 邻近的另一个点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，作割线 MN，则割线 MN 的斜率为

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

其中 β 为割线 MN 的倾斜角. 当点 N 沿曲线 c 向点 M 无限接近时，即当 $\Delta x \to 0$ 时，上式的极限存在，设为 k，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k.$$

这时，$k=\tan\alpha\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，$k$ 是切线 MT 的斜率，α 是切线 MT 的倾斜角.

曲线 c 在点 M 的切线斜率反映了曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处升降的快慢速度，因此，切线斜率 k 又称为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的变化率.

二、导数的定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在点 x_0 的邻域取得增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 时，函数 $f(x)$ 取得相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数，记作

$$f'(x_0)\text{或}y'\big|_{x=x_0}\ \text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

若极限不存在，则称函数在点 x_0 处不可导.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内的每个点均可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内可导. 此时对于区间 $(a,\ b)$ 内的每一个 x 值，有唯一确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，因此，$f'(x)$ 仍然是 x 的一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 对于 x 的导函数，记作 y' 或 $f'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}=y'\big|_{x=x_0}.$$

今后在不会发生混淆的情况下，导函数简称导数.

三、由导数的定义直接求导数

由导数的定义直接求函数 $y=f(x)$ 的导数可分为以下三步：

（1）求函数增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

（2）化简比式：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

（3）取极限：$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

例 1 求函数 $y=C$（C 是常数）的导数.

解 （1）求函数增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$.

（2）化简比式：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$.

（3）取极限：$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

所以 $y'=C'=0$，即常数的导数为零.

例 2 求 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=1$，$x=0$ 处的导数.

解 在 $x=1$ 处，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt[3]{1+\Delta x}-1$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt[3]{(1+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{1+\Delta x}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{1+\Delta x}+1},$$

所以
$$f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{1+\Delta x}+1}=\frac{1}{3}.$$

在 $x=0$ 处，$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\sqrt[3]{\Delta x}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ 不存在，所以 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 3 求 $y=x^2$ 的导数，并指出在 $x=2$，$x=-3$ 处的导数.

解 （1）求函数增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$
$$=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

（2）化简比式：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

（3）取极限：$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x)=2x=y'$.

即
$$y'=(x^2)'=2x.$$

在 $x=2$ 处，$f'(2)=f'(x)\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=4$.

在 $x=-3$ 处，$f'(-3)=f'(x)\big|_{x=-3}=2x\big|_{x=-3}=-6$.

四、导数的几何意义

由曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的斜率和导数的定义，有

$$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

所以，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的斜率，这就是导数的几何意义.

由解析几何学可知，曲线 $y=f(x)$ 过点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\qquad [f'(x_0)\neq 0].$$

例 4　求曲线 $y=x^2$ 过点（1，1）的切线方程和法线方程.

解　由例 3 可知，$y'=2x$，所以过点（1，1）的切线斜率为

$$k=f'(1)=2x|_{x=1}=2.$$

切线方程为

$$y-1=k(x-1)=2(x-1),$$

即

$$y=2x-1.$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1),$$

即

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

五、基本求导公式

利用导数的定义，可以得到下列一些基本求导公式：

(1) $(C)'=0$；　(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$；

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；　(4) $(e^x)'=e^x$；

(5) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；(6) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；　(8) $(\cos x)'=-\sin x$.

习　题　1.1

1. 利用导数定义求下列函数的导数：

(1) $y=2x^2$；　(2) $y=2x+1$；　(3) $y=x^3$.

2. 求下列曲线在点（1，1）处的切线方程和法线方程：

(1) $y=\sqrt{x}$; (2) $y=\frac{1}{x}$.

3. 利用幂函数求导公式 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，求下列函数的导数：

(1) $y=x^{1.6}$; (2) $y=x^{3}\cdot\sqrt[5]{x}$;

(3) $y=x^{-3}$; (4) $y=\frac{x^{2}\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

4. 设 $f(x)=2\cos x$，试求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

§1.2 求导方法

在前一节中，我们利用导数的定义直接求出一些函数的导数，得到基本求导公式，但是对于一般函数，直接利用定义求导是较困难的. 我们需要引进新的求导方法.

一、导数的四则运算法则

由导数的定义，我们可以得到如下运算法则：

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 处均可导，则

(1) $u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x).$$

(2) $u(x)\cdot v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

特殊地，
$$[Cu(x)]'=Cu'(x).$$

(3) $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处可导，且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^{2}(x)}\quad [v(x)\neq 0].$$

例 1 设 $y=3x^{3}-5x^{2}+2^{x}+\ln 2$，求 y'.

解 $y'=(3x^{3})'-(5x^{2})'+(2^{x})'+(\ln 2)'=9x^{2}-10x+2^{x}\ln 2.$

例 2 设 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$，求 $f'(x)$.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^{\frac{1}{2}})'\sin x+x^{\frac{1}{2}}(\sin x)'\\&=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x+x^{\frac{1}{2}}\cos x\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x.\end{aligned}$$

例 3 设 $f(x)=\tan x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

同理：$g(x)=\cot x$，$g'(x)=-\csc^2 x$.

例 4 设 $f(x)=\sec x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{1'\cos x-1(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理：$g(x)=\csc x$，$g'(x)=-\csc x\cot x$.

由例 3 和例 4，基本求导公式可补充下列 4 个：

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$；

(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

利用反函数求导法则，可得反三角函数的求导公式：

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$；

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

(16) $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

至此，求导的基本公式共 16 个.

二、复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处也可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且

$$y'_x=\{f[\varphi(x)]\}'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

例 5 设 $y=\sin x^2$，求 y'.

解 设 $y=\sin u$，$u=x^2$，则

$$y'_x=(\sin u)'_u\cdot(x^2)'_x=2x\cos u=2x\cos x^2.$$