

普通高等教育规划教材

理论力学

(II)

蔡泰信 和兴锁 编著



普通高等教育规划教材

理论力学



机械工业出版社

全书分为两册。第Ⅰ册包括静力学,运动学,动力学的基本内容;第Ⅱ册为动力学的专题部分,可供不同专业选用。

本书的体系完整,推理严谨,叙述恰当,详简适度,理论联系实际,具有通用性。书中相应知识点处附有思考题,便于学生深入理解并拓展所学知识。章末附有知识结构框图,便于学生系统总结所学知识。章后附有习题和答案,便于教学和自学。

本书可作为高等学校工科各专业的理论力学教材,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学. (Ⅱ)/蔡泰信, 和兴锁编著. —北京: 机械工业出版社, 2004.9

普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-14496-1

I. 理... II. ①蔡...②和... III. 理论力学—高等学校—教材
IV. 031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 045697 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 季顺利 版式设计: 霍永明 责任校对: 李汝庚

封面设计: 姚 毅 责任印制: 施 红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·4.125 印张·158 千字

定价: 11.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书是根据教育部理论力学课程教学基本要求,应机械工业出版社的约请在西北工业大学理论力学课程教学实践和历年来编写出版的理论力学教材的基础上进行编写的。

为了适应 21 世纪本课程的教学需要,我们认真分析和研究了国内外教材的特点,充分利用学生已有的数学和物理学知识,适当提高了教材的起点,部分地改变了本课程原有的体系。力求保持本课程体系的完整性,定理证明和逻辑推理的严谨性;力求思路清晰,叙述恰当,详简适度,富有启发性;注重培养读者分析问题和解决问题的能力,坚持理论联系实际和加强了各专业的通用性。既适用于课堂教学,又便于自学。

本书分为两册。第Ⅰ册包括静力学、运动学和动力学的基本内容,一般中、少学时专业只用第Ⅰ册即可。第Ⅱ册为动力学的专题部分,它包括碰撞、虚位移原理、动力学普遍方程、拉格朗日方程、二自由度系统的振动和刚体动力学等专题,各专业可根据需要选用。全书每章穿插有思考题,每章末附有知识结构框图和习题,书末附有习题答案和中英文名词对照表。引申和加选内容用“*”号标出。

本书可作为高等学校工科各专业的理论力学教材,也可供有关工程技术人员参考。

全书由蔡泰信、和兴锁教授编著,贾振波教授审阅。在编写过程中,曾参阅了兄弟院校的有关教材、专著和文献,并得到许多教师和机械工业出版社的大力支持,在此一并表示感谢。

由于作者的水平有限,书中难免有不妥和疏漏之处,敬请读者批评指正。

作者

主要符号表

a	加速度	I_{xy}	刚体对轴 x 和 y 的惯性积
a_a	绝对加速度	I_{yz}	刚体对轴 y 和 z 的惯性积
a_r	相对加速度	I_{zx}	刚体对轴 z 和 x 的惯性积
a_e	牵连加速度	i_{12}	主动轮 1 对从动轮 2 的传动比
a_k	科氏加速度	k	弹簧的刚度系数, 曲率
a_C	质心加速度	K	质点系的动量
a_n	法向加速度	l	力偶矩, 长度
a_t	切向加速度	l	力偶矩矢
a_{At}	质点 A 的切向加速度	L	拉格朗日函数, 力偶矩
a_{An}	质点 A 的法向加速度	L	合力偶矩矢
a_{MO}^t	动点 M 绕基点 O 相对转动的切向加速度	L_O	力系对简化中心 O 的主矩
a_{MO}^n	动点 M 绕基点 O 相对转动的法向加速度	L_{OQ}	惯性力系对点 O 的主矩
A	自由振动的振幅, 面积	m	质点的质量
C	重心, 速度瞬心	$m_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩
$d\boldsymbol{r}$	实位移	$m_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩矢
$d'W$	元功	$m_x(\boldsymbol{F}), m_y(\boldsymbol{F}), m_z(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对轴 x, y, z 的矩
e	碰撞恢复因数	$m_O(m\boldsymbol{v})$	质点的动量 $m\boldsymbol{v}$ 对点 O 的动量矩
$\boldsymbol{F}$	外力, 作用力, 摩擦力	$m_x(m\boldsymbol{v}), m_y(m\boldsymbol{v}), m_z(m\boldsymbol{v})$	质点对点 O 的动量矩 $m_O(m\boldsymbol{v})$ 在轴 x, y, z 上的投影
F_x, F_y, F_z	作用力 $\boldsymbol{F}$ 在轴 x, y, z 上的投影	M	质点系的质量
f	静滑动摩擦因数, 振动频率	n	$\left(= \frac{\mu}{2m} \right)$ 阻尼系数
f'	动滑动摩擦因数	N	约束反力或约束力
$F_{\max}$	最大静滑动摩擦力	N_x, N_y, N_z	约束反力 N 在轴 x, y, z 上的投影
G	重力	O	坐标系原点
g	重力加速度	p	固有(圆)频率
H_O	质点系对点 O 的动量矩	P	功率
H_x, H_y, H_z	质点系对点 O 的动量矩 H_O 在轴 x, y, z 上的投影	Q	惯性力
i, j, k	沿正交轴 x, y, z 的单位矢量	Q_j	对应于第 j 个广义坐标的广义力
I_x, I_y, I_z	刚体对轴 x, y, z 的转动惯量	Q_e	牵连惯性力

- Q_k 科氏惯性力
 q 载荷集度, 广义坐标
 R 合力, 阻力
 R_x, R_y, R_z 合力 R 在轴 x, y, z 上的投影
 R_Q 惯性力系的主矢
 r 半径
 r 矢径
 s 弧坐标
 S 冲量, 碰撞冲量, 杆的内力
 T 质点系的动能
 T 拉力
 t 时间
 u 质点的速度
 V 质点系的势能
 v 质点的速度
 v_a 绝对速度
 v_e 牵连速度
 v_r 相对速度
 v_C 质心速度
 v_{MO} 动点 M 绕基点 O 相对转动的速度
 W 力的功
 x, y, z 直角坐标
 x_C, y_C, z_C 质心的直角坐标
 z 频率比
 $\omega (\boldsymbol{\omega})$ 角速度(角速度矢), 激振力频率
 ω_a 绝对角速度
 ω_e 牵连角速度
 ω_r 相对角速度
 $\varepsilon (\boldsymbol{\varepsilon})$ 角加速度(角加速度矢)
 ε_a 绝对角加速度
 ε_e 牵连角加速度
 ε_r 相对角加速度
 τ 振动周期, 时间间隔
 ρ 曲率半径, 密度
 φ 初相角
 φ_m 摩擦角
 η 机械效率
 δr 虚位移
 δW 虚功
 β 放大率(放大因数)
 μ 粘滞阻力系数
 ζ 阻尼比
 δ 弹簧变形, 变分符号, 滚阻系数, 对数减缩率
 δ_s 弹簧静变形, 静伸长
 Φ 附加推力

目 录

前言

主要符号表

第四篇 动力学专题

第 15 章 碰撞	1
15.1 碰撞的基本特征	1
15.2 碰撞时的动力学普遍定理	1
15.3 碰撞的恢复因数	3
15.4 碰撞问题举例	5
15.5 碰撞对定轴转动刚体轴承的作用·撞击中心	9
* 15.6 平面运动刚体的碰撞	10
知识结构框图	15
习题	15
第 16 章 虚位移原理	18
16.1 约束和约束方程	18
16.2 虚位移·自由度	20
16.3 虚功·理想约束	22
16.4 虚位移原理	22
* 16.5 广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理	31
知识结构框图	35
习题	36
第 17 章 动力学普遍方程·拉格朗日方程·动力学综合应用举例	41
17.1 动力学普遍方程	41
17.2 拉格朗日方程	45
17.3 拉格朗日方程应用举例	48
17.4 动力学综合应用举例	54
知识结构框图	68
习题	68

第 18 章 二自由度系统的振动	73
18.1 概述	73
18.2 二自由度系统的自由振动	73
18.3 二自由度系统的强迫振动	82
知识结构框图	86
习题	87
第 19 章 刚体动力学	88
19.1 刚体绕相交轴转动的合成	88
19.2 刚体定点运动的运动学	91
19.3 刚体定点运动的欧拉动力学方程	100
19.4 陀螺力矩和陀螺效应	103
19.5 自由刚体一般运动的运动学	106
19.6 自由刚体一般运动的运动微分方程	108
知识结构框图	110
习题	111
附录	114
附录 E 习题答案	114
附录 F 中英文名词对照表	118
Synopsis	121
参考文献	122

Contents

Preface

List of Symbols

Part 4 SPECIAL SUBJECTS OF DYNAMICS

Chapter 15 Collision	1
15.1 Fundamental Characteristics of Collision	1
15.2 Generalized Theorems of Dynamics Applied to Collision Process	1
15.3 Coefficient of Restitution of Collision	3
15.4 Illustrations of Collision Problems	5
15.5 Action of Collision to Rigid Body in Fixed-axis Rotation•Center of Percussion	9
15.6 Collision of Rigid Body in Planar Motion	10
Frame of Knowledge	15
Exercises	15
Chapter 16 Principle of Virtual Displacement	18
16.1 Constraint and Constraint Equation	18
16.2 Virtual Displacement•Degrees of Freedom	20
16.3 Virtual Work•Ideal Constraint	22
16.4 Principle of Virtual Displacement	22
* 16.5 Generalized Coordinats and Principle of Virtual Displacement of Generalized Coordinates Form	31
Frame of Knowledge	35
Exercises	36
Chapter 17 General Equations of Dynamics•Lagrange Equations•Illustrations of the Synthetic Application of Dynamics	41
17.1 General Equations of Dynamics	41
17.2 Lagrange Equations	45
17.3 Illustrations of the Application of Lagrange Equation	48
17.4 Illustrations of the Synthetic Application of Dynamics	54
Frame of Knowledge	68
Exercises	68

Chapter 18	Vibration of the System with Two Degrees of Freedom	73
18.1	Introduction	73
18.2	Free Vibration of the System with Two Degrees of Freedom	73
18.3	Forced Vibration of the System with Two Degrees of Freedom	82
	Frame of Knowledge	86
	Exercises	87
Chapter 19	Dynamics of Rigid Body	88
19.1	Composition of Rotation of Rigid Body about Intersecting Axes	88
19.2	Kinematics of Motion of Rigid Body about a Fixed Point	91
19.3	Euler's Dynamics Equations of Motion of Rigid Body about a Fixed Point	100
19.4	Gyroscopic Moment and Gyroscopic Effect	103
19.5	Kinematics of General Motion of Free Rigid Body	106
19.6	Differential Equations of General Motion of Rigid Body	108
	Frame of Knowledge	110
	Exercises	111
Appendix		114
	Appendix E Key to Exercises	114
	Appendix F Contrastive Table of Chinese-English Terms	118
Synopsis		121
Reference		122

第四篇 动力学专题

第 15 章 碰 撞

碰撞是一种常见的力学现象,可使相撞物体的速度在极短时间内发生突然变化,也是较复杂的动力学问题。球的弹射和反跳、锤锻、打桩、飞行器着陆等都是碰撞的实例。本章首先介绍碰撞的基本特征和假设;然后讲述碰撞时的动力学普遍定理和恢复因数,以及碰撞对定轴转动刚体轴承的作用;最后讨论平面运动刚体的碰撞问题。

15.1 碰撞的基本特征

碰撞过程持续的时间极短,通常用 10^{-3} s 或 10^{-4} s 度量,碰撞物体的速度可产生明显变化。由于,碰撞力极大且变化急剧,难以测量。因此,通常用碰撞力在碰撞时间内的冲量来度量碰撞的强弱。这种冲量称为**碰撞冲量**,它远大于平常力(如重力,弹簧力等)的冲量。

相碰物体要发生变形,从而引起能量的转化。在碰撞过程中,一般伴随有机机械能的损失,它可转化为热能、光能、声能等。碰撞时物体变形和机械能损失的大小与多种因素有关,特别是与物体的材料性质有关。

根据碰撞现象的上述基本特征,研究碰撞问题时,一般作以下两点基本假设:

- (1) 由于碰撞力很大,远大于平常力,故平常力在碰撞过程中的冲量可以忽略不计。
- (2) 碰撞时间非常短促,而速度是有限量,两者的乘积非常小,因此在碰撞过程中,碰撞物体的位移可以忽略不计。

15.2 碰撞时的动力学普遍定理

15.2.1 冲量定理

对于质点系内第 i 个质点 M_i , 假设其质量为 m_i , 碰撞开始和结束瞬时的速

度分别为 $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{u}_i$, 碰撞冲量为 $\mathbf{S}_i$, 则由动量定理, 有

$$m_i \mathbf{u}_i - m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{S}_i \quad (15-1)$$

把对质点系内各质点列写出的如上方程相加, 注意到质点系内部各质点之间相互碰撞的内碰撞冲量总是大小相等, 方向相反, 成对地存在, 在总和中相互抵消, 因此只剩下外碰撞冲量, 于是得

$$\sum m \mathbf{u} - \sum m \mathbf{v} = \sum \mathbf{S} \quad (15-2)$$

式(15-2)表示了碰撞时质点系的冲量定理。即质点系在碰撞过程中的动量变化, 等于该质点系所受的外碰撞冲量的矢量和。

质点系的动量可以用质点系的总质量 M 与质心速度的乘积来计算, 所以式(15-2)可改写为

$$M \mathbf{u}_C - M \mathbf{v}_C = \sum \mathbf{S} \quad (15-3)$$

式中 $\mathbf{v}_C$ 和 $\mathbf{u}_C$ 分别是碰撞开始和结束瞬时质点系质心 C 的速度。

上式称为碰撞时的质心运动定理。

15.2.2 冲量矩定理

根据研究碰撞问题的基本假设, 在碰撞过程中, 质点系内各质点的位移均可忽略, 因此, 可用同一矢径 $\mathbf{r}_i$ 表示质点 M_i 在碰撞开始和结束瞬时的位置(图 15-1)。以 $\mathbf{r}_i$ 与式(15-1)作矢乘, 得

$$\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i$$

或者写成

$$m_O(m_i \mathbf{u}_i) - m_O(m_i \mathbf{v}_i) = m_O(\mathbf{S}_i)$$

这里 $m_O(m_i \mathbf{v}_i)$ 和 $m_O(m_i \mathbf{u}_i)$ 分别代表质点 M_i 在碰撞开始和结束瞬时对点 O 的动量矩; $m_O(\mathbf{S}_i)$ 代表碰撞冲量 $\mathbf{S}_i$ 对点 O 的矩。把对质点系内各质点列写出的如上方程相加, 注意到内碰撞冲量总是成对地作用于质点系, 每一对内碰撞冲量对任一点的矩的矢量和恒等于零, 因而全部内碰撞冲量之矩的总和也恒等于零。所以只剩下外碰撞冲量的矩; 于是得

$$\sum m_O(m \mathbf{u}) - \sum m_O(m \mathbf{v}) = \sum m_O(\mathbf{S}) \quad (15-4)$$

把上式投影到任一轴 x 上, 则得

$$\sum m_x(m \mathbf{u}) - \sum m_x(m \mathbf{v}) = \sum m_x(\mathbf{S}) \quad (15-5)$$

式(15-4)和式(15-5)分别表示了碰撞时质点系对点(或对轴)的冲量矩定理, 即在碰撞过程中, 质点系对任一点(或任一轴)的动量矩的变化, 等于该质点系所受外碰撞冲量对同一点(或同一轴)之矩的矢量和(或代数和)。

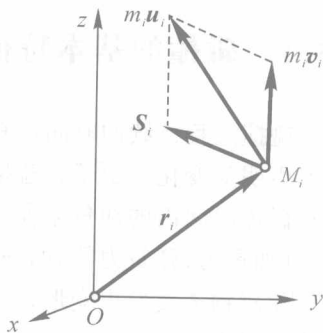


图 15-1

由于碰撞过程中伴随有机能损失, 因此研究碰撞问题一般不用动能定理。

15.3 碰撞的恢复因数

碰撞过程可以分为两个阶段, 由两物体开始接触到两者沿接触面公法线方向相对接近的速度降到零时为止, 这是变形阶段。此后, 物体由于弹性而部分或完全恢复原来的形状, 两物体重新在公法线方向获得分离速度, 直到脱离接触为止, 这就是恢复阶段。恢复的程度主要取决于相撞物体的材料性质, 但也和碰撞的条件(包括物体的质量、形状和尺寸, 物体法向相对速度的大小, 以及相撞物体的相对方位等)有关。

碰撞可以这样分类: 当两物体碰撞时, 通过其接触点作一公法线 $n-n$ (图 15-2), 按两碰撞物体的质心 C_1 和 C_2 是否都位于公法线 $n-n$ 上分类, 当两质心位于此公法线上时称为对心碰撞, 否则称为偏心碰撞。按两碰撞物体接触点的相对速度是否沿该点处的公法线分类, 接触点的相对速度沿公法线的碰撞, 称为正碰撞, 否则称为斜碰撞。不失一般性, 下面以两个光滑球对心斜碰撞的情形为例, 介绍恢复因数的概念。

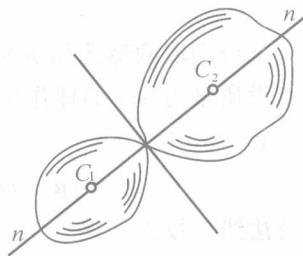


图 15-2

设质量分别为 m_1 和 m_2 的两个光滑球作平动, 在某瞬时发生对心斜碰撞。假设碰撞开始时, 两球的速度分别为 v_1 和 v_2 (图 15-3a), 碰撞结束时, 两球仍作平动, 其速度分别为 u_1 和 u_2 (图 15-3b)。

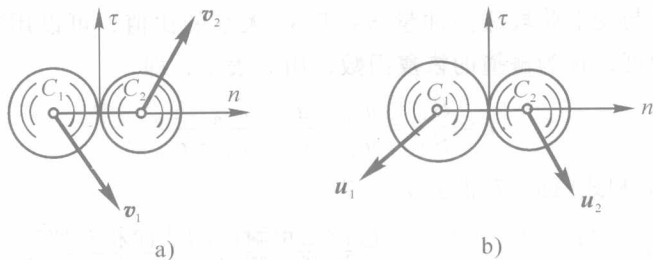


图 15-3

首先以两球为研究对象。考察整个碰撞过程, 因外碰撞冲量等于零, 故由冲量定理, 有

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

沿公法线上投影, 得

$$m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \quad (15-6)$$

然后考察碰撞的第一个阶段(变形阶段)。以两球为研究对象, 用 u 表示第一阶段结束时两球的公共速度。因外碰撞冲量等于零, 系统的动量守恒, 由冲量定理, 有

$$(m_1 + m_2)u - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$$

沿公法线上投影, 得

$$(m_1 + m_2)u_n - (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}) = 0$$

从而求出

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} \quad (15-7)$$

又分别取两球为研究对象。因为接触面光滑, 所以碰撞冲量沿公法线的方向。设质量为 m_1 的球作用于质量为 m_2 的球上的碰撞冲量为 S_I , 则由冲量定理, 有

$$m_1 u - m_1 v_1 = -S_I; \quad m_2 u - m_2 v_2 = S_I$$

沿公法线上投影, 得

$$m_1 u_n - m_1 v_{1n} = -S_I; \quad m_2 u_n - m_2 v_{2n} = S_I$$

现在考察碰撞的第二个阶段(恢复阶段)。假设这个阶段相应的碰撞冲量为 S_{II} , 则对两球分别利用冲量定理, 有

$$m_1 u_1 - m_1 u = -S_{II}; \quad m_2 u_2 - m_2 u = S_{II}$$

沿公法线上投影, 则有

$$m_1 u_{1n} - m_1 u_n = -S_{II}; \quad m_2 u_{2n} - m_2 u_n = S_{II}$$

恢复阶段与变形阶段碰撞冲量 S_I 和 S_{II} 大小的比值, 可以用来度量碰撞后变形恢复的程度, 称为碰撞的恢复因数, 用 e 表示, 即

$$e = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u_{1n} - u_n}{u_n - v_{1n}} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_n - v_{2n}}$$

利用式(15-6)和式(15-7)消去 u_n , 得

$$e = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \left| \frac{\text{碰撞结束瞬时的法向相对速度}}{\text{碰撞开始瞬时的法向相对速度}} \right| \quad (15-8)$$

可以证明, 对于一般碰撞, 恢复因数

$$e = \left| \frac{\text{碰撞结束瞬时接触点的法向相对速度}}{\text{碰撞开始瞬时接触点的法向相对速度}} \right| \quad (15-9)$$

大量的实验表明, 恢复因数主要与碰撞物体的材料性质有关, 可由实验测定。几种材料的恢复因数见表 15-1。

表 15-1

相碰物体材料	铁对铅	木对胶木	木对木	钢对钢	铁对铁	玻璃对玻璃
恢复因数	0.14	0.26	0.50	0.56	0.66	0.94

恢复因数一般都小于1而大于零,这时的碰撞称为**弹性碰撞**。物体在弹性碰撞结束时,变形不能完全恢复,动能有损失。理想情况 $e=1$ 时,碰撞结束后,物体能完全恢复原来的形状,这种碰撞称为**完全弹性碰撞**。在另一极端情况 $e=0$ 时,说明碰撞没有恢复阶段,即物体的变形不能恢复,碰撞结束于变形阶段,这种碰撞称为**非弹性碰撞**或**塑性碰撞**。

15.4 碰撞问题举例

求解包含碰撞的动力学问题时,应明确分清三个阶段,即碰前阶段、碰撞阶段和碰后阶段。碰前和碰后两个阶段应按照动力学常规问题处理;而对碰撞阶段,则应根据碰撞的特点进行分析和计算。

例 15-1 两个小球的质量分别为 m_1 和 m_2 , 沿着两球中心连线的方向运动如图 15-4 所示, 速度分别是 v_1 和 v_2 。假设 $v_1 > v_2$, 因而后球在某瞬时赶上前球而发生碰撞。恢复因数为 e , 试求碰撞后两球的速度和碰撞过程中动能的损失。

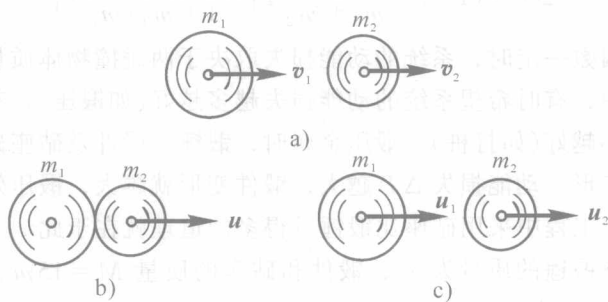


图 15-4

解 本题中两个小球所发生的碰撞为对心正碰撞。考虑两个小球组成的系统, 设碰撞结束时, 两球的速度分别为 u_1 和 u_2 。整个碰撞过程中, 系统的外碰撞冲量等于零, 故由冲量定理, 有

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

根据恢复因数定义式(15-8), 此时有

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (2)$$

联立式(1)、式(2), 解得

$$u_1 = v_1 - (1+e) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (3)$$

$$u_2 = v_2 - (1+e) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1) \quad (4)$$

设碰撞前、后系统的动能分别为 T_1 和 T_2 ，则碰撞过程中系统的动能损失为

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T_2 \\ &= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \end{aligned}$$

将式(3)、式(4)代入上式，经过化简得两个物体在对心正碰撞过程中的动能损失为

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (5)$$

由上式可见，在其他条件相同的情况下，恢复因数 e 越小，碰撞损失的动能越大。对于塑性碰撞， $e=0$ ，碰撞损失的动能最大，而对于完全弹性碰撞， $e=1$ ，系统的动能没有损失。

当一个运动的物体与一个静止的物体发生正碰撞时，假设 $v_2=0$ ，则 $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ，于是由式(5)有

$$\Delta T = (1 - e^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1 - e^2}{1 + m_1/m_2} T_1 \quad (6)$$

可见，当恢复因数一定时，系统的动能损失取决于两碰撞物体质量的比值。

工程实际中，有时希望系统的动能损失越多越好(如锻压)，有时则希望系统的动能损失越小越好(如打桩)。锻压金属时，锻锤与锻件及砧座碰撞时损失的动能用来使锻件变形。动能损失 ΔT 越大，锻件变形就越大，锻压效率就越高，故应使 $m_2 \gg m_1$ 。工程中采用砧座比锻锤重得多的道理就在于此。

例如：假设锻锤的质量为 m ，锻件和砧座的质量 $M=15m$ ，恢复因数 $e=0.6$ ，则锤锻的效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\text{碰撞过程中系统动能的损失}}{\text{碰撞开始时系统的动能}} = \frac{\Delta T}{T_1} \\ &= \frac{1 - e^2}{1 + m/M} = \frac{1 - 0.6^2}{1 + 1/15} = 0.6 \end{aligned}$$

e 值越小， η 就越大。当锻件炽热时， $e \approx 0$ ，此时

$$\eta = \frac{M}{m + M} = \frac{15}{1 + 15} = 0.94$$

可见效率明显提高，要“趁热打铁”，以便有效地利用这时材料的可塑性就是这个道理。

打桩时, 锤与桩碰撞后, 应使桩获得较大的动能, 以便克服阻力而迅速下沉。动能损失越小, 打桩的效率就越高, 故应使 $m_2 \ll m_1$ 。因此, 在工程中要用比桩柱重得多的锤打桩。例如: 假设打桩机锤头的质量为 m_1 , 桩柱的质量 $m_2 = m_1/10$, 恢复因数 $e = 0$, 则打桩的效率为

$$\eta = \frac{\text{碰撞结束时系统剩余的动能}}{\text{碰撞开始时系统的动能}} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1}$$

$$= 1 - \frac{\Delta T}{T_1} = 1 - \frac{1}{1 + m_1/m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + 1/10} = 0.91$$

例 15-2 小球 A 的质量 $m_A = 0.5 \text{ kg}$, 悬线长 $l = 1.2 \text{ m}$, 自图 15-5a 所示水平位置无初速释放, 当悬线转到图 15-5b 所示铅垂位置时, 小球 A 与质量 $m_B = 1.5 \text{ kg}$ 的静止物块 B 发生弹性碰撞。碰撞结束后悬线可摆回到与铅垂线成偏角 $\theta = 15^\circ$ 的位置, 而物块 B 沿水平面向前移动了距离 $s = 1.1 \text{ m}$ 而停止。试求小球与物块碰撞的恢复因数, 以及物块与水平面间的滑动摩擦因数。

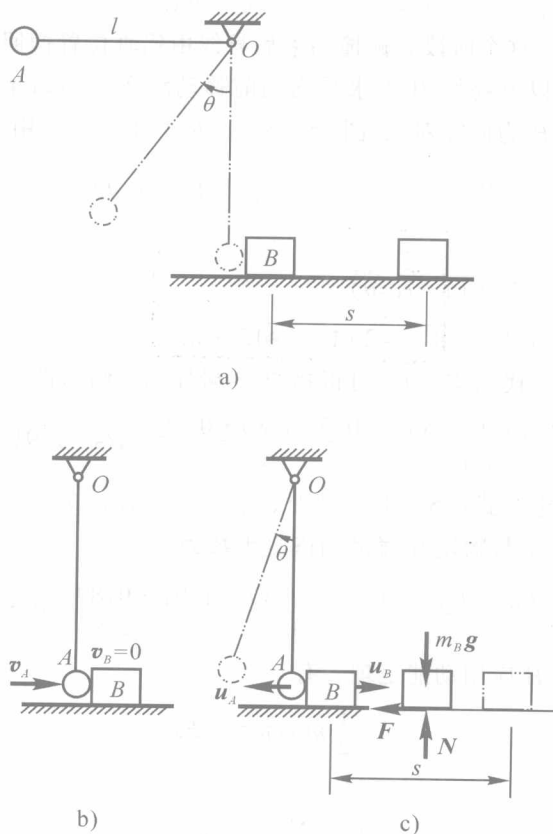


图 15-5