

劲爆!



卓越备考

中考数学综合题

主编◎袁亚良 蔡娟

数与代数应用题
图形与几何应用题
阅读理解题
数与代数综合题
图形与几何综合题
.....



华东师范大学出版社

卓越备考

中考数学综合题

主 编 袁亚良 蔡 娟

编 者 吴 琳 曹国钧 程 薇



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学综合题/袁亚良,蔡娟主编. —上海:华东师范大学出版社,2009

(卓越备考)

ISBN 978-7-5617-6958-4

I. 中… II. ①袁…②蔡… III. 数学课—初中—解题—
升学参考资料 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 028982 号

卓越备考

中考数学综合题

主 编 袁亚良 蔡 娟

项目编辑 舒 刊

组稿编辑 徐惟简

审读编辑 徐慧平

装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社

社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062

电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105

客服电话 021-62865537(兼传真)

门市(邮购)电话 021-62869887

门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口

网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 江苏省江阴市天海印务有限公司

开 本 787×960 16 开

印 张 9.5

字 数 177 千字

版 次 2009 年 5 月第 1 版

印 次 2009 年 5 月第 1 次

印 数 16000

书 号 ISBN 978-7-5617-6958-4/G·3888

定 价 15.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

《卓越备考》
三大特色

第1章 数与代数应用题

本章主要收集有关方程(组)的应用、不等式(组)的应用、一次函数的应用、反比例函数的应用及二次函数的应用等有一定综合性的题目.

直击中考

数与代数应用题来源于我们的生活实际.随着新课程标准的实施,课程改革的推进,作为中考重点题型的应用题,在结构和形式上都发生了变化,多以时代感强,立意新颖的生活素材为背景,设计创编问题.

数与代数应用题涉及初中数学知识的各个方面,包括数与式的应用,方程(组)与不等式(组)的应用,函数的应用等.

解数与代数应用题,首先要阅读材料,理解题意,找到考查的主要内容和知识点,揭示实际问题的数学本质,把实际问题转化成数学问题,然后进行计算,从而达到学习数学、应用数学解决实际问题的目的.

解决实际应用问题,其求解过程一般可归纳为以下几步:

- (1) 审题:分析题意,将条件和图形与所求结果用正确的数学语言或符号来表示.
- (2) 建模:寻找合适的数学模型,如方程(组)、不等式(组)、函数等.
- (3) 解模:将已知条件代入数学模型,求解一个纯数学问题.
- (4) 检验:将纯数学问题的解代入实际问题,看是否符合题意.

经典真题

1 (2008 常州)若将棱长为 2 的正方体切成 8 个棱长为 1 的小正方体,则所有小正方体的表面积的和是原正方体表面积의 _____ 倍;若将棱长为 3 的正方体切成 27 个棱长为 1 的小正方体,则所有小正方体的表面积的和是原正方体表面积的 _____ 倍;若将棱长为 n ($n > 1$, 且为整数)的正方体切成 n^3 个棱长为 1 的小正方体,则所有小正方体的表面积的和是原正方体表面积的 _____ 倍.

解析:我们可以将原正方体的表面积及切了以后所有小正方体的表面积之和分别计算出来进行比较.

8 个棱长为 1 的小正方体的表面积之和是 $6 \times 8 = 48$,原来棱长为 2 的正方体的表面积是 $4 \times 6 = 24$,显然,所有小正方体的表面积之和是原正方体表面积的 2 倍.

27 个棱长为 1 的小正方体的表面积之和是 $6 \times 27 = 162$,棱长为 3 的正方体的表面积是 $9 \times 6 = 54$. 所有小正方体的表面积之和是原正方体表面积的 3 倍.

通过以上的计算,可以推出,将棱长为 n ($n>1$,且为整数)的正方体切成 n^3 个棱长为1的小正方体,则所有小正方体的表面积的和是原正方体表面积的 n 倍.

说明:计算和估算是数学的基本能力.

2 (2007 乐山)用图1-2(1)所示的正方形和长方形卡片若干张,拼成一个长为 $2a+b$,宽为 $a+b$ 的矩形,需要A类卡片_____张,B类卡片_____张,C类卡片_____张.

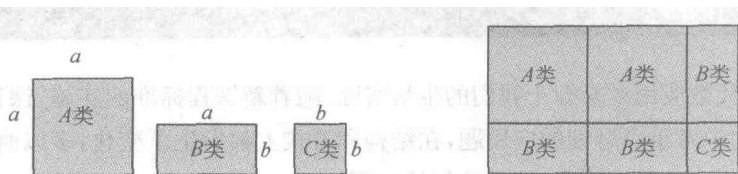


图 1-2(1)



图 1-2(2)

解析:由于是用A、B、C三类卡片去拼成矩形,所用卡片的面积之和应等于拼成的矩形的面积,我们可以从这个角度去思考和解决问题.由已知可知,A类卡片的面积是 a^2 ,B类卡片的面积是 ab ,C类卡片的面积是 b^2 .而拼成的矩形的面积为 $(2a+b)(a+b) = 2a^2 + 3ab + b^2$,从中可以看出,需要A类卡片2张,B类卡片3张,C类卡片1张.如图1-2(2)所示.

3 (2008 安徽)刚回营地的两个抢险分队又接到救灾命令:一分队立即出发赶往30千米外的A镇;二分队因疲劳可在营地休息 a ($0 \leq a \leq 3$)小时再赶往A镇参加救灾.一分队出发后得知,唯一通往A镇的道路在离营地10千米处发生塌方,塌方处地形复杂,必须由一分队用1小时打通道路.已知一分队的行进速度为5千米/时,二分队的行进速度为 $(4+a)$ 千米/时.

- (1) 若二分队在营地不休息,问二分队几个小时能赶到A镇?
- (2) 若需要二分队和一分队同时赶到A镇,二分队应在营地休息几个小时?
- (3) 图1-3的图象中,①②分别描述一分队和二分队离A镇的距离 y (千米)和时间 x (小时)的函数关系,请写出你认为所有可能合理图象的代号,并说明它们的实际意义.

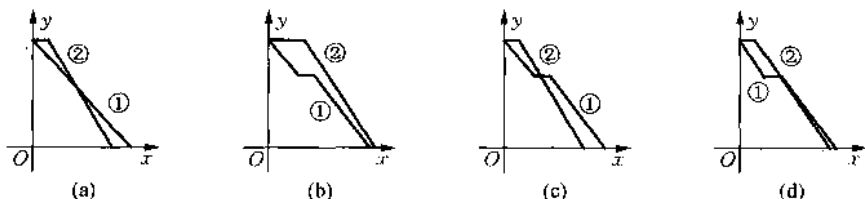


图 1-3

解析:(1) 若二分队在营地不休息,则 $a=0$,于是二分队的行进速度为4千米/时.这里不能直接用 $30 \div 4$ 得二分队到达A镇的时间,因为唯一通往A镇的

道路在离营地 10 千米处发生了塌方,如果一分队在二分队到达前已经到达塌方处并将道路打通,则塌方对二分队的行进没有影响,如果一分队不能在二分队到达前到达塌方处并将道路打通,则塌方对二分队的行进将有影响.一分队从营地到塌方处需 $\frac{10}{5} = 2$ (小时),打通道路需 1 小时,从出发到打通道路共需 3 小时,而二分队不休息直接去 A 镇,从营地到塌方处需 $\frac{10}{4} = 2.5$ (小时),故二分队需在塌方处等待 0.5 小时.二分队从营地到 A 镇共需 $2.5 + 0.5 + \frac{20}{4} = 8$ (小时).

(2) 一分队从营地到 A 镇共需 $\frac{30}{5} + 1 = 7$ (小时).我们要分二分队在塌方处停留和不停留两种可能来考虑这个问题.

① 若二分队在塌方处需停留,则后 20 千米需和一分队同行,速度为 5 千米/时,则 $4 + a = 5$, $a = 1$,即二分队在营地休息 1 小时后,再用 2 小时到达塌方处,这时一分队正好打通道路,不必在塌方处停留.这与二分队在塌方处停留矛盾,所以这种可能不存在.

② 若二分队在塌方处不停留,则 $(4 + a)(7 - a) = 30$,即 $a^2 - 3a + 2 = 0$,解得 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.经检验, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 均符合题意,故二分队应在营地休息 1 小时或 2 小时.

(3) 仔细观察(a)、(b)、(c)、(d)四个图象,(a)中从①看不出一分队在塌方处停留打通道路的时间,故(a)不合理.(c)中的②表明:二分队没有等一分队打通道路就通过了塌方处,也不合理.合理的图象是(b)和(d).(b)的实际意义是二分队在营地休息的时间过长,以致在一分队后面赶到 A 镇.(d)的实际意义是二分队在营地休息时间适当,并在一分队前面赶到 A 镇.

4 (2008 黄冈)某市有一块土地共 100 亩,某房地产商以每亩 80 万元的价格购得此地,准备修建“和谐花园”住宅区.计划在该住宅区内建造八个小区(A 区、B 区、C 区…H 区),其中 A 区、B 区各修建一栋 24 层的楼房;C 区、D 区、E 区各修建一栋 18 层的楼房;F 区、G 区、H 区各修建一栋 16 层的楼房.为了满足市民不同的购房需求,开发商准备将 A 区、B 区两个小区都修建成高档住宅,每层 800 m^2 ,初步核算成本为 800 元/ m^2 ;将 C 区、D 区、E 区三个小区都修建成中档住宅,每层 800 m^2 ,初步核算成本为 700 元/ m^2 ;将 F 区、G 区、H 区三个小区都修建成经济适用房,每层 750 m^2 ,初步核算成本为 600 元/ m^2 .

整个小区内其他空余部分土地用于修建小区公路通道,植树造林,建花园、运动场和居民生活商店等,这些所需费用加上物业管理费、设置安装楼层电梯等费用共计需要 9900 万元.

开发商打算在修建完工后,将高档、中档和经济适用房以平均价格分别为

3000 元/m²、2600 元/m² 和 2100 元/m² 的价格销售. 若房屋全部出售完, 请你帮忙计算出房地产开发商的赢利预计是多少元?

解析: 我们可以通过房屋全部售完的总售价减去全部成本, 得到房地产开发商的赢利.

房屋总售价包括八个小区共 8 栋楼房的售价. 全部成本应包括购买土地的费用, 建房的成本费用和修建道路、植树造林等, 及物业管理、安装楼层电梯等费用. 售房收入是 $3000 \times 800 \times 24 \times 2 + 2600 \times 800 \times 18 \times 3 + 2100 \times 750 \times 16 \times 3 = 30\,312$ (万元). 购买土地的费用是 $80 \times 100 = 8000$ (万元), 建房的成本费用是 $800 \times 800 \times 24 \times 2 + 700 \times 800 \times 18 \times 3 + 600 \times 750 \times 16 \times 3 = 8256$ (万元), 修建道路、植树造林等, 及物业管理、安装楼层电梯等费用是 9900 万元. 所以, 预计开发商赢利为 $30\,312 - 8256 - 9900 - 8000 = 4156$ (万元).

5 (2007 宁波) 2007 年 5 月 19 日起, 中国人民银行上调存款利率.

人民币存款利率调整表

项 目	调整前年利率%	调整后年利率%
活期存款	0.72	0.72
一年期定期存款	2.79	3.06

储户的实得利息收益是扣除利息税后的所得利息, 利息税率为 20%.

(1) 小明于 2007 年 5 月 19 日把 3500 元的压岁钱按一年期定期存入银行, 到期时他实得利息收益是多少元?

(2) 小明在这次利率调整前有一笔一年期定期存款, 到期时按调整前的年利率 2.79% 计息, 本金与实得利息收益的和为 2555.8 元, 问他这笔存款的本金是多少元?

(3) 小明爸爸有一张在 2007 年 5 月 19 日前存入的 10 000 元的一年期定期存款单, 为获取更大的利息收益, 想把这笔存款转存为利率调整后的一年期定期存款. 问他是否应该转存? 请说明理由.

约定: ① 存款天数按整数天计算, 一年按 360 天计算利息.

② 比较利息大小是指从首次存入日开始的一年时间内, 获得的利息比较. 如果不转存, 利息按调整前的一年期定期利率计算; 如果转存, 转存前已存天数的利息按活期利率计算, 转存后, 余下天数的利息按调整后的一年期定期利率计算(转存前后本金不变).

解析: (1) 到期时, 小明能得到的利息是 $3.06\% \times 3500 = 107.10$ (元), 应缴纳的利息税是 $107.10 \times 20\% = 21.42$ (元), 小明实得利息收益是 $107.10 - 21.42 = 85.68$ (元).

(2) 可以设小明这笔存款的本金是 x 元, 根据题意, 可列出方程 $x + 2.79\% \times (1 - 20\%)x = 2555.8$, 解得 $x = 2500$, 即小明这笔存款的本金是 2500 元.

(3) 利息的多少与存款的时间长短有关. 题中没有明确小明爸爸存款的日期, 我们要对存款天数进行讨论. 如果转存后所得利息收益比不转存实得的利息收益高, 则应该转存; 反之, 则不应该转存. 设小明爸爸这笔存款转存前已存了 y 天. 由题意可得不等式 $10\,000 \times \frac{y}{360} \times 0.72\% + 10\,000 \times \frac{360-y}{360} \times 3.06\% > 10\,000 \times 2.79\%$, 解之得 $y < 41\frac{7}{13}$. 这说明, 当小明爸爸这笔存款转存前已存天数不超过 41 天时, 他应转存; 否则不需转存.

6 (2008 黄冈) 四川汶川大地震发生后, 我市某工厂 A 车间接到生产一批帐篷的紧急任务, 要求必须在 12 天(含 12 天)内完成. 已知每顶帐篷的成本价为 800 元, 该车间平时每天能生产帐篷 20 顶. 为了加快进度, 车间采取工人分批日夜加班, 机器满负荷运转的生产方式, 生产效率得到了提高. 这样, 第一天生产了 22 顶, 以后每天生产的帐篷都比前一天多 2 顶. 由于机器损耗等原因, 当每天生产的帐篷数达到 30 顶后, 每增加 1 顶帐篷, 当天生产的所有帐篷, 平均每顶的成本就增加 20 元. 设生产这批帐篷的时间为 x 天, 每天生产的帐篷为 y 顶.

(1) 直接写出 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

(2) 若这批帐篷的订购价格为每顶 1200 元, 该车间决定把获得最高利润的那一天的全部利润捐献给灾区. 设该车间每天的利润为 W 元, 试求出 W 与 x 之间的函数关系式, 并求出该车间捐献给灾区多少钱?

解析: (1) 根据题意, 可得 $y = 22 + 2(x-1) = 2x + 20$. 自变量 x 的取值范围是 $1 \leq x \leq 12$.

(2) 由 $2x + 20 = 30$, 得 $x = 5$, 这就是说, 第 5 天该车间就生产 30 顶帐篷了. 从第 6 天开始, 每顶帐篷的成本就增加 $20(2x + 20 - 30)$ 元. 在 $1 \sim 5$ 天内, 该车间每天的利润 $W = (1200 - 800)(2x + 20) = 800x + 8000$, 此时 W 随 x 的增大而增大, 所以当 $x = 5$ 时, $W_{\text{最大值}} = 12\,000$. 第 6~12 天, 该车间每天的利润 $W_2 = [1200 - 800 - 20(2x + 20 - 30)](2x + 20) = -80(x^2 - 5x - 150) = -80\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 12\,500$. 此时函数图象开口向下, 在对称轴右侧, W 随 x 的增大而减小, 所以当 $x = 6$ 时 $W_{\text{最大值}} = 11\,520$. 因为 $12\,000 > 11\,520$, 所以当 $x = 5$ 时 W 最大, 且最大值为 12 000.

综上, $W = \begin{cases} 800x + 8000, & 1 \leq x \leq 5, \\ -80\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 12\,500, & 5 < x \leq 12. \end{cases}$ 该车间捐献给灾区 12 000 元.

7 (2008 苏州) 如图, 帆船 A 和帆船 B 在太湖湖面上训练, O 为湖面上的一个定点, 教练船静候于 O 点. 训练时要求 A、B 两船始终关于 O 点对称. 以 O 为原点, 建立如图所示的坐标系, x 轴、 y 轴的正方向分别表示正东、正北方向. 设 A、B 两船可近似看成在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上运动, 湖面风平浪静, 双帆远影优美. 训练中

当教练船与 A、B 两船恰好在直线 $y = x$ 上时,三船同时发现湖面上有一遇险的 C 船,此时教练船测得 C 船在东南 45° 方向上, A 船测得 AC 与 AB 的夹角为 60° , B 船也同时测得 C 船的位置(假设 C 船位置不再改变, A、B、C 三船可分别用 A、B、C 三点表示).

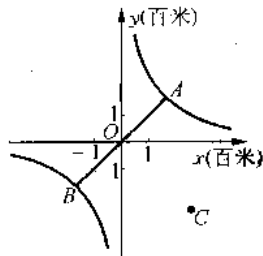


图 1-7

(1) 发现 C 船时, A、B、C 三船所在位置的坐标分别为 A(_____, _____)、B(_____, _____) 和 C(_____, _____);

(2) 发现 C 船, 三船立即停止训练, 并分别从 A、O、B 三点出发沿最短路线同时前往救援, 设 A、B 两船的速度相等, 教练船与 A 船的速度之比为 $3:4$, 问教练船是否最先赶到? 请说明理由.

解析: (1) 由已知 A、B 在 $y = \frac{4}{x}$ 及 $y = x$ 上, 可得 $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$, 且 $OA = 2\sqrt{2}$. 连结 OC、AC, 因为点 C 在点 O 的东南方向上, 所以 $\angle AOC = 90^\circ$. 又 $\angle OAC = 60^\circ$, 可得 $OC = 2\sqrt{6}$, 从而可得 $C(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$.

(2) 由(1)可知, $OA = OB = 2\sqrt{2}$, $OC = 2\sqrt{6}$, $OC \perp AB$, 所以有 $AC = BC = 4\sqrt{2}$. 设教练船的速度为 $3m$ ($m > 0$), 则 A、B 船的速度为 $4m$, 由于 $\frac{2\sqrt{6}}{3m} > \frac{\sqrt{2}}{m}$, 所以教练船到达 C 船所用时间多于 A、B 船到达 C 船所用时间, 故教练船不能最先到达.

8 (2007 潍坊) 为改善办学条件, 北海中学计划购买部分 A 品牌电脑和 B 品牌课桌. 第一次, 用 9 万元购买了 A 品牌电脑 10 台和 B 品牌课桌 200 张. 第二次, 用 9 万元购买了 A 品牌电脑 12 台和 B 品牌课桌 120 张.

(1) 每台 A 品牌电脑与每张 B 品牌课桌的价格各是多少元?

(2) 第三次购买时, 销售商对一次购买量大的客户打折销售. 规定: 一次购买 A 品牌电脑 35 台以上(含 35 台), 按九折销售, 一次购买 B 品牌课桌 600 张以上(含 600 张), 按八折销售. 学校准备用 27 万元购买电脑和课桌, 其中电脑不少于 35 台, 课桌不少于 600 张, 问有几种购买方案?

解析: (1) 根据题意, 可以用方程组来解这个问题. 设每台 A 品牌电脑 m 元, 每张 B 品牌课桌 n 元, 则有
$$\begin{cases} 10m + 200n = 90\,000, \\ 12m + 120n = 90\,000, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = 6000, \\ n = 150. \end{cases}$$

(2) 为了求出有几种购买方案, 可以采用如下方法: 设购电脑 x 台, 课桌 y 张, 根据题意有
$$\begin{cases} 5400x + 120y = 270\,000, \\ x \geq 35, \\ y \geq 600, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} 35 \leq x \leq 36\frac{2}{3}, \\ 600 \leq y \leq 675. \end{cases}$$
 $x = 35$ 时, $y = 675$; $x = 36$ 时, $y = 630$. 这说明可以有两种购买方案:

方案①:购电脑 35 台,课桌 675 张;

方案②:购电脑 36 台,课桌 630 张.

9 (2007 怀化)2007 年我市某县筹备 20 周年县庆,园林部门决定利用现有的 3490 盆甲种花卉和 2950 盆乙种花卉搭配 A, B 两种园艺造型共 50 个摆放在迎宾大道两侧,已知搭配一个 A 种造型需甲种花卉 80 盆,乙种花卉 40 盆,搭配一个 B 种造型需甲种花卉 50 盆,乙种花卉 90 盆.

(1) 某校九年级(1)班课外活动小组承接了这个园艺造型搭配方案的设计,问符合题意的搭配方案有几种? 请你帮助设计出来.

(2) 若搭配一个 A 种造型的成本是 800 元,搭配一个 B 种造型的成本是 960 元,试说明(1)中哪种方案成本最低? 最低成本是多少元?

解析: (1) 设搭配 A 种造型 x 个, 则 B 种造型为 $(50-x)$ 个, 根据题意, 得
$$\begin{cases} 80x + 50(50-x) \leq 3490, \\ 40x + 90(50-x) \leq 2950, \end{cases}$$
 解这个不等式组得 $31 \leq x \leq 33$. 因为 x 是整数, 所以 x 可取 31, 32, 33, 所以可设计三种搭配方案:

① A 种园艺造型 31 个, B 种园艺造型 19 个;

② A 种园艺造型 32 个, B 种园艺造型 18 个;

③ A 种园艺造型 33 个, B 种园艺造型 17 个.

(2) 此问可以用以下两种方法解:

方法一: 因为 B 种造型的成本高于 A 种造型的成本, 所以 B 种造型越少, 成本越低, 故应选择方案③, 成本最低, 最低成本为 $33 \times 800 + 17 \times 960 = 42\,720$ (元).

方法二: 方案①需成本 $31 \times 800 + 19 \times 960 = 43\,040$ (元), 方案②需成本 $32 \times 800 + 18 \times 960 = 42\,880$ (元), 方案③需成本 $33 \times 800 + 17 \times 960 = 42\,720$ (元), 所以应选择方案③, 成本最低, 最低成本为 42 720 元.

说明: 方法一根据经验先进行正确的选择, 减少了计算; 方法二是把各种方案的成本计算出来进行比较, 这样做较为稳妥.

10 (2006 盐城) 国家为了关心广大农民群众, 增强农民抵御大病风险的能力, 积极推行农村医疗保险制度. 某市根据本地的实际情况, 制定了纳入医疗保险的农民医疗费用报销规定, 享受医保的农民可在定点医院就医, 在规定的药品品种范围内用药, 由患者先垫付医疗费用, 年终到医保中心报销. 医疗费的比例标准如下表:

费用范围	500 元以下(含 500 元)	超过 500 元且不超过 10 000 元的部分	超过 10 000 元的部分
报销比例标准	不予报销	70%	80%

(1) 设某农民一年的实际医疗费为 x 元 ($500 < x \leq 10\,000$), 按标准报销的金额为 y 元, 试求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 若某农民一年内自付医疗费为 2600 元(自付医疗费=实际医疗费-按标准报销的金额),则该农民当年实际医疗费为多少元?

(3) 若某农民一年内自付医疗费不少于 4100 元,则该农民当年实际医疗费至少为多少元?

解析: (1) 由题意, 可得 $y = \frac{7}{10}(x - 500)$ ($500 < x \leq 10\,000$).

(2) 设该农民一年内实际医疗费为 x 元, 则当 $x \leq 500$ 时, 不合题意, 当 $500 < x \leq 10\,000$ 时, 有 $500 + (x - 500) \times 0.3 = 2600$, 解之得 $x = 7500$ (元).

(3) 设该农民一年内实际医疗费为 x 元, 因为 $500 + (10\,000 - 500) \times 0.3 = 3350 < 4100$, 所以 $x > 10\,000$. 根据题意有 $500 + (10\,000 - 500) \times 0.3 + (x - 10\,000) \times 0.2 \geq 4100$, 解之得 $x \geq 13\,750$. 所以该农民当年实际医疗费至少为 13 750 元.

11 (2008 济南) 如图 1-11, 教师节来临之际, 群群所在的班级准备向每位辛勤工作的教师献一束鲜花, 每束由 4 枝鲜花包装而成, 其中有象征母爱的康乃馨和象征尊敬的水仙花两种鲜花, 同一种鲜花每枝的价格相同, 请你根据第一、二束鲜花提供的信息, 求出第三束鲜花的价格.

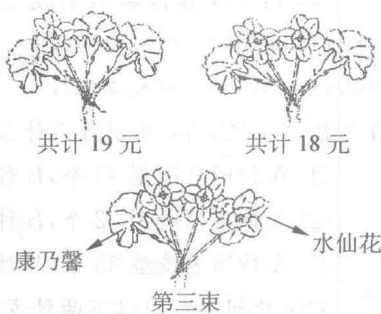


图 1-11

解析: 认真观察图 1-11, 标价 19 元的这束花由 3 枝康乃馨和 1 枝水仙花组成, 标价 18 元的这束花由 2 枝康乃馨和 2 枝水仙花组成, 于是可以建立方程组求出每枝康乃馨和每枝水仙花的价格, 再求第三束花的价格. 设康乃馨每枝 x 元, 水仙花每枝 y 元. 根据题意, 可列方程组 $\begin{cases} 3x + y = 19, \\ 2x + 2y = 18, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases}$ 所以第三束花的价格是 $x + 3y = 5 + 3 \times 4 = 17$ (元).

说明: 本题以教师节为背景, 取材新颖, 给我们一种耳目一新的感觉. 通过实物中的标价, 将这道实物信息问题, 抽象成数学问题, 建立方程组模型来解答, 本题需要有较强的阅读能力、识图能力和信息处理能力.

12 (2008 咸宁) “5·12”四川汶川大地震的灾情牵动全国人民的心, 某市 A、B 两个蔬菜基地得知四川 C、D 两个灾民安置点分别急需蔬菜 240 吨和 260 吨的消息后, 决定调运蔬菜支援灾区. 已知 A 蔬菜基地有蔬菜 200 吨, B 蔬菜基地有蔬菜 300 吨, 现将这些蔬菜全部调往 C、D 两个灾民安置点. 从 A 地运往 C、D 两处的费用分别为每吨 20 元和 25 元, 从 B 地运往 C、D 两处的费用分别为每吨 15 元和 18 元. 设从 B 地运往 C 处的蔬菜为 x 吨.

(1) 请填写下表, 并求两个蔬菜基地调运蔬菜的运费相等时 x 的值;

	C	D	总计
A			200吨
B	x 吨		300吨
总计	240吨	260吨	500吨

(2) 设 A、B 两个蔬菜基地的总运费为 w 元, 写出 w 与 x 之间的函数关系式, 并求总运费最小的调运方案;

(3) 经过抢修, 从 B 地到 C 处的路况得到进一步改善, 缩短了运输时间, 运费每吨减少 m 元 ($m > 0$), 其余线路的运费不变, 试讨论总运费最小的调运方案.

解析: (1) C 地需蔬菜 240 吨, B 地运去 x 吨, A 地只要运去 $(240-x)$ 吨即可. B 地原有蔬菜 300 吨, 运往 A 地 x 吨, 剩下 $(300-x)$ 吨运往 D 地. A 地原有的 200 吨蔬菜中有 $(240-x)$ 吨运往 C 地, 还有 $[200-(240-x)] = (x-40)$ 吨运往 D 地, 于是填表如下:

	C	D	总计
A	$(240-x)$ 吨	$(x-40)$ 吨	200吨
B	x 吨	$(300-x)$ 吨	300吨
总计	240吨	260吨	500吨

A 地的调运运费是 $20(240-x) + 25(x-40)$, B 地的调运运费是 $15x + 18(300-x)$, 由 $20(240-x) + 25(x-40) = 15x + 18(300-x)$, 解得 $x = 200$.

(2) 根据题意, A、B 两个蔬菜基地的总运费为 $w = 20(240-x) + 25(x-40) + 15x + 18(300-x)$, 即 w 与 x 之间的函数关系为 $w = 2x + 9200$.

$$\text{依题意得} \begin{cases} 240-x \geq 0, \\ x-40 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 300-x \geq 0, \end{cases} \text{ 所以 } 40 \leq x \leq 240.$$

由于在 $w = 2x + 9200$ 中, $2 > 0$, 所以 w 随 x 的增大而增大, 故当 $x = 40$ 时, 总运费最小, 此时调运方案如表一:

表一

	C	D
A	200吨	0吨
B	40吨	260吨

(3) 由题意知 $w = (2-m)x + 9200$, 所以 $0 < m < 2$ 时, (2) 中调运方案总运费最小. $m = 2$ 时, 在 $40 \leq x \leq 240$ 的前提下调运方案的总运费不变; $2 < m < 15$ 时, $x = 240$ 时总运费最小, 其调运方案如表二.

表二

	C	D
A	0 吨	200 吨
B	240 吨	60 吨

13 (2008 遵义)某超市销售有甲、乙两种商品.甲商品每件进价 10 元,售价 15 元;乙商品每件进价 30 元,售价 40 元.

(1) 若该超市同时一次购进甲、乙两种商品共 80 件,恰好用去 1600 元,求能购进甲、乙两种商品各多少件?

(2) 该超市为使甲、乙两种商品共 80 件的总利润(利润=售价-进价)不少于 600 元,但又不超过 610 元.请你帮助该超市设计相应的进货方案.

解析: (1) 分析题意后,此问可利用方程组来解,设购进甲种商品 x 件,乙种商品 y 件,根据题意,得
$$\begin{cases} x+y=80, \\ 10x+30y=1600, \end{cases}$$
 解得 $\begin{cases} x=40, \\ y=40, \end{cases}$ 即购进甲种商品 40 件,乙种商品 40 件.

(2) 利用总利润不少于 600 元,但又不超过 610 元这一条件,用不等式组解此问.设购进甲种商品 x 件,则乙种商品为 $(80-x)$ 件,根据题意,得
$$\begin{cases} (15-10)x+(40-30)(80-x) \geq 600, \\ (15-10)x+(40-30)(80-x) \leq 610, \end{cases}$$
 解得 $38 \leq x \leq 40$. 所以共有三种进货方案:甲 38 件,乙 42 件;甲 39 件,乙 41 件;甲 40 件,乙 40 件.

说明: 第(1)问主要考查二元一次方程组的应用;第(2)问主要考查一元一次不等式组的应用.

14 (2008 宁夏)为极大地满足人民日常生活的需求,丰富市场供应,我区农村温棚设施农业迅速发展,温棚种植面积在不断扩大.在耕地上培成一行一行的矩形土埂,按顺序间隔种植不同农作物的方法叫分垄间隔套种.科学研究表明:在塑料温棚中分垄间隔套种高、矮不同的蔬菜和水果(同一种紧挨在一起种植不超过两垄),可提高它们的光合作用效率,提高单位面积的产量和经济效益.

现有一个种植总面积为 540 m^2 的矩形塑料温棚,分垄间隔套种草莓和西红柿共 24 垄,种植的草莓或西红柿单种农作物的总垄数不低于 10 垄,又不超过 14 垄(垄数为正整数),它们的占地面积、产量、利润分别如下:

	占地面积(m^2 /垄)	产量(千克/垄)	利润(元/千克)
西红柿	30	160	1.1
草莓	15	50	1.6

(1) 若设草莓共种植了 x 垄,通过计算说明共有几种种植方案? 分别是哪几种?

(2) 在这几种种植方案中,哪种方案获得的利润最大? 最大利润是多少?

解析: (1) 根据题意西红柿种了 $(24-x)$ 垄, 利用两种作物种植面积的和不超过 540 m^2 , 得 $15x + 30(24-x) \leq 540$, 解得 $x \geq 12$. 题中规定 $x \leq 14$, 且 x 是正整数, 所以 $12 \leq x \leq 14$, 其整数解是 $x = 12, 13, 14$. 即共有三种种植方案, 分别是: 方案一: 草莓种植 12 垄, 西红柿种植 12 垄; 方案二: 草莓种植 13 垄, 西红柿种植 11 垄; 方案三: 草莓种植 14 垄, 西红柿种植 10 垄.

(2) 可以用两种方法考虑.

方法一: 方案一获得的利润 $12 \times 50 \times 1.6 + 12 \times 160 \times 1.1 = 3072$ (元), 方案二获得的利润 $13 \times 50 \times 1.6 + 11 \times 160 \times 1.1 = 2976$ (元), 方案三获得的利润 $14 \times 50 \times 1.6 + 10 \times 160 \times 1.1 = 2880$ (元). 由计算知, 种植西红柿和草莓各 12 垄, 获得的利润最大, 最大利润是 3072 元.

方法二: 若草莓种了 x 垄, 设种植草莓和西红柿共可获得利润 y 元, 则 $y = 1.6 \times 50x + 1.1 \times 160(24-x) = -96x + 4224$. 因为 $k = -96 < 0$, 所以 y 随 x 的增大而减小. 又因为 $12 \leq x \leq 14$, 且 x 是正整数, 所以当 $x = 12$ 时, $y_{\text{最大}} = 3072$ (元).

说明: 这是一道方案决策问题, 它全面考查同学们应用不等式、一次函数的模型解决生活实际问题的能力. 问题中的“不低于、不超过”隐含着不等量关系, 从而可构建不等式. “方案获得的利润最大”可以列举符合问题(1)中的方案进行利润比较, 也可以建立可获得利润 y 元与所种草莓 x 垄之间的一次函数关系, 再应用一次函数性质确定最佳方案.

15 (2008 青海) 王亮同学善于改进学习方法, 他发现对解题过程进行回顾反思, 效果会更好. 某一天他利用 30 分钟时间进行自主学习. 假设他用于解题的时间 x (单位: 分钟) 与学习收益量 y 的关系如图 1-15(1) 所示, 用于回顾反思的时间 x (单位: 分钟) 与学习收益量 y 的关系如图 1-15(2) 所示 (其中 OA 是抛物线的一部分, A 为抛物线的顶点), 且用于回顾反思的时间不超过用于解题的时间.

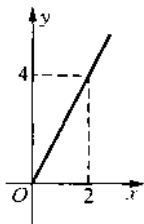


图 1-15(1)

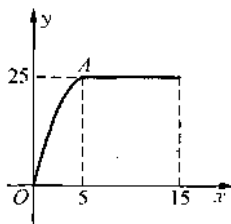


图 1-15(2)

(1) 求王亮解题的学习收益量 y 与用于解题的时间 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 求王亮回顾反思的学习收益量 y 与用于回顾反思的时间 x 之间的函数关

系式;

(3) 王亮如何分配解题和回顾反思的时间,才能使这 30 分钟的学习收益总量最大?

(学习收益总量 = 解题的学习收益量 + 回顾反思的学习收益量)

解析: (1) 观察图 1-15(1), 它是一条以原点为端点的射线, 所以它是正比例函数图象的一部分, 且点 (2, 4) 在这条射线上, 因此, 可设 $y = kx$, 把 (2, 4) 代入, 得 $k = 2$. 所以所求函数解析式为 $y = 2x$. 从图 1-15(1) 中可看出 $x \geq 0$, 由题中的条件知 $x \leq 30$, 所以自变量 x 的取值范围是 $0 \leq x \leq 30$.

(2) 从图 1-15(2) 可以看出, 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, y 与 x 之间关系的图象是以 A 为顶点的抛物线上的一段, 当 $5 \leq x \leq 15$ 时, y 与 x 之间的关系的图象是一条平行于 x 轴的线段, 故要分两种情况求 y 与 x 之间的关系.

当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 设 $y = a(x-5)^2 + 25$, 把 (0, 0) 代入, 得 $25a + 25 = 0$, $a = -1$. 所以 $y = -(x-5)^2 + 25 = -x^2 + 10x$.

当 $5 \leq x \leq 15$ 时, $y = 25$.

$$\text{即 } y = \begin{cases} -x^2 + 10x, & 0 \leq x \leq 5, \\ 25, & 5 \leq x \leq 15. \end{cases}$$

(3) 为求最大的学习收益, 我们要把王亮的学习收益总量表示为时间 x 的函数. 设王亮用于回顾反思的时间为 x ($0 \leq x \leq 15$) 分钟, 学习效益总量为 z , 则他用于解题的时间为 $(30-x)$ 分钟. 由于回顾反思的时间与学习收益量有两种表示方式, 故收益总量也要分两种情况来讨论解决.

当 $0 \leq x \leq 5$ 时,

$$z = -x^2 + 10x + 2(30-x) = -x^2 + 8x + 60 = -(x-4)^2 + 76,$$

所以当 $x = 4$ 时, $z_{\text{最大}} = 76$.

当 $5 \leq x \leq 15$ 时, $z = 25 + 2(30-x) = -2x + 85$.

因为 z 随 x 的增大而减小, 所以当 $x = 5$ 时, $z_{\text{最大}} = 75$.

综上所述, 当 $x = 4$ 时, $z_{\text{最大}} = 76$, 此时 $30-x = 26$, 即王亮用于解题的时间为 26 分钟, 用于回顾反思的时间为 4 分钟时, 学习收益总量最大.

16 (2006 绍兴) 某校部分住校生, 放学后到学校锅炉房打水, 每人接水 2 升, 他们先同时打开两个放水龙头, 后来因故障关闭一个放水龙头. 假设前后两人接水间隔时间忽略不计, 且不发生泼洒, 锅炉内的余水量 y (升) 与接水时间 x (分) 的函数图象如图 1-16 所示.

请结合图象, 回答下列问题:

(1) 根据图中信息, 请你写出一个结论;

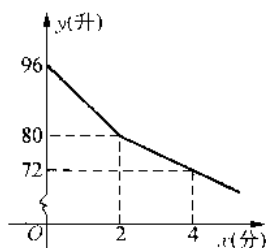


图 1-16