

龙门品牌  学子至爱

新课标

龙门
考题

函
数

高中数学

主 编 傅荣强

本册主编 傅荣强



龍門書局

www.Longmenbooks.com

新课标

函

数



高中数学

主 编:傅荣强

本册主编:傅荣强

编 者:许 晶 曹 敏 郭 杰
闫淑萍 蒋付娟 王林芳
曲永芳 黄丽岩 于桂香
张宇霞 邱爽明 丁 一
王利民 赵影秋 侯春生
谭彩新 初海涛 徐艳霞
徐国芹

龍 門 書 局

北 京

神彩碟

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标.高中数学.函数/傅荣强主编;傅荣强本册主编. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1594-7

I. 龙… II. ①傅…②傅… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 110307 号

责任编辑:田旭 马建丽 许冲冲/封面设计:耕者

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

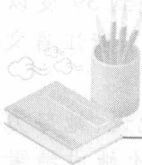
2008年7月第一版 开本:A5(890×1240)

2008年7月第一次印刷 印张:7 3/4

字数:277 000

定价:14.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

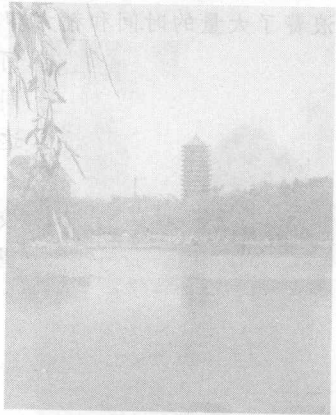
在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划

王旭

2008 年 7 月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



卢毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



邱汛 2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务 and 激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。



林叶 2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



田禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科目的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



衡水州《衡水日报》

编委会

主

编：傅荣强

编委会成员：傅荣强 方立波 于长军

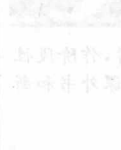
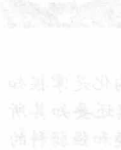
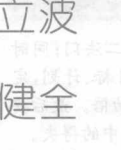
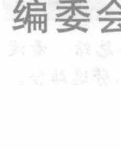
张晓红 李健全 佟志军

朱岩 张书祥 张硕

牛鑫哲 周萍 郭杰

王学春 高鹤 石铁明

石兴涛 史景辉 高波



1.《龙门专题》适合什么样的同学使用?

《龙门专题》是针对中等程度及中等程度以上的学生研究开发的,尤其是对尖子生来讲,《龙门专题》是必备图书!

2.中等程度的学生使用本书应注意什么?

这套书在设计上全面贯彻循序渐进的学习方法,中等程度的学生要特别注意:

“知识点精析与应用”部分侧重夯实学生的基础,重点在把基础知识讲细、讲透,适合为中等程度的学生奠定扎实的基础;

“能力拓展”部分重点在于拓展学生思维,直接与中高考的难度、题型接轨,适合中等学生提高成绩。

3.《龙门专题》适合什么时间使用?(3~5理科)

同步学习使用:

《龙门专题》每一节内容都是按照教材的顺序编排的,因此可以随着教学进度同步使用,老师讲到哪里,就紧跟着做透哪一本专题。

中高考复习:

“基础篇”适用于第一轮全面复习,全面梳理知识点,从这一角度,专题比任何高考复习资料都要详细、全面;

“综合应用篇”适用于第二轮专项复习,尤其是跟其他专题、其他学科进行交叉综合时,事半功倍。

4.如何使用《龙门专题》打下扎实的基础知识?

“万变不离其宗!”考试题目都是由基础知识演化而来的,因此基础知识是极其重要的,只有准确地理解、牢固地掌握基础知识,才能灵活、轻松地应用和解题!

使用《龙门专题》打基础,重点注意每节的“知识点精析与应用”,它分为三个小部分:

知识点精析:可帮助学生更全面的理解重点,突破难点;

解题方法指导:通过经典和新颖的例题帮助学生掌握解题规律和技巧;

基础达标演练:可以即学即练,便于巩固。

5.如何使用《龙门专题》拓展视野,提高素质?

“能力拓展”栏目是在牢固掌握基础的前提下,提高学生的综合素质和应试能力的,它同样包括三个小部分:

释疑解难:以综合性,关联所学知识,并作深度的拓展和延伸;

典型例题导析:最具代表性的例题、全面的思路分析、有的放矢的总结和反思,培养学生的解题技巧和方法;

思维拓展训练:完美的拓展训练设计,提升学生的学科思维能力。

6.怎么样在中高考复习中使用《龙门专题》?

“知识点精析与应用”用于梳理知识脉络,掌握基本知识点;复习时侧重使用“能力拓展”栏目,这部分立足于教材,对中高考必考内容进行拓展提升,也包括了一些难点和失分率较高的内容。

此外,“本书知识结构”、“本讲知识网络图”能帮助学生迅速快捷地掌握全部知识体系,提高复习效率。在中高考的复习备考中,还要注意:近年本专题知识在高考(中考)中所占分数比例,紧跟第二轮专项复习节奏使用。

7.尖子生如何使用《龙门专题》?

从全国调查看,尖子生最喜爱的教辅图书中,《龙门专题》被提及率十分高;来自高考状元的信息也表明,尖子生是特别适合使用本书的。尖子生在使用本书时,要注意以下几点:

首先,立足基础,通过自学或者预习的方式将基础知识理解并掌握;

其次,学习的重点放在“能力拓展”上,提高综合能力和应对中高考的能力;

再次,在复习中,一个板块一个板块的逐一解决,力争做到没有任何知识点的遗漏;

最后,中高考的复习,侧重于专题与专题之间、不同学科之间的复合型试题的研究和训练,确保在考试中基础题目不失分。

Contents

目录

基础篇	(1)
第一讲 函数	(2)
1.1 集合	(2)
1.2 函数	(15)
高考热点题型评析与探索	(34)
本讲测试题	(39)
第二讲 函数的性质	(49)
2.1 函数的单调性	(49)
2.2 函数的奇偶性	(73)
2.3 反函数	(86)
高考热点题型评析与探索	(99)
本讲测试题	(104)
第三讲 基本初等函数	(116)
3.1 回顾正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数	(116)
3.2 幂函数	(139)
3.3 指数函数	(151)
3.4 对数函数	(173)
高考热点题型评析与探索	(192)
本讲测试题	(200)
综合应用篇	(212)
函数的应用	(212)
一、函数的理论应用	(212)
二、函数的实际应用	(220)
三、综合应用训练题	(232)



基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简而言之是研究“数”和“形”的学科.代数是它侧重研究运算方法的一个分支,函数是代数的一个节点.

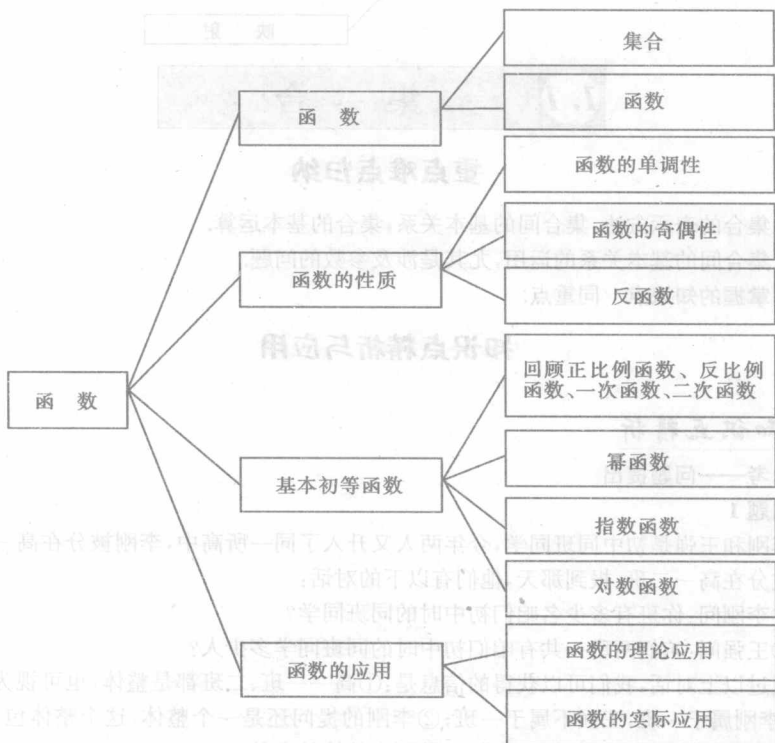
函数的本质是研究两个非空数集变量之间的对应关系.

函数研究的主要问题是:

- (1) 根据已知条件,求出函数的解析式(表格、图象);
- (2) 通过函数的解析式(表格、图象),研究函数的性质.

由函数派生出来的思想,称为运动变化思想.与之相关的思想是数形结合思想、分类讨论思想及等价转化思想.

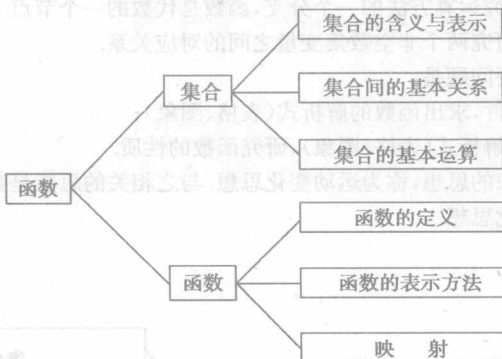
本书知识框图





第一讲 函 数

本讲知识框图



重点难点归纳

重点 集合的表示方法,集合间的基本关系,集合的基本运算.

难点 集合间的基本关系的运用,尤其是涉及参数的问题.

本节需掌握的知识 同重点.

知识点精析与应用



知识点精析

思考——问题提出

问题 1

李刚和王强是初中同班同学,今年两人又升入了一同一所高中,李刚被分在高一—一班,王强被分在高一—二班.报到那天,他们有以下对话:

①李刚问:你班有多少名咱们初中时的同班同学?

②王强问:咱们两班一共有咱们初中时的同班同学多少人?

通过以上对话,我们可以获得的信息是:①高一—一班、二班都是整体,也可视为全体、总体,李刚属于一班,王强不属于一班;②李刚的提问还是一个整体,这个整体包含于高一—二班那个整体;③王强的提问实际上是两个整体的合并.

问题 2

给出三组数,即

A:2,4,6,8,10;

$B: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10;$

$U: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$

① 8 属于数组 A, B 吗?

② 数组 A, B 包含于数组 U 吗?

③ 数组 A, B 合并在一起, 其结果是什么?

④ 既是数组 A 中的数又是数组 B 中的数, 可以组成一个怎样的数组?

⑤ 在 U 中去掉 A , 剩余部分是一个怎样的数组?

探究——抽象概括

问题 1、问题 2 告诉我们, 收集研究对象是数学活动的第一步. 我们这里要学习的集合, 其目的就是收集研究对象, 而后规范被收集对象的表达形式, 探究其中的规律.

1. 集合的含义与表示

(1) 集合的含义

一般地, 我们把被研究的对象称为元素, 把一些元素组成的总体(或称全体、整体)叫做集合, 简称为集.

通常用 A, B, C, \dots 表示集合, 用 a, b, c, \dots 表示元素. 如果 a 是 A 中的元素, 就说 a 属于 A , 记为 $a \in A$; 如果 b 不是 B 中的元素, 就说 b 不属于 B , 记为 $b \notin B$.

为了方便, 对常用的数集约定如下:

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集), 记作 N ;

所有正整数组成的集合称为正整数集, 记作 N^* 或 N_+ ;

全体整数组成的集合称为整数集, 记作 Z ;

全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作 Q ;

全体实数组成的集合称为实数集, 记作 R .

(2) 集合的表示方法

① 列举法.

由数 $2, 4, 6, 8, 10$ 组成的集合可表示为 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来写在大括号(或称花括号)内表示集合的方法叫做列举法.

② 描述法.

满足条件 $x+1 < 0$ 的实数 x 的集合可表示为 $A = \{x | x < -1\}$;

方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解的集合(简称解集)可表示为 $B = \{x \in R | x^2 - 3x - 4 = 0\}$;

一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象是一条直线, 这条直线可表示为 $C = \{(x, y) | y = 2x - 1\}$.

像以上三例这样, 用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

描述法还可以这样叙述, 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合.

表示有限集, 即表示含有有限个元素的集合, 一般用列举法; 表示无限集, 即表示含有无限个元素的集合, 一般用描述法.

有一种集合很特殊, 例如, $\{x \in R | x^2 + 3 = 0\}$, $\{x \in R | x^2 < 0\}$, $\{(x, y) | y = x^2, \text{ 且 } y = x - 1\}$, 这样的集合不含有任何元素, 但却依然有它的存在价值. 我们把不含任何元素的集合叫做空集, 记为 \emptyset .



2. 集合间的基本关系

集合间的基本关系包含三个问题,即子集、真子集、相等.为了方便,我们把它们归纳在一个表格里(表 1-1),供参考.

表 1-1 集合间的基本关系

	定义	性质与说明	文恩氏图
子集	<p>如果非空集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).</p> <p>规定: $\emptyset \subseteq A$ (A 是任意集合)</p>	<p>① $A \subseteq A$; ② $\emptyset \subseteq A$; ③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; ④ 含有 n 个元素的集合的子集的个数是 2^n; ⑤ A 不是 B 的子集,记作 $A \not\subseteq B$.</p>	
真子集	<p>如果 A 是 B 的子集,且非空集合 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)</p>	<p>① 空集是任何非空集合的真子集; ② 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; ③ 含有 n 个元素的集合的真子集的个数是 $2^n - 1$.</p>	
集合相等	<p>对于两个集合 A 与 B,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,我们就说这两个集合相等,记作 $A = B$.</p>	<p>① $\emptyset = \emptyset$; ② 两个相等的非空集合 A 和 B,它们的元素是完全相同的.</p>	

3. 集合的基本运算

集合的基本运算包括三类,即并运算、交运算和补运算.为了使用上的需要,我们也把它们写在一个表格里(表 1-2),供参考.

表 1-2 集合的基本运算

	定义	性质与说明	文恩氏图
补集	已知全集 U (非空集), 集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$ 即 $\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$	$\begin{aligned} \textcircled{1} \complement_U (\complement_U A) &= A; \\ \textcircled{2} \complement_U \emptyset &= U; \\ \textcircled{3} \complement_U U &= \emptyset \end{aligned}$	
交集	由所有属于非空集合 A 且属于非空集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$. 规定: $\emptyset \cap A = \emptyset$, A 是任意集合	$\begin{aligned} \textcircled{1} A \cap \emptyset &= \emptyset; \\ \textcircled{2} A \cap A &= A; \\ \textcircled{3} A \cap B &= B \cap A; \\ \textcircled{4} A \cap (\complement_U A) &= \emptyset; \\ \textcircled{5} \text{若 } A \cap B &= A, \text{ 则 } A \subseteq B; \text{ 反之, 若 } A \subseteq B, \text{ 则 } A \cap B = A. \text{ 简记为 } A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \end{aligned}$	
并集	由属于非空集合 A 或属于非空集合 B 的所有元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$. 规定: $\emptyset \cup A = A$, A 是任意集合	$\begin{aligned} \textcircled{1} A \cup \emptyset &= A; \\ \textcircled{2} A \cup A &= A; \\ \textcircled{3} A \cup B &= B \cup A; \\ \textcircled{4} A \cup B &= B \Leftrightarrow A \subseteq B; \\ \textcircled{5} A \cup (\complement_U A) &= U; \\ \textcircled{6} (\complement_U A) \cap (\complement_U B) &= \complement_U (A \cup B); \\ \textcircled{7} (\complement_U A) \cup (\complement_U B) &= \complement_U (A \cap B). \end{aligned}$ <p>③若 $\text{card}(M)$ 代表集合 M 的元素的个数, 则 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$</p>	



解题方法指导

1. 集合的含义与表示

学习集合,意在收集数学对象,以确定数学问题的定义范围,此阶段的学习,要把握



住两点：一是准确地表达一些对象构成的集合；二是判断某个或某些元素是否属于这样的集合。

例1 判断下列各组对象能否构成集合？对能构成集合的，分别指出属于它和不属于它的一个元素：

(1) 满足 $1 < 2x - 1 \leq 3$ 的实数 x ；

(2) 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解；

(3) 满足 $x \in \mathbf{Z}$ 且 $-2 < x \leq 0$ 的 x ；

(4) 抛物线 $y = x^2$ 上的所有点；

(5) 函数 $y = \frac{2020}{x}$ 的值。

解 (1) 满足 $1 < 2x - 1 \leq 3$ 的实数 x 能构成集合，这个集合是 $A = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$ ，其中 $2 \in A, 1 \notin A$ 。

点评 一个集合确定了，它的元素也就确定了，这一性质称为元素的确定性。如， $A = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$ 确定了，它的元素也就确定了，对 $\frac{3}{2}$ 和 3，我们可以确定 $\frac{3}{2} \in A, 3 \notin A$ 。

(2) 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解能构成集合，这个集合是 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{x \mid (x-1)^2 = 0\} = \{1\}$ ，其中 $1 \in B, 0 \notin B$ 。

点评 从重根的角度讲，方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有二重根 $x = 1$ 。方程的解集我们写成了 $\{1\}$ ，而没有写成“ $\{1, 1\}$ ”，这是为了确保集合中的任何两个元素互异，这一性质称为元素的互异性。一般地，集合中的元素都是互异的。

(3) 满足 $x \in \mathbf{Z}$ 且 $-2 < x \leq 0$ 的 x 能构成集合，这个集合是 $C = \{-1, 0\} = \{0, -1\}$ ，其中 $0 \in C, 1 \notin C$ 。

点评 $\{-1, 0\} = \{0, -1\}$ 表明，集合中的元素是无序的，这一性质称为元素的无序性。

(4) 抛物线 $y = x^2$ 上的所有点能构成集合，这个集合是 $D = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ ，其中 $(2, 4) \in D, (2, 3) \notin D$ 。

点评 集合 D 是点集，所以竖线前面我们写成“ (x, y) ”，这是用坐标表示点。这个例子告诉我们，写集合时，竖线前面写什么，要看这个集合是由什么样的元素构成的，由点构成，写成“ (x, y) ”，由实数构成，写成“ x ”，由函数值构成，写成“ y ”。 (x, y) 、 x 、 y 一般被称为代表元素。

(5) 函数 $y = \frac{2020}{x}$ 的值能构成集合，这个集合是 $E = \{y \mid y = \frac{2020}{x}\}$ ，其中 $2020 \in E (x = 1), 0 \notin E$ 。

点评 本例中，代表元素写成“ x ”是不妥的，尽管函数值也是实数。

2. 集合间的基本关系

集合间的基本关系是一种包含与非包含的关系。 $A \subseteq B$ ，是指对任一 $x \in A$ ，都有 $x \in B$ ； $A \subsetneq B$ ，是指 $A \subseteq B$ ，且至少有一个 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ； $A = B$ ，是指 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ 。A 不是 B 的子集，记为 $A \not\subseteq B$ 。



要注意两组符号“ \in, \notin ”与“ $\subseteq, \supseteq, \subset, \subsetneq$ ”在用法上的区别,前者用在元素与集合之间,后者用在集合与集合之间.

[例2] 用适当的符号填空:

(1) 2 _____ $\{x|x^2-4x+4=0\}$;

(2) $\{x|3 \leq x < 4\}$ _____ $\{x|6 \leq 2x \leq 8\}$;

(3) \emptyset _____ $\{x \in \mathbf{Z} | 0 < x < 3\}$ _____ $\{x|(x-1)(x-2)=0\}$ _____ $\{y|y=-x, x \in \mathbf{Z}, \text{且 } -3 < x < 3\}$.

解 (1) $\{x|x^2-4x+4=0\} = \{x|(x-2)^2=0\} = \{2\}$, 它是一个集合, 2 是一个元素. 在空白处填“ \in ”.

(2) $\{x|6 \leq 2x \leq 8\} = \{x|3 \leq x \leq 4\}$.

当 $x \in \{x|3 \leq x < 4\}$ 时, $x \in \{x|3 \leq x \leq 4\}$; 但是 $4 \in \{x|3 \leq x \leq 4\}$, $4 \notin \{x|3 \leq x < 4\}$. 在空白处填“ \supsetneq ”.

(3) $\{x \in \mathbf{Z} | 0 < x < 3\} = \{1, 2\}$; $\{x|(x-1)(x-2)=0\} = \{1, 2\}$; $\{y|y=-x, x \in \mathbf{Z}, \text{且 } -3 < x < 3\} = \{y|y=-x, x=-2, -1, 0, 1, 2\} = \{2, 1, 0, -1, -2\}$.

在空白处依次填 $\supsetneq, =, \supsetneq$.

[例3] 已知 $A = \{x|x=2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{y|y=4m \pm 1, m \in \mathbf{Z}\}$, 求证 $A=B$.

分析 只需证明 $A \subseteq B, B \subseteq A$. 从讨论 $2n+1$ 与 $4m \pm 1$ 的关系入手即可.

证明 $2n+1, n \in \mathbf{Z}$, 表示所有的奇数; $4m+1, m \in \mathbf{Z}$, 表示奇数的一部分; $4m-1, m \in \mathbf{Z}$, 也表示奇数的一部分.

对 $y \in B$, 有 $y \in A$,

所以

$$B \subseteq A.$$

对 $x \in A$, 有 $x=2n+1, n \in \mathbf{Z}$.

① $n=2k, k \in \mathbf{Z}$ 时, $x=2(2k)+1=4k+1, k \in \mathbf{Z}, x \in B$;

② $n=2k-1, k \in \mathbf{Z}$ 时, $x=2(2k-1)+1=4k-1, k \in \mathbf{Z}, x \in B$.

①、②表明, 对 $x \in A$, 有 $x \in B$.

所以

$$A \subseteq B.$$

综上, 有

$$A=B.$$

3. 集合的基本运算

集合的基本运算包括三种, 即 $A \cup B = \{x|x \in A, \text{或 } x \in B\}$; $A \cap B = \{x|x \in A, \text{且 } x \in B\}$; $\complement_U A = \{x|x \in U, \text{且 } x \notin A\}$, 其中 $A \subseteq U$.

[例4] 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, 求 $A \cup B, A \cap B, \complement_I A, \complement_I B, (\complement_I A) \cap (\complement_I B), \complement_I[(\complement_I A) \cup (\complement_I B)]$.

分析 解答本题的关键是对有关集合的“并、交、补”概念要清楚.

解 \because 全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$,



$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3\}; A \cap B = \emptyset; \complement_I A = \{2, 3, 4, 5, 6\}; \complement_I B = \{1, 4, 5, 6\}; (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{4, 5, 6\}$.

又 $\because (\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$\therefore \complement_I [(\complement_I A) \cup (\complement_I B)] = \emptyset$.

[例5] 设 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x + 4\}$, $C = \{-1, 7\}$, 且 $A \cap B = C$, 求 x 与 y 的值.

解 由已知 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x + 4\}$, $C = \{-1, 7\}$.

由 $A \cap B = C$, 得

$7 \in A, 7 \in B, -1 \in B$.

\therefore 在 A 中, $x^2 - x + 1 = 7$,

$\therefore x = -2, 3$.

当 $x = -2$ 时, 在 B 中 $x + 4 = 2$.

又 $\because 2 \in A$,

\therefore

$2 \in A \cap B$,

但 $2 \notin C$,

$\therefore x = -2$ 不合题意.

当 $x = 3$ 时, 在 B 中 $x + 4 = 7$,

$\therefore 2y = -1, y = -\frac{1}{2}$.

综上, $x = 3, y = -\frac{1}{2}$.

这时 A 中 $x^2 - x + 1 = 7$ 已经确定. B 中 $2y, x + 4$ 一个为 7 , 另一个为 -1 . 谁为 7 , 谁为 -1 ? 待定!

[例6] 已知 $A = \{x | x^2 \geq 9\}$, $B = \{x | \frac{x-7}{x+1} \leq 0\}$, $C = \{x | |x-2| < 4\}$.

(1) 求 $A \cap B$ 及 $A \cup C$;

(2) 设 $I = \mathbf{R}$, 求 $A \cap [\complement_I (B \cap C)]$.

分析 先将 A, B, C 具体化, 然后根据交集、并集、补集的定义求解结果.

解 由 $x^2 \geq 9$, 得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -3$,

$\therefore A = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3\}$.

又由不等式 $\frac{x-7}{x+1} \leq 0$, 得 $-1 < x \leq 7$,

$\therefore B = \{x | -1 < x \leq 7\}$.

又由 $|x-2| < 4$, 得 $-2 < x < 6$,

\therefore

$C = \{x | -2 < x < 6\}$.

(1) $A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 7\}$, 如图 1-1A.

$A \cup C = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x > -2\}$, 如图 1-1B.

(2) $\because I = \mathbf{R}, B \cap C = \{x | -1 < x < 6\}$,

不能把不等式两边同时乘以“ $x+1$ ”, 因为 $x+1$ 的正负是不确定的.