(LL^*)积分

——广义Lebesgue积分

●吕冠国　吕 君　著

科学出版社
www.sciencep.com

(LL^*)积分
——广义 Lebesgue 积分

吕冠国　吕　君　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了一般有界可测集 E 上的 (LL^*) 可积函数. 全书分为 9 章, 其中第 1 章和第 2 章给出了 (LL^*) 积分的定义和所需背景知识的介绍; 第 3 章和第 4 章是 (LL^*) 积分的性质及其证明; 第 5 章和第 6 章是 (LL^*) 积分的可积函数以及 (LL^*) 积分与 (D_*) 积分、(P) 积分和 (D) 积分的关系; 第 7 章和第 8 章是 (LL^*) 积分相关的导数理论和极限定理; 第 9 章则是 (LL^*) 积分的推广.

本书可作为数学专业本科高年级学生和研究生教材, 大学数学专业教师、数学研究人员及相关科学技术研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

(LL*)积分: 广义 Lebesgue 积分/吕冠国, 吕君著. —北京: 科学出版社, 2009
ISBN 978-7-03-023158-1

Ⅰ. L… Ⅱ. ①吕… ②吕… Ⅲ. 实变函数 Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 155678 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 2 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2009 年 2 月第一次印刷 印张: 8
印数: 1—2 000 字数: 150 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新蕾〉)

前　言

积分论起源于17世纪中期，至今已有300多年的历史了. 作为近代数学的重要组成部分，积分论被广泛地应用于自然科学的各个领域.

目前，我们所熟悉的由德国数学家Riemann所提出的(R)积分和由法国数学家Lebesgue所构造的(L)积分已成为了各国高等院校理、工类大学生的必修课程. 两种积分中，(L)积分可看作(R)积分的推广，也较为好用. 但是(L)积分的绝对收敛性也成为了许多数学问题研究工作的瓶颈. 正如英国数学家Henstock所说:“级数的研究若是只考虑绝对收敛级数，是让人难以接受的.”

于是，如何建立一种定义表达简明，性质完善且可积函数广泛的积分便成为很多数学家长期以来潜心研究的关键问题.

20世纪末，数学家们通过不懈地努力，提出了大量的构造非绝对收敛积分的理论和方法. 其中最具代表性的有:1912~1921年由法国数学家Denjoy和前苏联数学家Lusin等构造的狭义Denjoy积分(简称D_*积分)和广义Denjoy积分(简称D积分). 1914年由德国数学家Perron构造的(P)积分. 1958~1962年由英国数学家Henstock构造的广义(R)积分(简称(H)积分). 它们中最完善的要属(H)积分. 在后期的积分理论研究中，人们也发现(D_*)积分、(D)积分以及(P)积分都可以利用(H)积分加以优化和改进.

然而(H)积分本身所具有的局限性至今为止仍无法突破.

本书所讨论的(LL^*)积分与以往的非绝对收敛积分截然不同. 笔者在从事长期的积分理论研究中发现，对一个定义在有界可测集E上的几乎处处有限的可测函数f来说，可定义其(L)积分为

$$(L)\int_E f = (L)\int_E f^+ - (L)\int_E f^-, \tag{1}$$

由于(1)式中的f^+和f^-都是非负可测的，所以(1)式右端两积分总有确定意义. 当(1)式右端两积分均为有限数时，f在E上是(L)可积的，当(1)式右端两积分有一项为有限数，一项为$+\infty$时，f在E上不是(L)可积的. 但其有确定值$+\infty$(或$-\infty$). 当(1)式右端两项均为$+\infty$时，就会出现$(+\infty)-(+\infty)$这种不确定的情况. 笔者通过对上述这种不确定情况出现的原因加以分析，并借鉴和发展了(R)瑕积分的思想理论，从根本上摒弃由$(L)\int_E f^+$和$(L)\int_E f^-$定义$(L)\int_E f$的形式来拓广了(L)积分. 所以(LL^*)积分又可称作广义(L)积分.

(LL*)积分的定义是：设 E 是有界可测集，f 是定义于 E 上的有限可测函数，f 在 E 上的全部第二类瑕点（第二类瑕点定义可参见本书第 1 章第 2 页）所成集为 E_0，$\mu E_0=0$．对任给的 $0<\sigma<\frac{1}{2}\mu E$ 任作开集 $O_{\sigma\lambda}$ 使 $E_0\subset O_{\sigma\lambda}$，因这样的开集很多，故引入第二参量 λ，由这些满足条件的开集所构成的集类，记作 $\{O_{\sigma\lambda}\}$．由每一个 $O_{\sigma\lambda}\in\{O_{\sigma\lambda}\}$ 可诱出 E 的一个可测子集，$E^{\sigma\lambda}=E-(E\cap O_{\sigma\lambda})=E\cap O^{c}_{\sigma\lambda}$．$E^{\sigma\lambda}$ 满足两个特征：①$\mu E-\sigma<\mu E^{\sigma\lambda}\leqslant\mu E$；②$f$ 在 $E^{\sigma\lambda}$ 上无第二类瑕点．由 $E^{\sigma\lambda}$ 所构成的集类，记为 $\{E^{\sigma\lambda}\}$．称 $E^{\sigma\lambda}$ 为 LL*集，而 $\{E^{\sigma\lambda}\}$ 为 LL*集类．如果对任给的 $\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\mu E\right)$，有 f 在每个 LL*集上均(L)可积，记其(L)积分为 $J^{\sigma\lambda}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}}f$，则当 $\lim\limits_{\sigma\to0}J^{\sigma\lambda}=\lim\limits_{\sigma\to0}(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}}f=J$（有限且与 λ 无关）时，称 f 在 E 上是(LL*)可积，且有

$$(\mathrm{LL}^*)\int_E f=\lim_{\sigma\to0}(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}}f=J.$$

为了更进一步描述上面的定义，再看一个具体的例子：

设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，$0<x\leqslant1$，$f(0)=0$ 是定义于$[0,1]$上的函数，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类瑕点（相关证明参见第 2 页瑕点定义和例 1.1）．

上述函数 $f(x)$ 显然在$[0,1]$上不是(L)可积的．此时，由于 $f(x)$ 在$[0,1]$上只有一个第二类瑕点 $x=0$，故对任给的 $0<\sigma<\frac{1}{2}\mu[0,1]$，存在开区间 $(\alpha,\beta)=O_\sigma$，$O_\sigma\supset E_0=\{0\}$，$\beta-\alpha<\sigma$，即

$$\alpha<0<\beta,\quad \beta-\alpha<\sigma.$$

由于满足上述条件的开区间 O_σ 很多，其全体构成一个集类 $\{O_{\sigma\lambda}\}$．今任取一开区间 $(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)\in\{O_{\sigma\lambda}\}$，因 $(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)\cap[0,1]=[0,\beta_\lambda)$，$0<\beta_\lambda<\sigma$，于是可得 LL* 集 $E^{\sigma\lambda}=[\beta_\lambda,1]$．由于 $f(x)$ 在 $E^{\sigma\lambda}$ 上连续，故 f 在 $E^{\sigma\lambda}$ 上(R)可积，同时也(L)可积，并且两积分一样，记之为

$$J^{\sigma\lambda}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}}f(x)=(\mathrm{R})\int_{\beta_\lambda}^{1}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

对上式作代换 $\frac{1}{x}=t$，得

$$J^{\sigma\lambda}=(\mathrm{R})\int_1^{\frac{1}{\beta_\lambda}}\frac{1}{t}\sin t\mathrm{d}t.$$

注意，令 $\sigma\to0$，因而 $\beta_\lambda\to0^+$，所以

$\lim\limits_{\sigma\to0}J^{\sigma\lambda}=\lim\limits_{\beta_\lambda\to0^+}(\mathrm{R})\int_1^{\frac{1}{\beta_\lambda}}\frac{1}{t}\sin t\mathrm{d}t=\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛[2]，即 $\lim\limits_{\sigma\to0}J^{\sigma\lambda}=\int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=$

J(有限且与 λ 无关). 根据(LL^*)积分定义可知 $f(x)$ 在$[0, 1]$上是(LL^*)可积的.

由(LL^*)积分的定义和上述例子不难看出, (LL^*)积分不但是(L)积分的推广, 也是(R)瑕积分的推广. 因此它在保留了(L)积分和(R)瑕积分的较好性质的基础上扩大了可积函数的范围.

笔者在本书中既给出了(LL^*)积分的有关性质的严格证明也给出了与(LL^*)积分相关的导数理论和极限定理. 尤为重要的是, 作者还证明了(LL^*)积分较(D_*)积分、(D)积分、(P)积分以及(H)积分广义. 因此本书的结论在微分学和积分学上都有着重要的意义.

在本书写作过程中, 得到了云南大学汪林教授、屈超纯教授以及云南师范大学林玉波教授、邱达三教授的支持和帮助, 尤其是汪林教授, 他对本书顺利完成助益良多, 特此对他们表示诚挚的谢意. 云南师范大学及云南师范大学数学学院十分关心本书的出版, 用云南省应用基础基金和云南省高等学校人才培养模式改革项目——现代教师教育(数学学科)试点经费资助出版, 本人不甚感激.

作 者

2008 年 2 月

目　　录

第1章　奇点与(LL*)积分定义

本章通过对奇点进行分析，给出(L)积分的拓广. 文中的E，除注明者外，均为一般有界可测集，并用$\cap$表示集合的交，$+$和$\sum$表示集合的并，A^c表示集A的余集；正瑕点、负瑕点、瑕点是三类不同的奇点；$U_\delta(x_0)$是以x_0为心、δ为半径的开球；$\mu(E)$为E的Lebesgue测度.

1.1　奇　　点

这里所说的奇点，是指以下几种点，更确切地说，我们所考虑的函数，如果它有奇点的话，它只有这几种类型的奇点.

1. 平凡奇点

设$f(x)$是定义于有界可测集E上的几乎处处有限的可测函数，说$x_0 \in E$是f的平凡奇点，指的是：(Ⅰ) $f(x_0) = +\infty\ (-\infty)$；(Ⅱ) 当把$f(x)$所有取$+\infty\ (-\infty)$的值一律改成零后，$f(x)$在$x_0$的某限制邻域$\Omega_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \cap E$内有界，即$x_0$为正常点，其中$U_\delta(x_0)$是以$x_0$为心、$\delta$为半径的开球. 根据几乎处处有限的定义，平凡奇点所成的集是一零测集，这对今后要考虑的积分没有影响，故可以先行处理掉，如令$f(x_0)=0$. 因此以后只需讨论处处有限的可测函数. 当然，有限并非有界[1].

2. 正瑕点

设x_0是E的一个聚点(x_0可以不属于E)，记$\Omega_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \cap E$，若存在$\delta_0 > 0$，使得对任给的$0 < \delta \leqslant \delta_0$，$f$在$\Omega_\delta(x_0)$内有限，下有界. 但对任给的$M > 0$，至少有一点$x' \in \Omega_\delta(x_0)$，使$f(x') > M$，则说$x_0$是$f(x)$在可测集$E$上的一个正瑕点. 由正瑕点的定义容易知道，它的特征是：存在$\{x'_n \in \Omega_\delta(x_0)\}$，当$n \to \infty$时，$x'_n \to x_0$，$f(x'_n) \to +\infty$；正瑕点只是$f^+$的奇点. 所以也可以利用这两个特征来定义正瑕点. 另外，利用(L)积分还可把正瑕点分为两类.

$$\begin{cases} \text{第一类正瑕点：(Ⅰ) } x_0 \text{ 是正瑕点，} \\ \qquad\qquad \text{(Ⅱ) 存在 } \delta > 0\text{，使 (L)}\displaystyle\int_{\Omega_\delta(x_0)} |f| = J\text{(有限)；} \\ \text{第二类正瑕点：(Ⅰ) } x_0 \text{ 是正瑕点，} \\ \qquad\qquad \text{(Ⅱ) (L)}\displaystyle\int_{\Omega_\delta(x_0)} |f| = +\infty, \quad \forall \delta > 0. \end{cases}$$

类似可定义负瑕点、第一类负瑕点、第二类负瑕点.

3. 瑕点

设 x_0 是 E 的聚点（x_0 可以不属于 E），对任给的 $\delta>0$，f 在 $\Omega_\delta(x_0)$ 内有限，但存在 $\{x_n'\in\Omega_\delta(x_0)\}$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n'\to x_0$，$f(x_n')\to+\infty$；又存在 $\{x_n''\in\Omega_\delta(x_0)\}$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n''\to x_0$，$f(x_n'')\to-\infty$；这样的奇点 x_0 叫 f 的瑕点．同样的道理，瑕点也可分为两类．

$$\begin{cases}\text{第一类瑕点：(Ⅰ)}\ x_0\ \text{是瑕点}, \\ \qquad\qquad\text{(Ⅱ) 存在}\ \delta>0,\ \text{使}\ (\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|=J(\text{有限})； \\ \text{第二类瑕点：(Ⅰ)}\ x_0\ \text{是瑕点}, \\ \qquad\qquad\text{(Ⅱ)}\ (\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|=+\infty,\quad \forall\delta>0.\end{cases}$$

由以上定义容易推出：

第一类正瑕点、第一类负瑕点、第一类瑕点均满足：

$$\lim_{\delta\to0}(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|=0,$$

即对任给的 $\varepsilon>0$，总存在这样的 $\delta_0>0$，使得当 $0<\delta\leqslant\delta_0$ 时，有

$$0\leqslant(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|<\varepsilon.$$

现在把它们全体所组成的集记为 $E_{①}$，即

$$E_{①}=\{\text{全体第一类正瑕点}+\text{全体第一类负瑕点}+\text{全体第一类瑕点}\},$$

称 $E_{①}$ 中的点为第一类奇点．把全体第二类正瑕点和全体第二类负瑕点所组成的集记为 $E_{②}$，即

$$E_{②}=\{\text{全体第二类正瑕点}+\text{全体第二类负瑕点}\},$$

把全体第二类瑕点构成的集记为 E_0，即 $E_0=\{\text{全体第二类瑕点}\}$，称 $E_0+E_{②}$ 的点为第二类奇点．

例 1.1　$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，$x>0$；$f(0)=0$，则 f 在 $E=[0,1]$ 上有唯一的奇点，且是第二类瑕点．

证　事实上，对任给的 $\sigma>0$，当 $0<\varepsilon<\sigma<1$ 时，

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x&=\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{1}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\int_1^{2\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\\&=a+\left(\int_{2\pi}^{3\pi}+\int_{3\pi}^{4\pi}+\cdots+\int_{(n+2)\pi}^{(n+3)\pi}\right)\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t+\int_{(n+3)\pi}^{s}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\\&=a+\sum_{j=0}^{n}\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin t}{t+j\pi}\mathrm{d}t+\int_{(n+3)\pi}^{s}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中，$a=\displaystyle\int_1^{2\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$，$s=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$(n+3)\pi\leqslant s<(n+4)\pi$.

当$\varepsilon \to 0^+$时，$s \to +\infty$　　$n \to \infty$，$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx \to +\infty$.

1.2　关于(LL*)积分(或CL积分)定义

设E是有界可测集，f是定义于E上的有限可测函数，f在E上的全部第二类瑕点所成的集为E_0，$\mu E_0=0$①. 对任给的$0<\sigma<\frac{1}{2}\mu E$②，任作开集$O_\sigma$，使(1)$E_0 \subset O_\sigma$，(2)$0<\mu O_\sigma<\sigma$③. 显然，对给定的$\sigma>0$，满足(1)(2)的开集$O_\sigma$很多，故引进第二个参量$t$，得集(类)$\{O_{\sigma t}\}$，即对每个$O_{\sigma t}\in\{O_{\sigma t}\}$均满足(1)、(2)，其中，$\sigma$称作控制参数. 此外，每个$O_{\sigma t}\in\{O_{\sigma t}\}$都相应的有一个$E^{\sigma t}=E-(E\cap O_{\sigma t})=E\cap O_{\sigma t}^c$. $E^{\sigma t}$同样有两个特征：①$E^{\sigma t}$是由$O_{\sigma t}$诱出的E的可测子集，且满足$\mu E-\sigma<\mu E^{\sigma t}\leqslant\mu E$，即受$\sigma$控制；②$f$在$E^{\sigma t}$上无第二类瑕点④. 今后把集$E^{\sigma t}$叫做由$O_{\sigma t}$诱出的且受$\sigma$控制的$f$在$E$上的LL*集，简称LL*集. 而以全体LL*集为元素的集(类)记为$\{E^{\sigma t}\}$. 显然，$\{E^{\sigma t}\}$中的所有元素均满足①、②.

(LL*)积分定义

定义1.1　对任给的$\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\mu E\right)$，若(i)$f$在每个LL*集$E^{\sigma t}\in\{E^{\sigma t}\}$上都(L)可积，记$J^{\sigma t}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma t}}f$；(ii)$\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma t}=J$(有限且与$t$无关)，则定义(LL*)$\int_E f=J$，并说$f$在$E$上(LL*)可积.

定义1.2　设E是有界可测集，f是定义在E上的处处有限的可测函数. f在E上的第二类瑕点为$x_1,x_2,\cdots,x_k$.

(1) 对任给的$0<\sigma<\frac{1}{2}\mu E$，对每个$x_i$，任作开域$U_i$，$x_i\in U_i$，$U_i\cap U_j=\varnothing(i\neq j)$，$O_{\sigma\lambda}=\sum\limits_{i=1}^k U_i$，$\mu O_{\sigma\lambda}=\sum\limits_{i=1}^k \mu U_i\leqslant\sigma$；

(2) 记$E^{\sigma\lambda}=E\cap O_{\sigma\lambda}^c$. 若

---

① 若$\mu E_0>0$，且f在E_0上(L)可积，令$E-E_0=E_1$，$f_1=f\cdot X_{E_1}$，先在E上定义f_1的(LL*)积分，若可积，然后加上f在E_0上的(L)积分，作为f在E上的(LL*)积分.

② 因讨论(LL*)积分时，关心的是$\sigma\to 0^+$时的情况，故不妨认为σ是适当小的正数，以后同. 并简记$0<\sigma<\frac{1}{2}\mu E$.

③ 这句话也可以有另一种表述，见附录.

④ $E^{\sigma t}\cap E_0=\varnothing$.

(i) f 在每个 $E^{\sigma\lambda}\in\{E^{\sigma\lambda}\}$ 上都(L)可积, 并记 $J^{\sigma\lambda}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}}f$;

(ii) $\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma\lambda}=J$(有限且与 λ 无关),

则定义$(\mathrm{LL}^*)\int_E f=J$, 并说 f 在 E 上(LL^*)可积.

定义 1.2 是定义 1.1 的特例. 现对 $\mu E_0=0$ 这种情况讨论(LL^*)积分, 以后同.

1.3 奇点分析

由于瑕点在讨论积分时的重要性, 所以先分析瑕点的极限点.

定理 1.1 f 在有界闭集上之瑕点的极限点仍为瑕点.

证 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$ 是 f 在有界闭集 E 上的瑕点, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$. 对任给的 $\delta>0$, 当 n 适当大时, $x_n\in\Omega_\delta(x^*)$.

(1) 当 n 适当大时, 根据瑕点定义, 对每个 x_n, 都存在 $x_n'\in\Omega_{\delta n}(x_n)\subseteq\Omega_\delta(x^*)$, 使 $|x_n'-x_n|<\dfrac{1}{n}$, $f(x_n')>M_n$, $M_n\to+\infty$, 于是

$$|x_n'-x^*|\leqslant|x_n'-x_n|+|x_n-x^*|<\frac{1}{n}+|x_n-x^*|\to 0,\quad f(x_n')\to+\infty.$$

(2) 同理可证存在$\{x_n''\}$, 使 $x_n''\to x^*$, $f(x_n'')\to-\infty$.

定理 1.2 设 f 为定义于有界可测集 E 上的有限可测函数, 只要 f 在 E 上有一个第二类瑕点 x_0, 则 $f\notin L(E)$.

证 反证, 若 $f\in L(E)$, 则 $|f|\in L(E)$. 设 $U=E-\Omega_\delta(x_0)$, 于是

$$(\mathrm{L})\int_E|f|=(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|+(\mathrm{L})\int_U|f|\geqslant(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)}|f|=+\infty.$$

另外, 若 f 在 E 上没有第二类瑕点, 显然应有 $E^{\sigma\lambda}=E$, 于是(LL^*)又回到(L), 故此, 从这个意义上讲, 有

定理 1.3 若 $f\in L(E)$, 则 $f\in\mathrm{LL}^*(E)$.

但是 $f\in\mathrm{LL}^*(E)$, 不一定 $f\in L(E)$. 例如, 前面的例子

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $E=[0,1]$ 上有唯一的第二类瑕点 $x=0$, 此时 $O_{\sigma\lambda}\cap E=[0,\sigma_1)$, $0<\sigma_1\leqslant\sigma$, $E^{\sigma\lambda}=[\sigma_1,1]$, $J^{\sigma\lambda}=\int_1^{\frac{1}{\sigma_1}}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma\lambda}=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 存在[2], 故 $f\in\mathrm{LL}^*(E)$, 但 $f\notin L(E)$.

定理 1.4　设 f 为定义于 E 上的有限可测函数，E 是有界闭集. 若 f 在 E 上有第二类正瑕点(或第二类负瑕点)，则 $f \notin \mathrm{LL}^*(E)$.

证　设 x_0 为 f 的一个第二类正瑕点. 根据定义，x_0 不是瑕点. 又由定理 1.1 知：x_0 也不是第二类瑕点的极限点(因瑕点的极限点仍为瑕点). 这样，当 σ 充分小时，总存在某个 $O_{\sigma\lambda}$，使 $x_0 \notin O_{\sigma\lambda}$. 因此，$x_0$ 只可能是 f 在 $E^{\sigma\lambda}$ 上的第二类正瑕点，记 $U = E^{\sigma\lambda} - \Omega_\delta(x_0)$，于是

$$(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma\lambda}} |f| = (\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)} |f| + (\mathrm{L})\int_U |f| \geqslant (\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(x_0)} |f| = +\infty,$$

即 f 在 $E^{\sigma\lambda}$ 上不是(L)可积的，因而 $f \notin \mathrm{LL}^*(E)$.

引理 1.1　设 f 为定义在 $[a, b]$ 上的有限可测函数，若 f 在 $[a, b]$ 上(L)可积，则 f 在 $[a, b]$ 上(P)可积，且 $(\mathrm{P})\int_a^b f = (\mathrm{L})\int_a^b f$. 又若 f 为非负可测函数，则(L)积分与(P)积分等价.

引理 1.2　设 f 是定义于 $[a, b]$ 上的有限可测函数，若(Ⅰ)在 $[a, b]$ 上的任意闭子区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 上(P)可积；(Ⅱ)当 $\alpha \to a^+, \beta \to b^-$ 时，$\lim (\mathrm{P})\int_\alpha^\beta f = J$(有限)，则 f 在 $[a, b]$ 上(P)可积，且 $(\mathrm{P})\int_a^b f = J$. 反之也对(这两个引理均是已有结果，可见参考文献[3]).

定理 1.5　设 f 为定义于 $[a, b]$ 上的有限可测函数，若 f 在 $[a, b]$ 上(P)可积，则 f 在 $[a, b]$ 上不可能有第二类正瑕点(或第二类负瑕点).

证　反证：不妨设 b 为第二类正瑕点.

(1) 按第二类正瑕点定义，存在 $\delta_0 > 0$，当 $0 < \delta \leqslant \delta_0$ 时，(i) f 在 $\Omega_\delta(b)$ 内有下界，不妨设 $f \geqslant m$，$x \in \Omega_{\delta_0}(b)$；(ii) $(\mathrm{L})\int_{\Omega_{\delta_0}(b)} |f| = +\infty$.

(2) 作函数 $g = f + |m|$，显然 g 在 $\Omega_\delta(b)$ 内非负. f 在 $[a, b]$ 上(P)可积，$|m|$ 在 $[a, b]$ 上当然是(P)可积的，故 g 在 $[a, b]$ 上(P)可积.

(3) 设 $\Omega_{\delta_0}(b)$ 的左端点为 b_0，$b - b_0 = \delta_0$，任取 $b_0 < b' < b$，$\delta = b - b' \leqslant \delta_0$，由于 f 在 $[a, b]$ 上(P)可积，故 f 在 $[b', b]$ 上也(P)可积，从而 g 亦然.

(4) 因 g 在 $[b', b]$ 上非负，故 g 在 $[b', b]$ 上也(L)可积.

(5) 但 $g = |g| \geqslant |f| - |m|$，$x \in [b', b]$，于是

$$(\mathrm{P})\int_{b'}^b g = (\mathrm{L})\int_{b'}^b g \geqslant (\mathrm{L})\int_{b'}^b |f| - |m|(b - b') = +\infty.$$

这个矛盾说明 f 在 $[a, b]$ 上不可能有第二类正瑕点. 对于第二类负瑕点的情况可完全类似证明.

定理 1.6　设 f 是定义于 $[a, b]$ 上的有限可测函数，它在 $[a, b]$ 上有唯一的

奇点，且是第一类正瑕点(或第一类负瑕点)，则 f 在 $[a,b]$ 上的(P)积分与(L)积分等价.

证　不妨设 b 为唯一的奇点，且是第一类正瑕点. 只要证明：若 f 在 $[a,b]$ 上(P)可积，则它也(L)可积就行了.

(1) 按第一类正瑕点定义：存在 $\delta_0>0$，使得当 $0<\delta<\delta_0$ 时，(i) f 在 $\Omega_\delta(b)$ 内有下界，不妨设 $f\geqslant m_1\ (x\in\Omega_{\delta_0}(b))$；(ii) $(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(b)}|f|=J$(有限)，从而 $\lim\limits_{\delta\to0}(\mathrm{L})\int_{\Omega_\delta(b)}|f|=0$.

(2) 因 f 在闭集 $E=[a,b]-\Omega_\delta(b)$ 上无奇点，故 f 在 E 上有界，设 $f\geqslant m_2\ (x\in E)$，今取 $m=\min\{m_1,m_2\}$，则 f 在 $[a,b]$ 上有下界 m.

(3) 函数 $g=f+|m|\geqslant0$，$x\in[a,b]$. 因 f 在 $[a,b]$ 上(P)可积，$|m|$ 当然是(P)可积的，故 g 在 $[a,b]$ 上(P)可积. 但 $g\geqslant0$，故 g 在 $[a,b]$ 上(L)可积，又因为 $f=g-|m|$，故 f 在 $[a,b]$ 上(L)可积，于是由引理 1.1 又得 $(\mathrm{L})\int_a^b f=(\mathrm{P})\int_a^b f$.

对于第一类负瑕点的情况可类似证明.

定理 1.7　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的有限可测函数，它在 $[a,b]$ 上有唯一的奇点，且是第一类瑕点，则 f 在 $[a,b]$ 上(L)可积，从而也(P)可积，且两积分相等.

证　仍不妨假定 b 为第一类瑕点，取 $E=[a,b]-\Omega_{\delta_0}(b)$，则 f 在 E 上有界. 设 $|f|\leqslant m$，$x\in E$，故 f 在 E 上(L)可积，又 $|f|$ 在 $\Omega_{\delta_0}(b)$ 上(L)可积，所以 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上(L)可积，从而 f 在 $[a,b]$ 上(L)可积，进而由引理 1.1 知 f 在 $[a,b]$ 上(P)可积，且 $(\mathrm{L})\int_a^b f=(\mathrm{P})\int_a^b f$.

显然，定理 1.7 和定理 1.6 均可推广到第一类奇点为有限个甚至可列个的情形. 下面的定理 1.8 已完全包含这种情形.

定理 1.8　设 f 为定义于 $[a,b]$ 上的有限可测函数，f 在 $[a,b]$ 上的全部奇点都属于 $E_{①}$(第一类瑕点，第一类正瑕点，第一类负瑕点)，则 f 在 $[a,b]$ 上(L)可积.

证　(1) 先把 f 简单延拓到 $[a',b']\supset[a,b]$(例如，当 $x>b$ 或 $x<a$ 时，均令 $f(x)=0$)，这样，f 在 $[a',b']$ 上也只有属于 $E_{①}$ 的奇点.

(2) 按定义，对每个 $x\in[a,b]$，或 $x\in E_{①}$，或 x 为 $[a,b]$ 的正常点，故存在 $\Omega_\delta(x)=(\alpha,\beta)$，使 $(\mathrm{L})\int_\alpha^\beta|f|$ 有限，因区间集 $\{(\alpha,\beta)\}$ 覆盖 $[a,b]$，根据有限覆盖定理，存在有限个区间 (α_n,β_n)，$n=1,2,\cdots,k$，它们仍然覆盖 $[a,b]$，于是

$$(\mathrm{L})\int_a^b |f| \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{L})\int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f| < +\infty.$$

注1.1　因为把有界可测集 E 上的有限可测函数 f 简单延拓(即 $x\notin E$ 时，令 $f(x)=0$)到有界闭域后，不改变 f 的奇点和(L)积分的情况，故本定理对有界可测集也成立，并可视有界可测集为有界闭域.

小结　通过对奇点的分析，可以得到下面原则性的结论：

(1) 第一类奇点不影响(L)、(LL*)、(P)积分的可积性.

(2) 第二类正瑕点，第二类负瑕点是本质性的奇点，即若 f 在 E 上有了它，不但 f 不是(L)可积的，也不是(LL*)可积的. 当 $E=[a,b]$ 时，也不是(P)可积的. 因此，如果我们只考虑(LL*)可积的话，可以一开始就假定 f 在 E 上无第二类正(负)瑕点.

(3) 对于第二类瑕点，情况特别，即当 f 在 E 上有第二类瑕点时，f 不是(L)可积的，但有可能是(LL*)可积的，当 $E=[a,b]$ 时，也有可能是(P)可积的. (LL*)积分的引进，也正是基于这点，(LL*)积分比(L)积分广义. 但注意，并非对所有的第二类瑕点都能够推广的，如 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$，$0<x\leqslant 1$；$f(0)=0$. 它有唯一的第二类瑕点 $x=0$，但它不是(L)可积的，也不是(LL*)可积的. 事实上，

$$J^{\sigma\lambda} = (\mathrm{L})\int_{\sigma_1}^{1} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos\frac{1}{\sigma_1}, \quad 0<\sigma_1\leqslant\sigma.$$

显然，$\lim\limits_{\sigma\to 0} J^{\sigma\lambda}$ 不存在，故 $f\notin \mathrm{LL}^*([0,1])$.

由以上结论，并注意(L)积分的绝对连续性和定理1.8，实际上已证得.

定理1.9　设 f 为定义于有界可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数，则 f 在 E 上(L)可积的必要充分条件是：f 在 E 上至多只有第一类奇点.

1.4　$\{E^{\sigma s}\}$ 的性质

设 f 为定义在有界可测集 E 上的有限可测函数，根据前面的小结，在讨论 f 的(LL*)可积性时，无妨设 f 在 E 上无第二类正(负)瑕点，但有第二类瑕点，且全部第二类瑕点所成的集为 E_0，$\mu E_0=0$. 于是，对任给的 $\sigma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\mu E\right)$，任作开集 O_σ，使① $O_\sigma\supset E_0$；② $0<\mu O_\sigma<\sigma$. 对给定的 σ，由于满足①、②的开集很多，故引进另一个参数 s，得 $O_{\sigma s}$，从而，以所有满足①、②的开集为元素，便构成集(类)$\{O_{\sigma s}\}$，即$\{O_{\sigma s}\}$中每个元素 $O_{\sigma s}$ 都满足①、②. 另外，对给定的 $\sigma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\mu E\right)$，每个 $O_{\sigma s}\in\{O_{\sigma s}\}$ 都诱导出一个 LL*集

$$E^{\sigma s} = E - (E \cap O_{\sigma s}) = E \cap O^{c}_{\sigma s}.$$

$E^{\sigma s}$同样具有两个特征：

(1) 它是由满足条件①、②的开集诱导出来的，且有

$$\mu E - \sigma < \mu E^{\sigma s} \leqslant \mu E;$$

(2) f 在 $E^{\sigma s}$ 上既无第二类正(负)瑕点，又无第二类瑕点，因而由定理 1.8 知：f 在 $E^{\sigma s}$ 上(L)可积.

这样，对任给的 $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\mu E\right)$，由 $\{O_{\sigma s}\}$ 诱导出 $\{E^{\sigma s}\}$，若记 $A(\sigma) = \{E^{\sigma s}\}$，一般讲当 $\sigma_1 \neq \sigma$ 时，$A(\sigma_1) \neq A(\sigma)$，设 $0 < \sigma_1 < \sigma < \sigma' = \sigma_1 + \sigma < \frac{1}{2}\mu E$，现讨论 $A(\sigma_1) = \{E^{\sigma_1 r}\}$，$A(\sigma) = \{E^{\sigma s}\}$，$A(\sigma') = \{E^{\sigma' t}\}$ 之间的关系，简称 $\{E^{\sigma s}\}$ 的性质.

性质 1.1 $\{E^{\sigma_1 t}\} \subseteq \{E^{\sigma s}\}$.

证 任取 $E^{\sigma_1 r_1} \in \{E^{\sigma_1 r}\}$，由于 $E^{\sigma_1 r_1}$ 是由满足①、②的开集 $O_{\sigma_1 r_1}$ 诱导出来的，且因 $0 < \sigma_1 < \sigma < \frac{1}{2}\mu E$，所以 $\mu E - \sigma < \mu E - \sigma_1 < \mu E^{\sigma_1 r_1} \leqslant \mu E$，即有

(1) $\mu E - \sigma < \mu E^{\sigma_1 r_1} \leqslant \mu E$;

(2) f 在 $E^{\sigma_1 r_1}$ 上(L)可积.

故 $E^{\sigma_1 r_1} \in \{E^{\sigma s}\}$.

性质 1.2 在 $\{E^{\sigma_1 r}\}$ 和 $\{E^{\sigma s}\}$ 中各任取一元 $E^{\sigma_1 r}$ 和 $E^{\sigma s}$，并作其并集

$$\widetilde{E} = E^{\sigma_1 r} + E^{\sigma s}, \tag{1.1}$$

则 $\widetilde{E} \in \{E^{\sigma_1 r}\}$.

证 (1)

$$\begin{aligned}\widetilde{E} &= E^{\sigma_1 r} + E^{\sigma s} = E \cap O^{c}_{\sigma_1 r} + E \cap O^{c}_{\sigma s} = E \cap (O^{c}_{\sigma_1 r} + O^{c}_{\sigma s}) \\ &= E \cap (O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s})^{c} = E - (E \cap (O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s})).\end{aligned} \tag{1.2}$$

(2) 因 $O_{\sigma_1 r}$ 和 $O_{\sigma s}$ 都是包含 E_0 的开集，故 $O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s}$ 亦然. 另外，由于 E_0 非空，故 $0 < \mu(O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s}) \leqslant \mu O_{\sigma_1 r} < \sigma_1$，所以 $O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s} \in \{O_{\sigma_1 r}\}$，进而由(1.2)式易知，$\widetilde{E}$ 是由开集 $O_{\sigma_1 r} \cap O_{\sigma s}$ 诱导出来的，并满足：① $\mu E - \sigma_1 < \mu \widetilde{E} \leqslant \mu E$；② f 在 $\widetilde{E}$ 上(L)可积，故 $\widetilde{E} \in \{E^{\sigma_1 r}\}$.

若记 $\widetilde{E} = E^{\sigma_1 \lambda}$，显然有 $\{E^{\sigma_1 \lambda}\} \subseteq \{E^{\sigma_1 r}\} \subseteq \{E^{\sigma s}\}$.

由性质 1.1 和性质 1.2 得下面两个关系式：

(i) $\{E^{\sigma_1 r}\} \subseteq \{E^{\sigma s}\}$; $\qquad$ (1.3)

(ii) 又由(1.1)式知，对任一 $E^{\sigma s}\in\{E^{\sigma s}\}$，至少有一个 $E^{\sigma_1\lambda}\in\{E^{\sigma_1 r}\}$，使

$$E^{\sigma s}\subseteq E^{\sigma_1\lambda}. \tag{1.4}$$

性质 1.3　任取 $E^{\sigma_1 r}\in\{E^{\sigma_1 r}\}$，$E^{\sigma s}\in\{E^{\sigma s}\}$，并作其交集

$$E_*=E^{\sigma_1 r}\cap E^{\sigma s},$$

则 $E_*\in\{E^{\sigma' t}\}$，其中 $\sigma'=\sigma_1+\sigma\leqslant 2\sigma$.

证　(1)

$$\begin{aligned}E_*&=E\cap O_{\sigma_1 r}^{c}\cap O_{\sigma s}^{c}=E\cap(O_{\sigma_1 r}+O_{\sigma s})^{c}\\&=E-(E\cap(O_{\sigma_1 r}+O_{\sigma s})).\end{aligned} \tag{1.5}$$

(2)因开集 $O_{\sigma_1 r}$ 和 $O_{\sigma s}$ 都包含 E_0，所以开集 $O_{\sigma_1 r}+O_{\sigma s}$ 亦然. 另外，

$$0<\mu(O_{\sigma_1 r}+O_{\sigma s})\leqslant\sigma+\sigma_1=\sigma'. \tag{1.6}$$

所以，由(1.5)式和(1.6)式易知：E_* 是由包含 E_0 的开集 $O_{\sigma_1 r}+O_{\sigma s}$ 诱导出来的，并有 $\mu E-\sigma'<\mu E_*\leqslant\mu E$；$f$ 在 E_* 上无第二类瑕点，故 $E_*\in\{E^{\sigma' t}\}$. 若记 $E_*=E_*^{\sigma'\lambda}$，显然有第三个关系式

(iii) $\{E_*^{\sigma'\lambda}\}\subseteq\{E^{\sigma' t}\}$. $\quad$ (1.7)

1.5　几 个 引 理

引理 1.3　设 $J^{\sigma s}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma s}}f$，$\underline{J^{\sigma}}=\inf\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$，$\overline{J^{\sigma}}=\sup\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$，则 $\lim\limits_{\sigma\to 0-}\underline{J^{\sigma}}=\lim\limits_{\sigma\to 0}\overline{J^{\sigma}}=J$ 与 $\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma s}=J$(与 s 无关)等价，其中 J 为有限数.

证　(1)因 $\underline{J^{\sigma}}\leqslant J^{\sigma s}\leqslant\overline{J^{\sigma}}$(与 s 无关)，所以当 $\lim\limits_{\sigma\to 0-}\underline{J^{\sigma}}=\lim\limits_{\sigma\to 0}\overline{J^{\sigma}}=J$ 时，$\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma s}=J$(与 s 无关).

(2) 若 $\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma s}=J$(与 s 无关)，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma_0>0$，当 $0<\sigma<\sigma_0$ 时，有

$$J-\varepsilon<J^{\sigma s}<J+\varepsilon\quad(\text{与 } s \text{ 无关}). \tag{1.8}$$

记 $\underline{J^{\sigma}}=\inf\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$，$\overline{J^{\sigma}}=\sup\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$. 根据确界原理，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $J^{\sigma s'}$ 和 $J^{\sigma s''}$ 属于 $\{J^{\sigma s}\}$，使得

$$\overline{J^{\sigma}}<J^{\sigma s'}+\varepsilon,\quad \underline{J^{\sigma}}>J^{\sigma s''}-\varepsilon.$$

于是由(1.8)式右端不等式取 $s=s'$，得 $\overline{J^{\sigma}}<J+2\varepsilon$. 同理，由(1.8)式左端不等式取 $s=s''$ 得 $\underline{J^{\sigma}}>J-2\varepsilon$，合并得

$$J-2\varepsilon<\underline{J^{\sigma}}\leqslant\overline{J^{\sigma}}<J+2\varepsilon.$$

由 ε 任意性，便得

$$\lim_{\sigma\to 0}\underline{J^{\sigma}}=\lim_{\sigma\to 0}\overline{J^{\sigma}}=J.$$

本引理说明：当把$\lim\limits_{\sigma\to 0}J^{\sigma s}=J$(有限，与 s 无关)作为f在 E 上(LL*)积分定义时，$\lim\limits_{\sigma\to 0-}\underline{J}^{\sigma}=\lim\limits_{\sigma\to 0}\overline{J}^{\sigma}=J$(有限)便成为$f$在 E 上(LL*)可积的充分必要条件. 所以，也可用后者作(LL*)积分定义.

引理 1.4　设 $0<\sigma_1<\sigma<\dfrac{1}{2}\mu E$，$J^{\sigma_1 r}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma_1 r}}=f$，$J^{\sigma s}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma s}}f$，$\underline{J}^{\sigma_1}=\inf\limits_{r}\{J^{\sigma_1 r}\}$，$\overline{J}^{\sigma_1}=\sup\limits_{r}\{J^{\sigma_1 r}\}$，$\underline{J}^{\sigma}=\inf\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$，$\overline{J^{\sigma}}=\sup\limits_{s}\{J^{\sigma s}\}$，则

$$\underline{J}^{\sigma}\leqslant\underline{J}^{\sigma_1}\leqslant\overline{J^{\sigma_1}}\leqslant\overline{J}^{\sigma}.\tag{1.9}$$

证　由性质 1.1 知$\{E^{\sigma_1 r}\}\subseteq\{E^{\sigma s}\}$，从而有$\{J^{\sigma_1 r}\}\subseteq\{J^{\sigma s}\}$，因而由确界性质得

$$\underline{J}^{\sigma}\leqslant\underline{J}^{\sigma_1}\leqslant\overline{J^{\sigma_1}}\leqslant\overline{J}^{\sigma}.$$

本引理说明：当σ减小时，$\underline{J}^{\sigma}$不减，$\overline{J}^{\sigma}$不增. 特别，若$\{J^{\sigma s}\}$有界，即存在$M>0$和某个$\sigma\in\left(0,\dfrac{1}{2}mE\right)$，使$\{J^{\sigma s}\}\leqslant M$(与 s 无关)，则当$\sigma\to 0$时，$\underline{J}^{\sigma}$和$\overline{J}^{\sigma}$都存在有限的极限.

引理 1.5　设 $0<\sigma_1<\sigma$，$\sigma_1+\sigma=\sigma'<\dfrac{1}{2}\mu E$，记 $E^{\sigma'\lambda}_{*}=E^{\sigma_1 r}\cap E^{\sigma s}$，$J^{\sigma'\lambda}_{*}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma'\lambda}_{*}}f$. 若(LL*)$\int_E=J$(有限)，则$\lim\limits_{\sigma'\to 0}J^{\sigma'\lambda}_{*}=J$(有限，与 λ 无关). 反之，若$\lim\limits_{\sigma'\to 0}J^{\sigma'\lambda}_{*}=J$(有限，与 λ 无关)，则(LL*)$\int_E f=J$.

证　先证正命题.

(1) 因(LL*)$\int_E f=J$(有限)，故对任给的$\sigma'\in\left(0,\dfrac{1}{2}\mu E\right)$，存在$\{E^{\sigma' t}\}$，$\{J^{\sigma' t}\}$，其中，$J^{\sigma' t}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma' t}}f$. $\underline{J}^{\sigma'}=\inf\limits_{t}\{J^{\sigma' t}\}$，$\overline{J^{\sigma'}}=\sup\limits_{t}\{J^{\sigma' t}\}$，使

$$\underline{J}^{\sigma'}\leqslant J^{\sigma' t}\leqslant\overline{J}^{\sigma'}\quad(\text{与 } t \text{ 无关}).$$

又由性质 1.3 知$\{E^{\sigma'\lambda}_{*}\}\subseteq\{E^{\sigma' t}\}$，故$\{J^{\sigma'\lambda}_{*}\}\subseteq\{J^{\sigma' t}\}$，所以更有

$$\underline{J}^{\sigma'}\leqslant J^{\sigma'\lambda}_{*}\leqslant\overline{J^{\sigma'}},\tag{1.10}$$

其中，$J^{\sigma'\lambda}_{*}=(\mathrm{L})\int_{E^{\sigma'\lambda}_{*}}f$.

(2) 因(LL*)$\int_E f=J$(有限)，所以$\lim\limits_{\sigma'\to 0-}\underline{J}^{\sigma'}=\lim\limits_{\sigma'\to 0}\overline{J}^{\sigma'}=J$，从而由(1.10)式得

$$\lim_{\sigma'\to 0}J^{\sigma'\lambda}_{*}=J\quad(\text{与 } \lambda \text{ 无关}).$$

再证逆命题.

(3) 因$\lim\limits_{\sigma'\to 0}J^{\sigma'\lambda}_{*}=J$(有限，与 λ 无关)，故对任给的$\varepsilon>0$，存在$\sigma_0>0$，当$0<\sigma'<\sigma_0$时，有