2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

2010nian quanguo shuoshiyanjiusheng ruxuekaoshi linian zhenti jingjie

新大纲
XINDAGANG

数学（三）

童 武 王德军 王 欢◎编著

Shuxue

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年全国硕士研究生入学考试

历年真题精解

数学（三）

童 武　王德军　王 欢　编著

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解.数学.(三)/童武,王德军,王欢编著.
—北京:北京科学技术出版社,2009.5
(2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书)

ISBN 978-7-5304-4159-6

Ⅰ.2… Ⅱ.①童…②王…③王… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第063394号

2010年全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学(三)

作　　者:童 武　王德军　王 欢
责任编辑:朱 琳　李 媛
责任印制:张 良
封面设计:清水设计工作室
出 版 人:张敬德
出版发行:北京科学技术出版社
社　　址:北京西直门南大街16号
邮政编码:100035
电话传真:0086-10-66161951(总编室)
0086-10-66113227(发行部)　0086-10-66161952(发行部传真)
电子信箱:bjkjpress@163.com
网　　址:www.bkjpress.com
经　　销:新华书店
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
字　　数:318千
印　　张:12.75
版　　次:2009年5月第1版
印　　次:2009年5月第1次印刷
ISBN 978-7-5304-4159-6/G·833

定　价:18.00元

前　言

为了指导参加2010年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《2010年全国硕士研究生入学统一考试历年试题精解 数学一》，以供广大考生复习使用。

自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如2006年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一第四大题、2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题、2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题、2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题、2003年数学四的第四大题与2001年数学——的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况，2003年英语第36题与1996年英语第43题，2003年英语第37题与1995年英语第34题，2003年英语第26题与1995年英语第21题，2003年英语第29题与1996年英语第42题，2003年英语第24题与1997年英语第42题，1996年英语第46题与1995年英语第6题等等，都是非常相似的。2003年政治理论第21题与2000年文科政治第31题和1993年理科政治第6题，2003年政治理论第31题与1993年理科政治第32题，2003年政治理论第36题与1995年文科政治第28题和1994年文科政治第29题等等，都是相同或非常相似的。所以，对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

全国硕士研究生入学考试数学科是考查考生的数学功底、思维能力，但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力，包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此，要考好数学，思维能力必须有质的飞跃。数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块，经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识. 无论如何，考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来，数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述，是广大考生备考的指导性文件和根本依据. 考生必须从中全面领会考试精神，尤其是明确考试范围，以便有的放矢. 大纲所要求的知识点或考点，考生一定要熟记在心，不要求的内容，应该跳过，不要浪费精力。

不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络；其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性通法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试

成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，衷心希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

题型 1.1　函数、极限的概念及其特性

一、函数的概念及其特性

1.（1990 年试题）设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是　　（　）

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

【解题分析】 令 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}(n=1,2,3,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\infty,$$

因此 $f(x)$ 是无界函数，故应选 B.

2.（2004 年试题）函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界？　　（　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【解题分析】 本题考查函数极限与有界性的关系：当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 时，则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界. 由题设，

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18},\tag{1}$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{\sin 2}{4},\tag{2}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,\tag{3}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,\tag{4}$$

由(1)～(4)式可知，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$内 $f(x)$ 都是无界的，所以选 A.

二、极限概念与性质

1.（2000 年试题）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$　　（　）

A. 存在且等于零　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

【解题分析】 本题可采取举反例的方法一一排除干扰项.

令 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2+1}, f(x)=x, g(x)=x+\dfrac{1}{x^2+1}$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+1}=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，从而可排除 A,B；

又令

$$\varphi(x)=\arctan(|x|-1), f(x)=\arctan|x|, g(x)=\arctan(|x|+1),$$

则 $$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\ \lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2},$$

因此 C 也可排除. 综上，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 可能存在也可能不存在，所以选 D.

2.(2007 年试题) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

【解题分析】 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln 2)^3}=0$，且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 均为有界函数，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

题型 1.2　函数极限的计算及其逆问题

一、函数极限的计算

1.(1991 年试题) 下列各式中正确的是　(　)

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

【解题分析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1.$

故应选 A.

2.(1991 年试题) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

【解题分析】　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}}$，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}\\&=\frac{1+2+\cdots+n}{n}\\&=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

于是原式 $=e^{\frac{n+1}{2}}$.

3.（1993 年试题）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$______.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}\cdot 2=\dfrac{3}{5}\cdot 2=\dfrac{6}{5}$

故应填$\dfrac{6}{5}$.

4.（2004 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【解题分析】 由题设，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\sin x\cos x)^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\dfrac{1}{4}(\sin 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x\cos 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\dfrac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\dfrac{4}{2}\cos 4x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin 2x)^2}{6x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=\frac{4}{3}.$$

5.（2005 年试题）极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$______.

【解题分析】 令 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$，因为$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，所以

$$原式=\lim_{x\to\infty}x\sin y=\lim_{x\to\infty}xy\lim_{x\to\infty}\frac{\sin y}{y}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2.$$

6.（2005 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

【解题分析】 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=1,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1,$$

所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1-e^{-x})}+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

7.（2008 年试题）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

8.(2009 年试题)(9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} =$ ______

【解题分析】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \mathrm{e} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\cos x - 1}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$

$$= \mathrm{e} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$= \mathrm{e} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{e}.$$

二、函数极限的逆问题

(2004 年试题)若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - a}(\cos x - b) = 5$,则 $a =$ ______,$b =$ ______.

【解题分析】由题设,知 $\lim\limits_{x \to 0}(\mathrm{e}^x - a) = 0$,则 $a = 1$,

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}(\cos x - b) = 1 - b = 5,$$

则 $b = -4$.

题型 1.3 数列的极限

1.(1990 年试题)极限 $\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n + 3\sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}) =$ ______.

【解题分析】$\lim\limits_{n \to \infty}(\sqrt{n + 3\sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + 3\sqrt{n} - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n + 3\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n + 3\sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 3\sqrt{\frac{1}{n}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{n}}}}$$

$$= 2.$$

故应填 2.

2.(2002 年试题)设常数 $a \neq \frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} \ln\left[\dfrac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)}\right]^n =$ ______.

【解题分析】由题设,

$$原式 = \lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}$$

3.(2006 年试题) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} =$ ______.

【解题分析】 令 $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}, n = 1,2,3,\cdots$.

当 $n = 2k(k \in \mathbf{N})$ 时,

$$u_n = \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^1 = 1+\frac{1}{2k} = 1+\frac{1}{n};$$

当 $n = 2k-1(k \in \mathbf{N})$ 时,

$$u_n = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1} = \frac{2k-1}{2k} = 1-\frac{1}{2k} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

题型 1.4 无穷小量的比较

1.(1992 年试题) 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量? ( )

A. x^2　　B. $1-\cos x$　　C. $\sqrt{1-x^2}-1$　　D. $x-\tan x$

【解题分析】 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2}-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$.

即 $1-\cos x, \sqrt{1-x^2}-1$ 与 x^2 是同阶无穷小量,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sec x\cdot\tan x}{2} = 0,$$

所以 $x-\tan x$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量,故应选 D.

2.(2007 年试题) 当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

【解题分析】 常用的等价无穷小(当 $x\to 0$ 时)有: $e^x-1\sim x, \ln(1+x)\sim x, \sqrt{1+x}\sim\frac{x}{2}$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, \sin x\sim x, \cdots$. A 选项 $1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x}$, B 选项 $\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$, C 选项 $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{\sqrt{x}}{2}$, D 选项 $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2}$, 故应选 B.

3.(2009 年试题)(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x) = x-\sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则 ( )

A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$　　B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$　　D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

【解题分析】$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\cdot ax}{-6bx}=\frac{a^3}{-6b}=1,\text{即有 } a^3=-6b.$$

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0}(1-a\cos ax)=1-a=0$，即 $a=1$，代入上式可得 $b=-\dfrac{1}{6}$.

故正确答案为 A.

题型1.5　函数的连续性及间断点的分类

1.（1990 年试题）设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq0,\\ A, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$______.

【解题分析】$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有

$$\lim_{x\to0}F(x)=F(0),$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=A,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}}\lim_{x\to0}[f'(x)+a\cos x]=f'(0)+a\cos0=b+a,$$

从而 $A=a+b$.

2.（1992 年试题）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

【解题分析】因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{-\dfrac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{\cos^2(x-1)}}{-\sin\dfrac{\pi x}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

而 $f(1)=1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$，所以函数在 $x=1$ 处不连续.

若令 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$，则函数在 $x=1$ 处连续.

3.（1998 年试题）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为　（　　）

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=-1$

【解题分析】 由已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $x=1$ 时，$f(x)=1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=0$.

所以
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

不难确定在 $x=1$ 点处 $f(x)$ 间断，选 B.

4.（2003 年试题）设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$　（　　）

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在　　B. 有跳跃间断点 $x=0$

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在　　D. 有可去间断点 $x=0$

【解题分析】 由题设，$f(-x)=-f(x)$，则有 $f(0)=0$，从而
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x),$$

即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，但 $x=0$ 时 $g(x)$ 无定义，因此可补充定义 $g(0)=f'(0)$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上，$g(x)$ 有可去间断点 $x=0$，所以选 D.

5.（2003 年试题）设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

【解题分析】 由题设，需补充 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义.

因为
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x},$$

令 $y=1-x$，则当 $x\to 1^-$ 时，$y\to 0^+$，则
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2 y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi^2\sin\pi y}{2\pi^2}\\&=\frac{1}{\pi}+0=\frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

因此补充定义 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$，就使得 $f(x)=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

6.（2004 年试题）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a,g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则　　（　　）

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【解题分析】本题考查连续性及间断点的定义. 由题设，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a$. 如果 $a=0$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续；如果 $a\neq 0$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 不连续且 $x=0$ 为第一类间断点. 所以选 D.

7.（2008 年试题）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的　　（　　）

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，则 $x=0$ 是该函数的可去间断点. 故应选 B.

8.（2008 年试题）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ______.

【解题分析】函数 $f(x)$ 连续，则需满足

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^-}f(x),$$

即 $c^2+1=\dfrac{2}{|c|}$，解得 $c=\pm 1$.

又因为 $c\geqslant|x|\geqslant 0$　故 $c=1$

9.（2009 年试题）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为　　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

【解题分析】当 x 取整数时，函数 $f(x)$ 均无意义，故函数 $f(x)$ 有无穷多个间断点. 因为可去间断点为极限存在的点，所以应是 $x-x^3=0$ 的解，即 $x=0,\pm 1$.

又 $$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

即 $x=0,\pm 1$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在. 故可知，函数 $f(x)$ 有三个可去间断点.