

2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

2010nian quanguo shuoshiyanjiusheng ruxuekaoshi linian zhenti jingjie



数学 (三)

童武 王德军 王欢◎编著

Shuxue

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写,内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华,明示命题原则与规律,把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲,反映最新出题动态,详解解题思路,拓展内在联系
- 荟萃专家智慧,启迪备考,提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

2010 年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010 年全国硕士研究生入学考试

历年真题精解

数学 (三)

童武 王德军 王欢 编著

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写,内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华,明示命题原则与规律,把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲,反映最新出题动态,详解解题思路,拓展内在联系
- 荟萃专家智慧,启迪备考,提高考生综合应试能力

 北京科学技术出版社

定价: 18.00 元

图书在版编目(CIP)数据

2010 年全国硕士研究生入学考试历年真题精解. 数学. (三)/童武, 王德军, 王欢编著.

—北京: 北京科学技术出版社, 2009. 5

(2010 年全国硕士研究生入学考试辅导丛书)

ISBN 978-7-5304-4159-6

I. 2… II. ①童…②王…③王… III. 高等数学—研究生—入学考试—
解题 IV. G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 063394 号

真题精解

(三) 数学

2010 年全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学(三)

作 者: 童 武 王德军 王 欢

责任编辑: 朱 琳 李 媛

责任印制: 张 良

封面设计: 清水设计工作室

出 版 人: 张敬德

出版发行: 北京科学技术出版社

社 址: 北京西直门南大街 16 号

邮政编码: 100035

电话传真: 0086-10-66161951(总编室)

0086-10-66113227(发行部) 0086-10-66161952(发行部传真)

电子信箱: bjkjpress@163.com

网 址: www.bkjpress.com

经 销: 新华书店

印 刷: 保定市中国画美凯印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

字 数: 318 千

印 张: 12.75

版 次: 2009 年 5 月第 1 版

印 次: 2009 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5304-4159-6/G·833

定 价: 18.00 元



京科版图书, 版权所有, 侵权必究。

京科版图书, 印装差错, 负责退换。

前言

为了指导参加 2010 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习,根据最新考试大纲的要求,我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《2010 年全国硕士研究生入学统一考试历年试题精解 数学一》,以供广大考生复习使用。

自从实行研究生入学考试以来,也时有真题重现的现象发生,如 2006 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一第四大题、2003 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一的第一大题第(3)小题、2003 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第一大题第(5)小题、2003 年数学一的第三大题与 2001 年数学三的第六大题、2003 年数学四的第四大题与 2001 年数学——的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况,2003 年英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题,2003 年英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题,2003 年英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题,2003 年英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题,2003 年英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题,1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题等等,都是非常相似的。2003 年政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题,2003 年政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题,2003 年政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题等等,都是相同或非常相似的。所以,对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路,我们就可以把握考试的脉搏,明确考试的重点和难点所在。

全国硕士研究生入学考试数学学科是考查考生的数学功底、思维能力,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃。数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块,经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识。无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据。考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力。

不论是数学理论的建立,还是数学运算和逻辑推理,无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识,对大纲规定的内容进行梳理,形成知识网络;其次,在接触一定量的题型之后,头脑中留下的不是纷繁的题目,而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能,以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性通法,又要分析它的特殊性,寻求最佳解决方法,提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的,它是提高考试

成绩的重要手段,但也不要搞题海战术,重要的是要吃透大纲规定的基本考点,提高分析问题和解决问题的能力。

由于编者水平有限,时间仓促,不妥之处在所难免,衷心希望广大读者批评指正。

编者

本书是根据2010年全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》考试大纲的要求,结合多年命题和辅导工作的经验,参照教育部《2010年全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试大纲》,对2006年以来的真题进行了系统的整理和归纳,力求做到全面、准确、实用。

本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。

本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。

本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。

本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。本书在编写过程中,参考了有关文献和资料,力求做到观点正确、内容翔实、重点突出、条理清晰。本书可作为全国硕士研究生入学统一考试《思想政治理论》科目的复习参考书,也可作为高等院校思想政治理论课的教学参考书。

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续	1
题型 1.1 函数、极限的概念及其特性	1
题型 1.2 函数极限的计算及其逆问题	2
题型 1.3 数列的极限	4
题型 1.4 无穷小量的比较	5
题型 1.5 函数的连续性及其间断点的分类	6
第二章 一元函数微分学	9
题型 2.1 导数的定义	9
题型 2.2 利用导数求曲线的切线、法线方程	11
题型 2.3 一般导函数的计算	13
题型 2.4 可导、连续与极限的关系	14
题型 2.5 利用导数确定单调区间、极值及证明不等式	16
题型 2.6 求函数曲线的凹凸区间与拐点、渐近线	19
题型 2.7 确定函数、导函数方程的根	21
题型 2.8 微分的概念与计算及微分中值定理的综合应用	24
题型 2.9 导数的经济上应用	26
第三章 一元函数积分学	32
题型 3.1 原函数与不定积分的概念	32
题型 3.2 定积分的基本概念与性质	33
题型 3.3 不定积分、定积分的计算	34
题型 3.4 定积分的证明题	36
题型 3.5 变限积分与广义积分	41
题型 3.6 应用题	44
第四章 多元函数微分学	51
题型 4.1 基本概念题	51
题型 4.2 二元函数的极限	51
题型 4.3 求复合函数、隐函数的偏导数和全微分	52
题型 4.4 求多元函数的极值和最值	59
第五章 重积分	62
题型 5.1 与二重积分性质有关的问题	62

数学(三)

题型 5.2	交换积分顺序或坐标系	62
题型 5.3	选择适当坐标系计算二重积分	63
题型 5.4	利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性计算	67
题型 5.5	分块积分与无界区域上的二重积分	68
题型 5.6	解含有未知函数二重积分的函数方程	71
第六章	无穷级数	72
题型 6.1	判定数项级数的敛散性	72
题型 6.2	求幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域及和函数	74
题型 6.3	求数项级数的和	79
题型 6.4	将函数展开成幂级数	82
第七章	常微分方程	83
题型 7.1	一阶微分方程和一阶差分方程	83
题型 7.2	高阶常系数线性微分方程	86
题型 7.3	求解含变限积分的方程	87
题型 7.4	微分方程的应用	88
第二部分 线性代数		
第一章	行列式	90
题型 1.1	利用行列式和矩阵的运算性质计算行列式	90
题型 1.2	利用秩、特征值和相似矩阵等计算行列式	90
第二章	矩阵	92
题型 2.1	有关逆矩阵、矩阵秩的计算与证明	92
题型 2.2	矩阵的乘法运算	96
题型 2.3	解矩阵方程	97
题型 2.4	与初等变换、伴随矩阵有关的命题	98
第三章	向量	101
题型 3.1	向量的线性组合与线性表示	101
题型 3.2	向量组的线性相关性	104
题型 3.3	求向量组的秩与矩阵的秩	108
第四章	线性方程组	110
题型 4.1	解的判定、性质与结构	110
题型 4.2	求齐次线性方程组的基础解系、通解	112
题型 4.3	求非齐次线性方程组的通解	115
题型 4.4	有关基础解系的命题	120
题型 4.5	讨论两个方程组解之间的关系(公共解、同解)	120
第五章	特征值与特征向量	122
题型 5.1	求数字矩阵的特征值和特征向量	122

题型 5.2 求抽象矩阵的特征值	122
题型 5.3 特征值、特征向量的逆问题	123
题型 5.4 相似矩阵、可对角化的判定及其逆问题	124
题型 5.5 实对称矩阵的性质	127
第六章 二次型	132
题型 6.1 二次型的矩阵、秩和正负惯性指数	132
题型 6.2 化二次型为标准形	132
题型 6.3 合同变换与合同矩阵	135
题型 6.4 正定二次型与正定矩阵	138

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	143
题型 1.1 事件的关系与概率的基本性质	143
题型 1.2 古典概型、几何概型、贝努力概型	144
题型 1.3 乘法公式、条件概率公式	146
题型 1.4 全概率公式、贝叶斯公式	147
题型 1.5 事件的独立性	148
第二章 随机变量及其分布	149
题型 2.1 概率分布的基本概念与性质	149
题型 2.2 求随机变量的分布律、分布函数	150
题型 2.3 利用常见分布计算概率及常见分布的逆问题	152
题型 2.4 随机变量函数的分布	155
第三章 多维随机变量及其分布	157
题型 3.1 二维离散型、连续随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布	157
题型 3.2 二维随机变量函数的分布	161
题型 3.3 随机变量的独立性与相关性	163
题型 3.4 综合题	164
第四章 随机变量的数字特征	167
题型 4.1 数学期望与方差的计算	167
题型 4.2 协方差与相关系数的计算	168
题型 4.3 随机变量的独立性与不相关性	171
题型 4.4 应用题	172
题型 4.5 综合题	174
第五章 大数定律与中心极限定理	180
题型 5.1 切比雪夫不等式	180
题型 5.2 大数定律	180
题型 5.3 中心极限定理	180

数学(三)

第六章 数理统计的基本概念	182
题型 6.1 求统计量的数字特征	182
题型 6.2 求统计量的分布或取值概率	184
第七章 参数估计	188
题型 7.1 求参数的矩估计和最大似然估计	188
题型 7.2 估计量的评价标准	191
题型 7.3 区间估计	192

附录三 参考答案

143	 附录三 参考答案 第一章
143	 附录三 参考答案 1.1 习题
144	 附录三 参考答案 1.2 习题
146	 附录三 参考答案 1.3 习题
147	 附录三 参考答案 1.4 习题
148	 附录三 参考答案 1.5 习题
149	 附录三 参考答案 1.6 习题
149	 附录三 参考答案 1.7 习题
150	 附录三 参考答案 1.8 习题
151	 附录三 参考答案 1.9 习题
152	 附录三 参考答案 1.10 习题
153	 附录三 参考答案 1.11 习题
154	 附录三 参考答案 1.12 习题
155	 附录三 参考答案 1.13 习题
156	 附录三 参考答案 1.14 习题
157	 附录三 参考答案 1.15 习题
158	 附录三 参考答案 1.16 习题
159	 附录三 参考答案 1.17 习题
160	 附录三 参考答案 1.18 习题
161	 附录三 参考答案 1.19 习题
162	 附录三 参考答案 1.20 习题
163	 附录三 参考答案 1.21 习题
164	 附录三 参考答案 1.22 习题
165	 附录三 参考答案 1.23 习题
166	 附录三 参考答案 1.24 习题
167	 附录三 参考答案 1.25 习题
168	 附录三 参考答案 1.26 习题
169	 附录三 参考答案 1.27 习题
170	 附录三 参考答案 1.28 习题
171	 附录三 参考答案 1.29 习题
172	 附录三 参考答案 1.30 习题
173	 附录三 参考答案 1.31 习题
174	 附录三 参考答案 1.32 习题
175	 附录三 参考答案 1.33 习题
176	 附录三 参考答案 1.34 习题
177	 附录三 参考答案 1.35 习题
178	 附录三 参考答案 1.36 习题
179	 附录三 参考答案 1.37 习题
180	 附录三 参考答案 1.38 习题
181	 附录三 参考答案 1.39 习题
182	 附录三 参考答案 1.40 习题
183	 附录三 参考答案 1.41 习题
184	 附录三 参考答案 1.42 习题
185	 附录三 参考答案 1.43 习题
186	 附录三 参考答案 1.44 习题
187	 附录三 参考答案 1.45 习题
188	 附录三 参考答案 1.46 习题
189	 附录三 参考答案 1.47 习题
190	 附录三 参考答案 1.48 习题
191	 附录三 参考答案 1.49 习题
192	 附录三 参考答案 1.50 习题

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

题型 1.1 函数、极限的概念及其特性

一、函数的概念及其特性

1. (1990 年试题) 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是 ()
A. 偶函数 B. 无界函数 C. 周期函数 D. 单调函数

【解题分析】令 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \infty,$$

因此 $f(x)$ 是无界函数, 故应选 B.

2. (2004 年试题) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界? ()
A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

【解题分析】本题考查函数极限与有界性的关系: 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 时, 则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界. 由题设,

$$f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 3}{18}, \quad (1)$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty, \quad (4)$$

由 (1) ~ (4) 式可知, $(0, 1), (1, 2), (2, 3)$ 内 $f(x)$ 都是无界的, 所以选 A.

二、极限概念与性质

1. (2000 年试题) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

()

- A. 存在且等于零
C. 一定不存在

- B. 存在但不一定为零
D. 不一定存在

【解题分析】本题可采取举反例的方法——排除干扰项.

令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2+1}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$, 则 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+1} = 0,$$

但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在, 从而可排除 A, B;

又令

$$\varphi(x) = \arctan(|x|-1), f(x) = \arctan|x|, g(x) = \arctan(|x|+1),$$

则 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$,

因此 C 也可排除. 综上, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 可能存在也可能不存在, 所以选 D.

2. (2007 年试题) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解题分析】因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2^x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2^x (\ln 2)^3} = 0$, 且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 均为有界函数, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3} (\sin x + \cos x) = 0.$$

题型 1.2 函数极限的计算及其逆问题

一、函数极限的计算

1. (1991 年试题) 下列各式中正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

【解题分析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1$.

故应选 A.

2. (1991 年试题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

【解题分析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \\ &= \frac{1+2+\cdots+n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

于是原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$.

3. (1993 年试题) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解题分析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3} \cdot \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} \cdot 2 = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$

故应填 $\frac{6}{5}$.

4. (2004 年试题) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right).$

【解题分析】由题设,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (\sin x \cos x)^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} (\sin 2x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x \cos 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{4}{2} \cos 4x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin 2x)^2}{6x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. (2005 年试题) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解题分析】令 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin y = \lim_{x \rightarrow \infty} x y \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

6. (2005 年试题) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right).$

【解题分析】由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{1} = 1,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - 1 + e^{-x}}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1-e^{-x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

7. (2008 年试题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$

【解题分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

8. (2009 年试题) (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

【解题分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$= \frac{3}{2}e.$$

二、函数极限的逆问题

(2004 年试题) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解题分析】由题设, 知 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 则 $a = 1$,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = 1 - b = 5,$$

则 $b = -4$.

题型 1.3 数列的极限

1. (1990 年试题) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解题分析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}$$

$$= 2.$$

故应填 2.

2. (2002 年试题) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解题分析】由题设,

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}$$

$$3. (2006 \text{ 年试题}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解题分析】令 $u_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}, n = 1, 2, 3, \dots$

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N})$ 时,

$$u_n = \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^1 = 1 + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{n};$$

当 $n = 2k-1 (k \in \mathbf{N})$ 时,

$$u_n = \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^{-1} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

题型 1.4 无穷小量的比较

1. (1992 年试题) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个比其他三个更高阶的无穷小量? ()

A. x^2

B. $1 - \cos x$

C. $\sqrt{1-x^2} - 1$

D. $x - \tan x$

【解题分析】当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$.

即 $1 - \cos x, \sqrt{1-x^2} - 1$ 与 x^2 是同阶无穷小量, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sec x \cdot \tan x}{2} = 0,$$

所以 $x - \tan x$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量, 故应选 D.

2. (2007 年试题) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ()

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$

B. $\ln(1 + \sqrt{x})$

C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$

D. $1 - \cos \sqrt{x}$

【解题分析】常用的等价无穷小(当 $x \rightarrow 0$ 时)有: $e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, \sqrt{1+x} \sim \frac{x}{2},$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \sin x \sim x, \dots$ A 选项 $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, B 选项 $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, C 选项

$\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 \sim \frac{\sqrt{x}}{2}$, D 选项 $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{x}{2}$, 故应选 B.

3. (2009 年试题) (2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

【解题分析】 $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot ax}{-6bx} = \frac{a^3}{-6b} = 1, \text{ 即有 } a^3 = -6b.\end{aligned}$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \cos ax) = 1 - a = 0$, 即 $a = 1$, 代入上式可得 $b = -\frac{1}{6}$.

故正确答案为 A.

题型 1.5 函数的连续性及间断点的分类

1. (1990 年试题) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = b$, 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $A =$ _____.

【解题分析】 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0),$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow 0} [f'(x) + a \cos x] = f'(0) + a \cos 0 = b + a,$$

从而 $A = a + b$.

2. (1992 年试题) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续?

若不连续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义使之连续.

【解题分析】因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{\cos \frac{\pi x}{2}} \\&= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos^2(x-1) - \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

而 $f(1) = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$, 所以函数在 $x = 1$ 处不连续.

若令 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$, 则函数在 $x = 1$ 处连续.

3. (1998 年试题) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为 ()

- A. 不存在间断点
B. 存在间断点 $x = 1$
C. 存在间断点 $x = 0$
D. 存在间断点 $x = -1$

【解题分析】由已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 0$;

当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) = 1+x$; 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 1$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) = 0$.

所以
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 1+x, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

不难确定在 $x = 1$ 点处 $f(x)$ 间断, 选 B.

4. (2003 年试题) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

- A. 在 $x = 0$ 处左极限不存在
B. 有跳跃间断点 $x = 0$
C. 在 $x = 0$ 处右极限不存在
D. 有可去间断点 $x = 0$

【解题分析】由题设, $f(-x) = -f(x)$, 则有 $f(0) = 0$, 从而

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

即 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处极限存在, 但 $x = 0$ 时 $g(x)$ 无定义, 因此可补充定义 $g(0) = f'(0)$, 则 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

综上, $g(x)$ 有可去间断点 $x = 0$, 所以选 D.

5. (2003 年试题) 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, 试补充定义 $f(1)$ 使得

$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续.

【解题分析】由题设, 需补充 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的定义.

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] = \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{\pi(1-x) \sin \pi x},$$

令 $y = 1 - x$, 则当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $y \rightarrow 0^+$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi y - \sin \pi y}{\pi y \sin \pi y} = \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi y - \sin \pi y}{\pi^2 y^2} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi - \pi \cos \pi y}{2\pi^2 y} = \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi^2 \sin \pi y}{2\pi^2} \\ &= \frac{1}{\pi} + 0 = \frac{1}{\pi}, \end{aligned}$$

因此补充定义 $f(1) = \frac{1}{\pi}$, 就使得 $f(x) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续.

6. (2004 年试题) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且

数学(三)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \text{ 则} \quad ()$$

- A. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点
 B. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
 C. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点
 D. $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【解题分析】本题考查连续性及间断点的定义. 由题设, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$. 如果 $a = 0$, 则 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续; 如果 $a \neq 0$, 则 $g(x)$ 在 $x = 0$ 不连续且 $x = 0$ 为第一类间断点. 所以选 D.

7. (2008 年试题) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x = 0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 $()$

- A. 跳跃间断点
 B. 可去间断点
 C. 无穷间断点
 D. 振荡间断点

【解题分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处极限存在, 则 $x = 0$ 是该函数的可去间断点. 故应选 B.

8. (2008 年试题) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c, \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$

【解题分析】函数 $f(x)$ 连续, 则需满足

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x),$$

$$\text{即 } c^2 + 1 = \frac{2}{|c|}, \text{ 解得 } c = \pm 1.$$

又因为 $c \geq |x| \geq 0$, 故 $c = 1$.

9. (2009 年试题) 函数 $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 $()$

- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 无穷多个

【解题分析】当 x 取整数时, 函数 $f(x)$ 均无意义, 故函数 $f(x)$ 有无穷多个间断点.

因为可去间断点为极限存在的点, 所以应是 $x - x^3 = 0$ 的解, 即 $x = 0, \pm 1$.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi},$$

即 $x = 0, \pm 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在. 故可知, 函数 $f(x)$ 有三个可去间断点.