JS

丁保荣 主编

本书另配《初中数学竞赛解题手册（七年级）》

# 初中数学竞赛教程

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG

## 七年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ 初中数学竞赛教程　七年级
★ 初中数学竞赛教程　八年级
★ 初中数学竞赛教程　九年级
★ 初中数学竞赛教程　综合分册

★ 初中数学竞赛解题手册　七年级
★ 初中数学竞赛解题手册　八年级
★ 初中数学竞赛解题手册　九年级
★ 初中数学竞赛解题手册　综合分册

ISBN 978-7-308-06652-5
9 787308 066525 >
定价：28.00元

本书配《初中数学竞赛解题手册(七年级)》

# 初中数学竞赛教程

## 七年级

主　编　丁保荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学竞赛教程. 七年级/丁保荣主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.4
ISBN 978-7-308-06652-5

Ⅰ.初… Ⅱ.丁… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 036971 号

**初中数学竞赛教程(七年级)**

丁保荣　主编

---

**责任编辑**　石国华
**文字编辑**　张　鸽
**封面设计**　刘依群
**出版发行**　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
**排　　版**　杭州大漠照排印刷有限公司
**印　　刷**　杭州浙大同力教育彩印有限公司
**开　　本**　787mm×960mm　1/16
**印　　张**　19.25
**字　　数**　406 千
**版 印 次**　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 6 月第 2 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-308-06652-5
**定　　价**　28.00 元

---

# 前　言

人们希望更好、更快、更强，所以就出现了各种竞技活动，像奥林匹克运动会。数学，作为锻炼思维的体操，一门可以充分展现头脑灵活度的学科，理所当然地被选择用来比试人们的思维、创新能力，于是乎出现了数学奥林匹克，即数学竞赛。

由于在激发青少年学习数学兴趣，培养刻苦学习精神，促进和提高数学教学水平及在发现科技人才、培养科技后备力量中所发挥的巨大作用，数学竞赛如春阳之草，生机勃发，并取得了令人欣慰的成绩。我国自从参加国际数学奥林匹克以来，每年都取得佳绩，始终保持在前几名。中国选手的优异表现为祖国赢得了巨大荣誉。在国内历届中、小学数学竞赛中涌现出的大批优秀青少年选手，他们大部分在以后的学习、科研和生产中崭露头角，取得了骄人的业绩。

在目前数学竞赛的良好发展氛围下，考虑到广大教师和学生的迫切需要，我们按新课标初中数学教材的进度分七、八、九年级编写了这套《初中数学竞赛教程》。题目精选自国内外竞赛卷，编者是多年从事数学竞赛工作的中学高级教师，所编选的题目无论从时效性、实践性，还是从指导性来说都是很好的。

本套丛书根据初中数学竞赛大纲及各年级课本内容，同步分 30 讲（九年级 29 讲），每讲设【赛点扫描】、【赛题解密】、【赛场演练】三个栏目。【赛点扫描】描述了本讲内容的相关赛点，点拨了命题思路，有利于掌握解题方法；【赛题解密】巧妙应用技法，让赛题全面解密；【赛场演练】跳出常规思路，演练竞赛精题。

为了方便读者自学，我们分年级编写了《解题手册》。《竞赛教程》中【赛场演练】栏目的题目只提供简单答案，而在相应的《解题手册》中提供了详细解答。如果将《解题手册》与《竞赛教程》配套使用，收效一定更佳。

参加本书编写的有：方利生、何星天、金旭颖、朱晓燕、陈志强、王菊清、沈文革、凌任涛、徐善海、董烈佳、张小梅、张喜凤、金友素。

丁保荣

2009 年 3 月

# 目录 CONTENTS

# 第 1 讲　质数与合数

## 赛点扫描

一个大于 1 的正整数，若除了 1 与它自身，再没有其他的约数，这样的正整数叫做质数；一个大于 1 的正整数，若除了 1 与它自身，还有其他的约数，这样的正整数称为合数. 这样，我们可以按约数个数将正整数分为三类：

$$正整数\begin{cases}单位\ 1\\质数\\合数\end{cases}$$

质数、合数有下列常用的性质：

1. 1 不是质数，也不是合数；2 是惟一的偶质数.
2. 若质数 $p \mid ab$，则必有 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.
3. 若正整数 $a$ 与 $b$ 的积是质数 $p$，则必有 $a = p$ 或 $b = p$.

## 赛题解密

**例 1**　（第 16 届希望杯竞赛题）一个两位数的个位数字和十位数字变换位置后，所得的数比原来的数大 9，这样的两位数中，质数有(　　).

A. 1 个　　B. 3 个　　C. 5 个　　D. 6 个

**【解密】** 字母表示数，从分析这样两位数的特征入手.

**【解】** 设满足条件的两位数是$\overline{ab}$，由 $\overline{ba} - \overline{ab} = 9$，得 $10b + a - (10a + b) = 9$，$b = a + 1$，满足 $b = a + 1$ 的两位数有 12，23，34，45，56，67，78，89，其中质数有 23，67，89，共 3 个，故选 B.

**例 2**　（第 15 届江苏省竞赛题）已知三个不同的质数 $a$，$b$，$c$ 满足 $ab^bc + a = 2000$，那么 $a + b + c =$ ________.

**【解密】** 运用乘法分配律、算术基本定理，从因数分解入手，突破 $a$ 的值.

**【解】** 由已知得 $a(b^bc + 1) = 2^4 \times 5^3$，$\because$ $a$，$b$，$c$ 是质数，$\therefore$ $a = 2$ 或 $a = 5$：① 当 $a = 2$ 时，$b^bc = 999 = 3^3 \times 37$，$\therefore$ $b = 3$，$c = 37$，$\therefore$ $a + b + c = 42$；② 当 $a = 5$ 时，$b^bc =$

$399=3\times133=3\times7\times19$(不合舍去).故 $a+b+c=42$.

**例 3** (第11届迎春杯初赛题)如果正整数 $p$, $q$ 都是质数,并且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数,那么 $p=$________.

**【解密】** 由质数的性质知 $pq+11$, $7p+q$ 均为奇数,因此 $pq$ 为偶数.则 $p=2$ 或 $q=2$.然后按剩余类的方法进行讨论.

**【解】** 因为 $p$,$q$ 为正整数且为质数,所以 $pq+11$ 为奇质数,则 $pq$ 为偶数,则 $p$, $q$ 必有一个为2.

若 $p=2$,则 $2\times7+q=14+q$, $2q+11$ 均为质数.

当 $q=3k+1$ 时, $14+q=3k+15=3(k+5)$ 不是质数;

当 $q=3k+2$ 时, $2q+11=2(3k+2)+11=3(2k+5)$ 不是质数;

因此 $q=3k$ 且 $q$ 为质数,故 $q=3$.即当 $p=2$ 时, $q=3$.同理可得:当 $q=2$ 时, $p=3$.

**例 4** (1994年小学数学奥林匹克初赛)如果某整数同时具备下列性质:

(1) 这个数与1的差是质数;

(2) 这个数除以2所得的商也是质数;

(3) 这个数除以9所得的余数是5.

我们称这个整数为幸运数,那么在两位数中,最大的幸运数是________.

**【解】** 先看条件(1).因为除2外,其余的质数都是奇数,也就是这个数与1的差是2或是奇数,这个数只能是3或者是偶数.再根据条件(3),除以9余5,在两位的偶数中只有14, 32, 50, 68, 86这五个数满足条件.

其中86与50不符合(1), 32与68不符合(2),三个条件都符合的只有14.

因此,这个数是14.

**【探密】** 这道题中有三个条件,我们不一定按照题中的次序来考虑,应该先考虑"限定的对象少"的条件.

条件(1)限定在所有质数加1的这些数;条件(2)限定在质数乘以2的这些数;只有条件(3)限定的数少,因此,从条件(3)入手.

**例 5** (第五届"华罗庚金杯"少年数学邀请赛复赛)把37拆成若干个不同的质数之和,有多少种不同的拆法?将每一种拆法所拆出的那些质数相乘,得到的乘积中,哪个最小?

**【解】** 
$$\begin{aligned}37&=3+5+29\\&=2+5+7+23=3+11+23\\&=2+3+13+19=5+13+19\\&=7+11+19=2+5+11+19\end{aligned}$$

$=7+13+17=2+5+13+17$
$=2+7+11+17$.

所以共有 10 种不同拆法. 其中 $3\times5\times29=435$ 最小.

**【探密】** 本题属于迄今尚无普遍处理办法的问题,只能是硬凑. 比 37 小的最大质数是 31,但 $37-31=6$,6 不能拆分为不同的质数之和,故不取;再下去比 37 小的质数便是 29,$37-29=8$,而 $8=3+5$. 其余的拆分考虑与此类似.

**例 6** (上海市竞赛题)求这样的质数,当它加上 10 和 14 时,仍为质数.

**【解密】** 由于质数的分布不规则,不妨从最小的质数进行实验,但这样的质数惟一吗? 还需按剩余类的方法进行讨论.

**【解】** 当 $p=3k+1$ 时,$p+10=3k+11$,$p+14=3(k+5)$,显然 $p+14$ 是合数;当 $p=3k+2$ 时,$p+10=3(k+4)$ 是合数;当 $p=3k$ 时,只有 $k=1$ 才符合题意. 故 $p=3$ 符合要求.

**例 7** (第 18 届江苏省竞赛题)(1) 将 1, 2, …, 2004 这 2004 个数随意排成一行,得到一个数 $N$,求证:$N$ 一定是合数.

(2) 若 $n$ 是大于 2 的正整数,求证:$2^n-1$ 与 $2^n+1$ 中至多有一个是质数.

(3) 求 360 的所有正约数的倒数和.

**【解密】** (1) 将 1 到 2004 随意排成一行的数有很多,不可能一一排出,不妨找出无论怎样排,所得数都有非 1 和本身的约数;

(2) 只需说明 $2^n-1$ 与 $2^n+1$ 中必有一个是合数,不能同为质数即可;

(3) 逐个求出 360 的正约数太繁,考虑整体求解.

**【解】** (1) 因 $1+2+\cdots+2004=\frac{1}{2}\times2004\times(1+2004)=1002\times2005$ 为 3 的倍数,故无论怎样交换这 2004 个数的顺序,所得数都有 3 这个约数.

(2) 因 $n$ 为大于 2 的正整数,则 $2^n-1\geqslant7$,而 $2^n-1$, $2^n$, $2^n+1$ 是不小于 7 的三个连续的正整数,其中必有一个被 3 整除,但 $3\nmid 2^n$.

(3) 设正整数 $a$ 的所有正约数之和为 $b$. $d_1$, $d_2$, $d_3$, …, $d_n$ 为 $a$ 的所有正约数从小到大的排列,于是 $d_1=1$, $d_n=a$. 由于 $S=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\cdots+\frac{1}{d_n}$ 中各分数分母的最小公倍数 $d_n=a$,故 $S=\frac{d_n}{d_n}+\frac{d_{n-1}}{d_n}+\cdots+\frac{d_1}{d_n}=\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{d_n}=\frac{b}{a}$,而 $a=360=2^3\times3^2\times5$,故 $b=(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=1170$,$\frac{b}{a}=\frac{1170}{360}=3\frac{1}{4}$.

**例 8** (第五届加拿大数学奥林匹克试题)如果 $p$ 与 $p+2$ 都是大于 3 的质数,那

么请证明：6 是 $p+1$ 的约数.

**【解密】** 每一整数可以写成 $6n$，$6n-1$，$6n+1$，$6n-2$，$6n+2$，$6n+3$ 中的一种($n$ 为整数)，其中 $6n$，$6n-2$，$6n+2$，$6n+3$ 在 $n\geqslant 1$ 时都是合数，分别被 6,2,2,3 整除. 因此，质数 $p$ 是 $6n-1$ 或 $6n+1$ 的形式.

**【解】** 如果 $p=6n+1(n\geqslant 1)$，那么

$$p+2=6n+3=3(2n+1)$$

是 3 的倍数，而且大于 3，所以 $p+2$ 不是质数，与已知条件矛盾.

因此 $p=6n-1(n\geqslant 1)$. 这时

$$p+1=6n,$$

所以 $p+1$ 是 6 的倍数.

**【探密】** 本题是将整数按照除以 6 所得的余数分为 6 类.

质数一定是 $6n+1$ 或 $6n-1$ 的形式. 当然，反过来，形如 $6n-1$ 或 $6n+1$ 的数并不都是质数. 但可以证明形如 $6n-1$ 的质数有无穷多个，形如 $6n+1$ 的质数也有无穷多个.

猜测有无穷多个正整数 $n$，使 $6n-1$ 与 $6n+1$ 同为质数. 这是孪生质数猜测，至今尚未解决.

能否整除，是整数中常见的问题.

**例 9** (2005 年俄罗斯萨温市竞赛题)$a$ 和 $b$ 是两个自然数，对它们有以下四个描述：① $a+1$ 能被 $b$ 整除；② $a=2b+5$；③ $a+b$ 能被 3 整除；④ $a+7b$ 是质数.

不过这四个描述中只有三个是正确的，有一个是错误的，试求出 $a$ 和 $b$ 的所有可能解.

**【解密】** 在 $a$，$b$ 未确定的情况下，$a$ 与 $b$ 的关系难判断，但 $a+7b$ 与 $a+b$ 有关联，这是解本例的突破口.

**【解】** 如果 $a+b$ 能被 3 整除，那么 $a+7b=(a+b)+6b$ 也能被 3 整除，这与 $a+7b$ 为质数是矛盾的. 所以在③或④中必有一个是错误的，而①和②一定正确. 因为 $a+b=2b+5+b=3b+5$ 是不能被 3 整除的，说明③是有错的. 所以 $a+1=2b+6$ 能被 $b$ 整除. 这就是说 $b=1$，2，3 或 6，从而 $a=2b+5=7,9,11$ 或 17. 因为 $a+7b$ 是质数，所以答案是 $b=2$，$a=9$，或者是 $b=6$，$a=17$.

## 赛场演练

1. (“希望杯”竞赛题)当 $x$ 取 1 到 10 之间的质数时，四个式子：$x^2+2$，$x^2+4$，$x^2+6$ 和 $x^2+8$ 的值中，共有质数(　　)个.

A. 6 B. 9 C. 12 D. 16

2. (第 17 届五羊杯竞赛题)以下关于质数和合数的 4 种说法中,准确的说法共有(  )种.
① 两个质数的和必为合数;② 两个合数的和必为合数;③ 一个质数与一个合数的和必为合数;④ 一个质数与一个合数的和必为非合数.

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

3. (黄冈市竞赛题)若 $p$ 为质数,$p^3+5$ 仍为质数,则 $p^5+7$ 为(  ).

A. 质数 B. 可为质数也可为合数

C. 合数 D. 既不是质数也不是合数

4. (五羊杯竞赛题)$n$ 不是质数,$n$ 可以分解为 2 个或多于 2 个质因数的积,每个质因数都大于 10,$n$ 最小值等于________.

5. (2002 年四川省竞赛题)立方体的每一个面都写着一个自然数,并且相对两个面所写两个数之和相等,10,12,15 是相邻三面上的数,若 10 的对面写的是质数 $a$,12 的对面写的是质数 $b$,15 的对面写的是质数 $c$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值等于________.

6. (第 15 届希望杯竞赛题)已知 $p$,$q$,$pq+1$ 都是质数,且 $p-q>40$,那么满足上述条件的最小质数 $p=$________,$q=$________.

7. (希望杯竞赛题)若 $a$,$b$,$c$ 是 1998 的三个不同的质因数,且 $a<b<c$,则 $(b+c)^a=$ ________.

8. (第 16 届江苏省初中数学竞赛题)已知 $a$ 是质数,$b$ 是奇数,且 $a^2+b=2001$,则 $a+b=$________.

9. (上海市竞赛题)写出 10 个连续自然数,它们个个都是合数,这 10 个数是________.

10. (江苏省第 21 届初中数学竞赛题)若 $p$ 和 $q$ 为质数,且 $5p+3q=91$,则 $p=$ ________,$q=$________.

11. (1998 年北京市竞赛题)若 $y$,$z$ 均为质数,$x=yz$,且 $x$,$y$,$z$ 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{z}$,则 $1998x+5y+3z$ 的值为________.

12. (第 18 届五羊杯竞赛题)如果 $A$,$B$,$C$ 是三个质数,而且 $A-B=B-C=14$,那么 $A$,$B$,$C$ 组成的数组 $(A, B, C)$ 共有________组.

13. (第 15 届希望杯竞赛题)若正整数 $x$,$y$ 满足 $2004x=15y$,则 $x+y$ 的最小值是 ________.

14. (希望杯竞赛题)已知三个质数 $m$,$n$,$p$ 的乘积等于这三个质数的和的 5 倍,则 $m^2+n^2+p^2$ 的值为________.

15. (2004 年全国初中数学联赛题)设 $m$ 是不能表示为三个互不相等的合数之和的最大整数,则 $m=$________.

16. （第 15 届俄罗斯数学节日竞赛题）万尼亚想了一个三位质数，各位数字都不相同. 如果个位数字等于前两个数字的和，那么这个数是________.

17. （1997 年五羊杯竞赛题）已知 $p$, $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+14$ 都是质数，则这样的质数 $p$ 共有多少个？

18. （1997 年迎春杯竞赛题）若 $p$ 和 $q$ 都是质数，并且关于 $x$ 的一元一次方程 $px+5q=97$ 的根是 1，求 $p^2-q$ 的值.

19. （首届华杯赛试题）已知 $p$ 是质数，且 $2006-p$ 也是质数. 若 $(2006-p)$ 乘 $(2006+p)$ 的积等于自然数 $k$. 求 $k$ 的最大值.

20. （第五届加拿大数学竞赛题）求证：如果 $p$ 与 $p+2$ 都是大于 3 的质数，那么 6 是 $p+1$ 的因数.

21. (首届华杯赛试题)数学老师做了一个密码给同学们破解,密码是$PQRQQS$,相同字母代表相同的数字,不同字母代表不同的数字. 已知这 6 个数字之和等于 31,且: $P$ 是任何整数的约数(因子);$Q$ 是合数;$R$ 被任何一个数去除,答案都会一样;$S$ 是质数. 这个密码是什么?

22. (希望杯竞赛题)某书店积存了画片若干张,每张按 5 角出售,无人买,现决定按成本价出售,一下子全部售出,共卖了 31 元 9 角 3 分,问: 共积压了多少张画片?

23. (五城市联赛题)在黑板上写出下面的数 2, 3, 4, …, 1994,甲先擦去其中的一个数,然后乙再擦去一个数,如此轮流下去,若最后剩下的两个数互质,则甲胜;若最后剩下的两个数不互质,则乙胜. 你觉得是甲胜还是乙胜? 请你说明理由.

24. (安徽省竞赛题)甲、乙、丙 3 人分糖,每人都得整数块,乙比丙多得 13 块,甲所得是乙的 2 倍. 已知糖的总块数是一个小于 50 的质数,且它的各位数字之和为 11. 试求每人得糖的块数.

25. （首届华杯赛试题）已知 $x$，$y$，$z$ 是 3 个小于 100 的正整数，且 $x>y>z$，$x-y$，$x-z$ 及 $y-z$ 均是质数，求 $x-z$ 的最大值.

26. （湖北省荆州市竞赛题）已知正整数 $p$，$q$ 都是质数，且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数，试求 $p^q+q^p$ 的值.

27. （2006 年国际城市竞赛题）小琳用计算器求三个正整数 $a$，$b$，$c$ 的表达式 $\dfrac{a+b}{c}$ 的值. 她依次按了 $a$，$+$，$b$，$\div$，$c$，$=$，得到数值 11. 而当她依次按 $b$，$+$，$a$，$\div$，$c$，$=$ 时，惊讶地发现得到的数值是 14. 这时她才明白计算器是先做除法再做加法的，于是她依次按（，$a$，$+$，$b$，），$\div$，$c$，$=$，得到了正确的结果. 这个正确结果是什么？

28. （北京市竞赛题）41 名运动员所穿运动衣号码是 1，2，3，…，40，41 这 41 个自然数，问：

(1) 能否使这 41 名运动员站成一排，使得任意两个相邻运动员的号码之和是质数？

(2) 能否让这 41 名运动员站成一圈，使得任意两个相邻运动员的号码之和都是质数？

若能办到，请举一例；若不能办到，请说明理由.

29. (荆州市竞赛题)用正方形的地砖不重叠、无缝隙地铺满一块地，选用边长为 $x$ cm 规格的地砖，恰用 $n$ 块；若选用边长为 $y$ cm 规格的地砖，则要比前一种刚好多用 124 块. 已知 $x$, $y$, $n$ 都是正整数，且 $(x, y) = 1$. 试问这块地有多少平方米?

30. (希望杯竞赛题)(1) 请你写出不超过 30 的自然数中的质数之和.

(2) 请回答，千位数是 1 的四位偶自然数共有多少个?

(3) 一个四位偶自然数的千位数字是 1，当它分别被四个不同的质数去除时，余数也都是 1，试求出满足这些条件的所有自然数，其中最大的一个是多少?

31. (北京市竞赛题)1 与 0 交替排列，组成下面形式的一串数 101, 10101, 1010101, 101010101, …，请你回答：在这串数中有多少个质数? 并证明你的结论.

# 第 2 讲　奇数与偶数

## 赛点扫描

整数可分为奇数与偶数两大类. 不被 2 整除的整数称为奇数，能被 2 整除的整数称为偶数. 整数的奇偶性有下列基本性质.

1. 奇数不可能与偶数相等.

2. 偶数±偶数＝偶数，
   偶数±奇数＝奇数，
   奇数±偶数＝奇数，
   奇数±奇数＝偶数.

不难看出：在一个只含整数加减法的算式中，如果奇数的个数是偶数，那么结果为偶数；如果奇数的个数是奇数，那么结果为奇数.

3. 偶数×偶数＝偶数，
   偶数×奇数＝偶数，
   奇数×奇数＝奇数.

即：奇数与奇数的乘积是奇数，奇数与偶数的乘积是偶数.

4. 偶数可用 $2k$ 表示，奇数可用 $2k+1$（或 $2k-1$）表示，其中 $k$ 为整数.

利用奇偶性的基本性质，特别是奇数不可能等于偶数这一浅显的性质，可以解决许多数学问题.

## 赛题解密

**例 1**　（2005 年全国初中数学联赛题）若 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$ 为互不相等的正奇数，满足 $(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)(2005-x_4)(2005-x_5)=24^2$，则 $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+x_5{}^2$ 的末位数字是（　　）.

A. 1　　　B. 3　　　C. 5　　　D. 7

**【解密】**　已知等式左边 5 个因式为互不相等的偶数，而将 $24^2$ 分解为 5 个互不相等的偶数之积，只有惟一形式，这是解本例的关键.

**【解】**　$24^2=2\times(-2)\times4\times6\times(-6)$，得 $(2005-x_1)^2+(2005-x_2)^2+(2005-$