线性代数理论方法与典型题精析

李默涵 编著

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\k&k&1\\k^2&1&k\end{vmatrix}=-(k-1)^2(k+1)$$

$$D_2=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&k^2&k\end{vmatrix}=(k-1)^2$$

$$D_3=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&k\\1&1&k^2\end{vmatrix}=(k-1)^2(k+1)^2$$

辽宁大学出版社

线性代数理论方法与典型题精析

李默涵　编著

辽 宁 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数理论方法与典型题精析/李默涵编著. 一沈阳：辽宁大学出版社，2008.11
ISBN 978-7-5610-5670-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.李…　Ⅲ.线性代数一高等学校一教学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 164918 号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036）
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：12.25
字　　数：310 千字
印　　数：1～1000 册
出版时间：2008 年 11 月第 1 版
印刷时间：2008 年 11 月第 1 次印刷
责任编辑：马　静　郑霄潇
封面设计：邹本忠
责任校对：齐　悦

书　　号：ISBN 978-7-5610-5670-7
定　　价：24.50 元

联系电话：024－86864613
邮购热线：024－86830665
网　　址：http：//press. lnu. edu. cn
电子邮件：lnupress@vip. 163. com

前 言

本书是为高等院校学生学习线性代数课程以及为满足学生考研需要编写的学习指导用书。在内容安排上，不仅可以满足本科生的学习要求，更是报考研究生读者的必备宝典。

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型以及历届考研真题分类解析六个部分。每一部分均在系统总结其内容的基础上，通过对典型例题的分析，介绍解题思路、方法与技巧。

关于考研大纲的基本要求。根据《全国硕士研究生入学统一考试数学大纲》，线性代数在考试内容和考试要求上，数学一、二、三、四基本相同；自2006年开始，考试题目除数学一略有不同外，数学二、三、四的线性代数考题完全相同。本部分对考研大纲中数学一的不同要求特别注明，并用斜体字列出。

关于基础知识考点精要。本书对线性代数中的基础知识和重点内容进行了详细的阐述，对基本概念的要素、基本性质的特征、基本方法的要点进行了总结和归纳，特别着重方法的介绍。

关于典型例题精讲。通过大量的精选典型例题的讲解，使读者掌握解题思路、方法和技巧。本书引入了较多类型的例题，以开拓学生的思路和视野，从而提高分析问题、解决问题的能力，并使解题思路开阔，加深对理论与方法的理解。有些题目是根据平时学生中易见的多发性问题改编而成，以期能强调解题的基本思想及要点。

关于教材同步习题解析。本部分针对同济大学《线性代数》第五版教材中的习题，给出详尽解答，有的习题给出多种解法，以启发读者思路。

关于模拟试题自我检测。每章末的自我检测题，均配有答案以及提示。

第六章的历届考研真题分类解析，对近十年来的考研真题进行了精心筛选并分类解析，意在使读者在学习前五章内容的基础上对考研真题进行实战训练，提高解题能力，积累实战经验，树立实战信心。本章内容中每题号后括号中的（07. 2 & 3 & 4）标记，表示该题为2007年全国硕士研究生入学统一考试数学二、三、四试题。

书中疏漏与不妥之处，敬请读者指正。

李默涵

2008年10月

目 录

第一章 行列式 …… 1
一 考研大纲基本要求 …… 1
二 基础知识考点精要 …… 1
三 典型例题精讲 …… 6
四 教材同步习题解析 …… 10
五 模拟试题自我检测（一） …… 18
第二章 矩阵及其运算 …… 20
一 考研大纲基本要求 …… 20
二 基础知识考点精要 …… 20
三 典型例题精讲 …… 28
四 教材同步习题解析 …… 32
五 模拟试题自我检测（二） …… 40
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组 …… 43
一 考研大纲基本要求 …… 43
二 基础知识考点精要 …… 43
三 典型例题精讲 …… 52
四 教材同步习题解析 …… 57
五 模拟试题自我检测（三） …… 63
第四章 向量组的线性相关性 …… 66
一 考研大纲基本要求 …… 66
二 基础知识考点精要 …… 66
三 典型例题精讲 …… 72
四 教材同步习题解析 …… 78
五 模拟试题自我检测（四） …… 96
第五章 相似矩阵及二次型 …… 99
一 考研大纲基本要求 …… 99
二 基础知识考点精要 …… 99

三　典型例题精讲 …… 112
四　教材同步习题解析 …… 117
五　模拟试题自我检测（五） …… 135
第六章　考研真题分类解析 …… 140
一　行列式 …… 140
二　矩阵及其运算 …… 142
三　矩阵的初等变换与线性方程组 …… 145
四　向量组的线性相关性 …… 156
五　相似矩阵及二次型 …… 162
附录一　线性空间与线性变换习题全解 …… 172
附录二　线性代数应用案例 …… 178

第一章　行列式

一　考研大纲基本要求

考试内容

行列式的概念和基本性质;行列式按行(列)展开定理.

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二　基础知识考点精要

(一)行列式的定义

n 阶行列式的定义. 为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

容易看出:

(1) 上式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此,上式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1、2、3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种,对应上式右端共含 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,后三个排列都是奇排列. 因此,各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

定义 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

例 1 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0).

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式：

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中，t 为排列 $n\times(n-1)\cdots2\times1$ 的逆序数，故 $t=0+1+2+\cdots+(n-1)$.

证毕.

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角行列式，它的值与对角行列式一样.

例 2 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant1,p_2\leqslant2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $1,2,\cdots,n$，所以 D 中

可能不为 0 的项只有一项 $\sum(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(二) 行列式的性质

1. 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.

2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

3. 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数乘此行列式；或者，行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k，则 k 可提到行列式记号之外：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例，则此行列式为零.

5. 若行列式的某一行(列)中各元素均为两项之和，则此行列式等于两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(三) 行列式按行(列)展开

1. 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即可以按第 i 行展开，或按第 j 列展开：

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$，或

$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$.

3. n 阶行列式的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应的代数余子式的乘积之和为零，即

$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\ (i\neq s)$，或

$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0(j\neq t)$.

4. 范德蒙(Vandermonde) 行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)(n\geqslant 2),$$

其中，$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ 表示所有可能的$(x_i-x_j)(j<i)$ 的乘积.

(四) 一些常用的行列式

上(下) 三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式(主对角线以外元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(五) 克拉默(Cramer) 法则

1. 克拉默(Cramer) 法则：

在线性代数中，将含两个未知量两个方程式的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1,x_2 的值，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$

系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，

记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

含有三个未知量三个方程式的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}a_{32}b_2 - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33} + a_{23}a_{31}b_1 + a_{13}b_3a_{21} - a_{13}b_2b_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}a_{32}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}.\ \text{其中}\ D \neq 0.$$

设 n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

它的未知量的系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

该行列式被称为方程组的系数行列式.

若上述线性方程组的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad j=1,2,\cdots,n.$$

2. 克拉默(Cramer)法则的推论:

如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,那么它只有零解;如果齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式必定等于零,即 $D=0$.

三　典型例题精讲

例 1　由行列式定义,计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解　由行列式定义,$f(x)$ 是所给行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和,记为 D,它是关于 x 的四次多项式.因行列式中每个元素至多是 x 的一次多项式,于是

μ 是 D 中的 x^4 项,

$\Leftrightarrow\mu$ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素;

$\Leftrightarrow\mu$ 是 D 的(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) 元之积;

$\Leftrightarrow\mu=2x^4$(容易知道该项的符号为正).

μ 是 D 中的 x^3 项,

$\Leftrightarrow\mu$ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素,而余下一行、一列的元素(已唯一确定)为常数;

$\Leftrightarrow\mu$ 是 D 的(1,2),(2,1),(3,3),(4,4) 元之积;

$\Leftrightarrow\mu=-x^3$(容易知道该项的符号为负).

例 2　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6.于是把第 2,3,4 行同时加到第一行,提出公因子 6,然后各行减去第一行:

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=48.$$

例 3　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证　对 D_1 作运算 r_1+kr_j，把 D_1 化为下三角形行列式

设为　$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}$；

对 D_2 作运算 c_i+kc_j，把 D_2 化为下三角形行列式

设为　$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$.

对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j，再对后 n 列作运算 c_i+kc_j，把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故　　$D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

例 4　证明

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=4abcdef$；　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

证

(1) 左边 $=abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4abcdef=$ 右边.

(2) 左边$\xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0=\text{右边}.$$

例 5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解　从第 4 行开始，后行减前行得，

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

例 6　计算 n 阶行列式

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix};\quad (2)D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解　(1)$D_n\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$

$$=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

(2)$D_n\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$

$$= (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$$

例 7　已知 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的(i,j)元的余子式和代数余子式依次记为 M_{ij} 和 A_{ij}，求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \text{ 及 } M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

解　利用行列式的按行(列)展开定理，有

$$\begin{aligned} & A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \\ &= 1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}+1\cdot A_{14} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41} \\ &= A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

例 8　设 α_1、α_2 为 2 维列向量，又 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$，若行列式 $|A|=6$，求行列式 $|B|$.

解法一　$|A| = |2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2| = |3\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2|$

$= 3|\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2| = 3|\alpha_1,-\alpha_2| = -3|B|$

$\therefore |B| = -2$.

解法二　$A=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$A = B\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore\quad |A|=|B|\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=|B|\cdot(-3)$$

$$\therefore |B|=-\frac{1}{3}|A|=-2.$$

例 9 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，行列式

$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)=m$，$\det(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3)=n$，求 $\det(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2)$.

解 因所求行列式的第四列元素均是两个数之和，于是可按第四列拆成两个行列式：

$$\begin{aligned}\det(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2)&=\det(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1)+\det(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2)\\&=-\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)+\det(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3)\\&=n-m\end{aligned}$$

四　教材同步习题解析

习题 1

5. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}=0$；　(2) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&a&b&c\\x^2&a^2&b^2&c^2\\x^3&a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$，其中 a,b,c 互不相等.

解

(1) $\begin{vmatrix}x+1&2&-1\\2&x+1&1\\-1&1&x+1\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(x+3)]{r_1+r_2}(x+3)\begin{vmatrix}1&1&0\\2&x+1&1\\-1&2&x+1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2-c_1}(x+3)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&x-1&1\\-1&3&x+1\end{vmatrix}$

$=(x+3)(x^2-3)$.

于是方程解为：$x_1=-3$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$.

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙行列式，故得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0$$

因 a,b,c 互不相等，故方程解为 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

6. 证明：

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$；