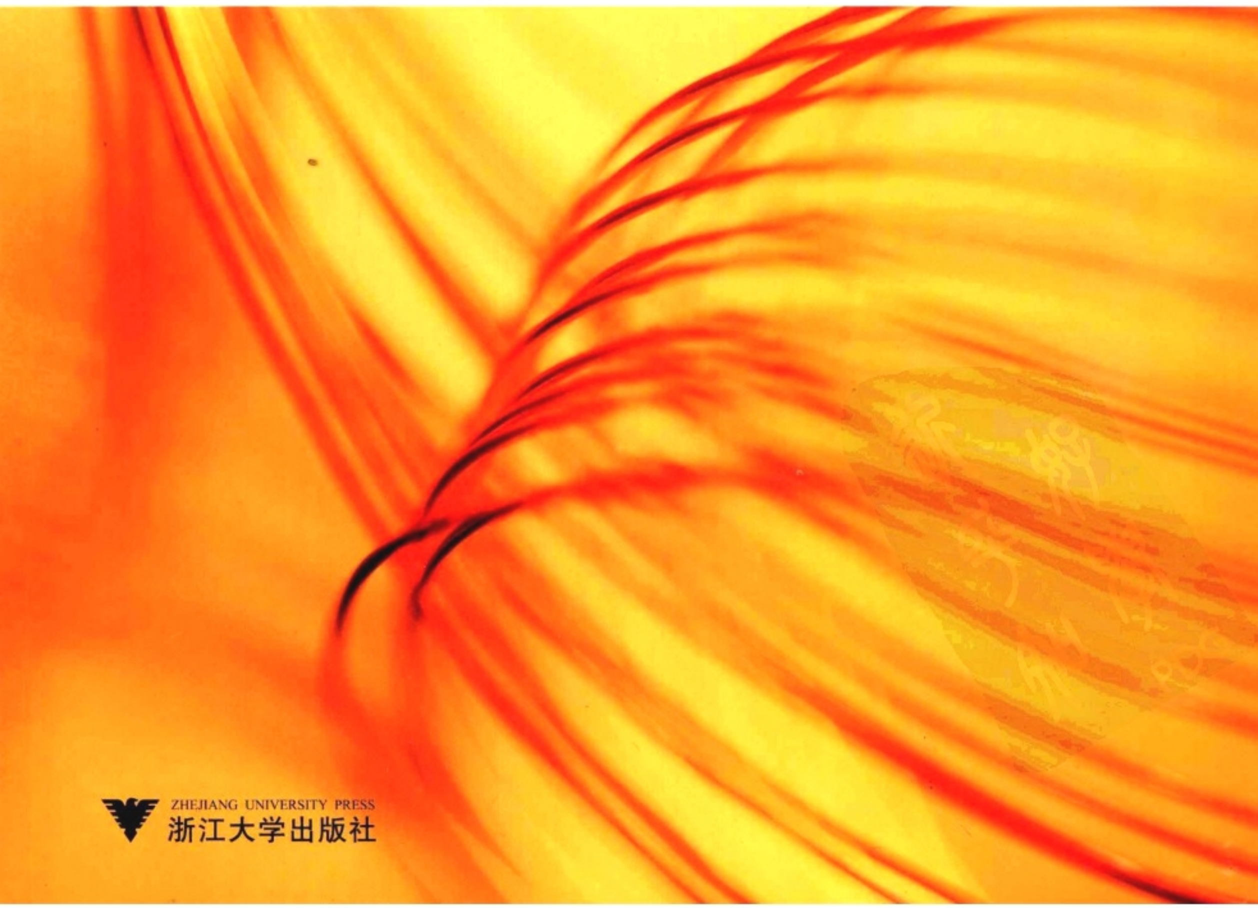
高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编　陶平生　冯跃峰　边红平

ZHOUQIHANSHU HE ZHOUQISHULIE

周期函数和周期数列

李世杰 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

- ★ 数学结构思想及解题方法
- ★ 图论方法
- ★ 组合构造
- ★ 代数变形
- ★ 极值问题
- ★ 染色与染色方法
- ★ 周期函数和周期数列
- ★ 递推与递推方法

ISBN 978-7-308-06101-8

9 787308 061018 >

定价：15.00 元

高中数学竞赛专题讲座

周期函数和周期数列

李世杰　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座.周期函数和周期数列/李世杰主编.—杭州:浙江大学出版社,2008.7
ISBN 978-7-308-06101-8

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 097182 号

高中数学竞赛专题讲座(周期函数和周期数列)

李世杰 主编

责任编辑	黄娟琴
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn) (网址:http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话:0571-88925592,88273066(传真)
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	9.25
字　　数	191 千
版 印 次	2008 年 7 月第 1 版 2008 年 9 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-06101-8
定　　价	15.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

丛书编委会

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来,反响强烈,深受广大读者喜爱,并收到了大量反馈信息。很多读者,包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见,希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求,我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种:《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》;考虑到配套,把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传授数学思想方法,侧重培养学生的逻辑思维能力,不唯解题而解题;

2. 本着少而精的原则选择材料,不搞题海战术,不追求大而全,而是以点带面,举一反三;

3. 以数学修养和能力培养为立意,通过深刻剖析问题的数学背景,挖掘数学内涵,培养学生的数学品格和解决实际问题的能力;

4. 在注重基础知识训练同时,有适当程度的拔高,对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编;参加编写的成员是:陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限,书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目　录

第1讲 函数的周期性

1 周期函数的定义

知识扫描

Ⅰ. 定义

对于函数$f(x)$,如果存在一个非零常数T,使得当x取定义域内的每一个值时,都有$f(x+T)=f(x)$,那么函数$f(x)$叫做周期函数,非零常数T叫做这个函数的周期.

对于一个周期函数$f(x)$,如果在它所有的周期中存在一个最小的正数,那么这个最小的正数就叫做$f(x)$的最小正周期.

Ⅱ. 周期函数的性质与特征

对于周期函数,要了解它的如下一些性质:

(1) 周期函数的定义域D至少是一端无界的点集,它可以是连续的,也可以是间断的,甚至可以是离散的无界点集.

由$f(x+T)=f(x)$可得出:若$x\in D$,则也有$x+nT\in D(n\in\mathbf{N})$,说明$D$至少一端是无界的.而函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=2n,\\ 2, & x=2n-1,\end{cases}(x\in\mathbf{N}^*).$$

容易证明它是周期函数,最小正周期为2,其定义域为正整数集.说明周期函数的定义域

不一定向正负两端同时无限延伸，可以一端有界.

显然，定义域为两端有界的函数，如 $y=\sin x, x\in[-8\pi,6\pi]$不是周期函数.

(2) 周期函数值域中的每一个元素，必定无限次被取到，所以任何严格的单调函数都不是周期函数.

(3) 周期函数的周期有无数多个.

若 T 是$f(x)$的一个周期，则 $nT(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$ 均为$f(x)$的周期. 因为由 $f(x+T)=f(x)$可推出 $f(x+nT)=f(x)$.

但 $nT(n\in\mathbf{Z},n\neq 0)$未必是$f(x)$的周期，即周期函数不一定同时有正负周期. 如函数 $f(x)=\sin(\sqrt{x})^2$，$2\pi,4\pi,\cdots$，都是它的周期，但-2π不是此函数的周期.

事实上，当 $x=0$ 时，$x+(-2\pi)=-2\pi<0$，不在此函数的定义域$[0,+\infty)$内，所以$f[x+(-2\pi)]$无意义.

(4) 最小正周期 T 首先是一个周期，另外还满足：若 T'是任一正周期，则有 $0<T\leqslant T'$.

但周期函数不一定有最小正周期. 如常数函数$f(x)=1$，全体正实数都是它的正周期，但无最小正周期. 因为全体正实数没有最小数. 函数$f(x)=\cos(\sqrt{-x})^2$ 只有负周期 $-2k\pi,k\in\mathbf{N}$，没有正周期.

(5) 若$f(x)$是周期函数，则其绝对值函数$|f(x)|$一定是周期函数，但其逆命题不真. 如函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi\\ 1, & x<-\pi \text{ 或 } x>2\pi\end{cases}$，容易证明$|f(x)|$是周期函数，但$f(x)$不是周期函数.

(6) 若 T_1,T_2 是周期函数$f(x)$的两个周期，人们通常认为 T_1/T_2 是整数或有理数，但实际上 T_1/T_2 可能等于任何非零实数.

例：$g(x)=2008, x\in(0,0.5)\cup[1,+\infty)$. 用周期函数的定义，不难证明，$g(x)$ 的所有周期的集合 $T\in[1,+\infty)$，取 T_2 等于 1，则 $T_1/T_2\in[1,+\infty)$.

(7) 图像重复出现的函数不一定是周期函数.

如：函数 $y=x-[x](x\in[-3,3])$的图像重复出现，但它不是周期函数.

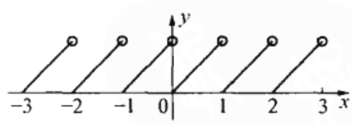


图 1-1-1

(8) 高中课本中的周期函数的定义是广义的，因为从整体上看，这样的周期函数的图像并不一定是周而复始的.

如：函数$f(x)=\frac{1}{2}, x\in A$，其中

$$A=\sum_{n=1}\left(\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right]\right).$$

因为任取 $x\in\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right](n\in\mathbf{N}^*)$,

有 $-(n-1)\leqslant x+1\leqslant -(n-1)+\frac{1}{n+1}<-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1}$,

所以 $x+1\in\left[-(n-1),-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1}\right]\subset A$,则 $f(x+1)=\frac{1}{2}$.

又因为任取 $x\in\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right](n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $n\leqslant x+1\leqslant n+\frac{n}{n+1}<n+\frac{n+1}{(n+1)+1}$,

故 $x+1\in\left[n,n+\frac{n+1}{n+2}\right]\subset A$,则 $f(x+1)=\frac{1}{2}$.

可见,对于任意 $x\in A$,总有 $f(x+1)=f(x)=\frac{1}{2}$.

所以该函数是周期函数且有周期 $T=1$,虽然它的函数值按照一定规律重复出现,可是它的图像从整体上看并不重复出现.

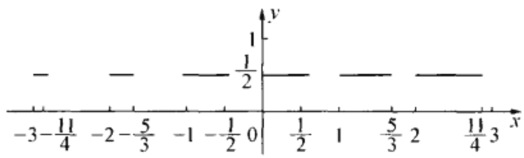


图 1-1-2

不仅如此,像著名的狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1,(\text{当 } x \text{ 为有理数时})\\0,(\text{当 } x \text{ 为无理数时})\end{cases}$,它的周期是非零的任何有理数,可是它的图像却无法画出.

可见,对于满足 $f(x+T)=f(x)$ 的周期函数 $f(x)$,一个必要条件是函数值必须单向周期性地无限多次重复出现.因此在能够画出函数图像的前提下,周期函数的这一必要条件等价于周期函数的图像($T<0$ 时向左,$T>0$ 时向右)单向周期性地无限多次重复出现.这说明周期函数的图像重复出现是有方向性的、局部的,从整体上看并不一定是周而复始的.

如图 1-1-2 中的函数 $f(x)$,它的最小正周期为 $T=1$,它在 $(0,0.5)$ 内的图像,沿 x 轴正方向在区间 $(1,1.5)$,$(2,2.5)$,$(3,3.5)$,…中不断地重复出现;它在 $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ 内的图像,沿 x 轴正方向在区间 $\left(2,2\frac{5}{3}\right)$,$\left(3,3\frac{5}{3}\right)$,…中不断地重复出现……

一般地，设周期函数$f(x)$的定义域为D，一个周期为T，则对任意$x\in D$，有$x+T\in D$，$f(x+T)=f(x)$，所以

(1) 若$f(x)$只有正周期，则$f(x)$的图像沿x轴正方向无限多次重复出现；

(2) 若$f(x)$只有负周期，则$f(x)$的图像沿x轴负方向无限多次重复出现；

(3) 若$f(x)$同时有正、负周期，则$f(x)$的图像沿x轴正、负方向无限多次重复出现.

只有在第三种情况下，周期函数的整体性质是它在任一周期内的性质进行周期延拓的结果，这时研究函数的性态，可局限在某一周期内讨论. 作它的图像，也只要作出它在某一个周期内的图像，然后向左、右按周期平移就可得到函数的整个图像，这是我们要研究的理想的周期函数，前面两种情况下的周期函数，需要增加一定的条件，才能达到这一理想的层次水平.

下面我们只研究在高考和数学竞赛中出现的理想的周期函数，反映在函数图像上，每过一个周期必定重复出现. 因此，作这种周期函数的图像，只要作出一个周期内的图像，再利用周期性向左右平移扩展，就得到整个定义域内的图像.

Ⅲ. 函数周期性的判定

(1) 若函数$f(x)$的最小正周期为T'，则$f(ax+b)(a\neq 0)$的最小正周期为$\frac{T'}{|a|}$.

(2) 周期函数$f(x)$与$g(x)$定义于同一集合D上，T_1，T_2分别为其正周期，若$\frac{T_1}{T_2}$为有理数，则$f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$也为周期函数.

特别地，设$f_1(x)$的一个周期为$T_1=pa$，$f_2(x)$的一个周期为$T_2=qa$，p，q为正整数且$(p,q)=1$，a为正实数. 则pqa是函数$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$的一个周期.

证明 因为$f(x+pqa)=f_1(x+pqa)+f_2(x+pqa)=f_1(x+qT_1)+f_2(x+pT_2)=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$，所以$pqa$是$f(x)$的一个周期.

注：如果T_1，T_2分别是$f_1(x)$，$f_2(x)$的最小正周期，且对于任何$0<\beta<pqa$，$f_2(x+\beta)\neq f_2(x)$或$f_1(x+\beta)\neq f_1 x)$，则pqa也是$f_1(x)+f_2(x)$的最小正周期.

(3) 若$y=f(x)$在定义域A上保号(恒非负或恒非正)，且$y=f^{\alpha}(x)$(α为非零有理数)也在A上保号，则$y=f(x)$与$y=f^{\alpha}(x)$在A上有相同的周期.

这是因为，对任意的x_1、$x_2\in A$，若$f(x_1)=f(x_2)$，则有$f^{\alpha}(x_1)=f^{\alpha}(x_2)$，若有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则有$f^{\alpha}(x_1)\neq f^{\alpha}(x_2)$，因而有相同的周期.

(4) 若$f(x)$是周期函数，则复合函数$\phi[f(x)]$仍为周期函数. 但周期可能不相同，如$f(x)=\sin x$与$y=|\sin x|$的最小正周期分别为2π和π. 特别地，当$\phi(x)$确定的对应关系是一一映射时，周期相同.

Ⅳ．非周期函数的证明方法

（1）根据周期函数图像的性质.

（2）根据周期函数的定义，用特例否定法.

（3）一般情况下用反证法.

Ⅴ．周期变换

函数 $y=\sin\omega x$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq1$）的图像，可以看作把正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像上所有的点的横坐标缩短（当 $\omega>1$ 时）或伸长（当 $0<\omega<1$ 时）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变）而得到.

例题分析

例 1　判定函数 $f(x)=x-[x]$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）的周期性，并作出其图像.

解　如图 1－1－3，我们作出 $f(x)$ 的图像.

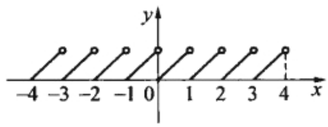


图 1－1－3

由 $f(x)$ 的图像可知，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)=x-[x]$ 是周期函数，且 $T=1$ 是它的一个正周期. 事实上，对 $x\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1\\&=x-[x]=f(x).\end{aligned}$$

说明　实际上 $T=1$ 是 $f(x)$ 的最小正周期. 我们可用反证法加以证明：若 $l(0<l<1)$ 是 $f(x)$ 的一个周期，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有：

$$f(x+l)=f(x),$$

令 $x=0$，得 $f(l)=f(0)=0$. 与 $f(l)=l-[l]=l\neq0$ 矛盾. 所以任意的 $l(0<l<1)$ 不是 $f(x)$ 的正周期.

例 2　证明：函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的一个周期是 $\frac{\pi}{2}$，并求函数 $f(x)$ 的值域.

证明　显然，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$.

所以函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的一个周期是 $\frac{\pi}{2}$.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$.

因此由函数的周期性，知 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$.

说明 求函数的周期，也可通过图像观察而得到. 如本例由

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),\\ -\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right),\\ -\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi\right),\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

容易作出它的图像如下：

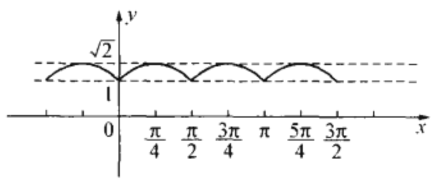


图 1-1-4

所以函数 $f(x)$ 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期.

例 3 设函数 $y=10\tan\left[(2k-1)\frac{x}{5}\right]$ $(k\in\mathbf{Z}^{+})$，当 x 在任意两个连续整数间(包括整数本身)变化时，至少有两次失去意义，求 k 的最小正整数值.

解 根据题意，最小正周期应满足下列条件

$T\leqslant1$，即 $\dfrac{\pi}{\frac{1}{5}(2k-1)}\leqslant1$，

即 $k\geqslant\frac{5\pi+1}{2}$，又因为 $k\in\mathbf{Z}^{+}$，所以 $k\geqslant9$ 即可.

解答错了！错在哪里？

剖析 这一解法，忽略了函数 $y=10\tan\left[(2k-1)\frac{x}{5}\right]$ 过原点，且为奇函数，要满足 x

在任意两个连续整数间(包括整数本身)变化时,至少有两次失去意义,首先就必须满足$x\in[0,1]$范围内两次失去意义.下面给出正确解答.

正解 由题意可知,最小正周期 T 满足

$$\frac{3}{2}T\leqslant 1,$$

则有

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{\frac{2k-1}{5}}\leqslant 1,$$

解得 $k\geqslant 13$,故 k 的最小正整数值为 13.

说明 正确使用性质,准确理解题意,是正确解题的关键.

例 4 已知正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<2\pi)$的图像与 y 轴交于点$(0,1)$,在同一个周期内一个最高点的坐标是$(2,\sqrt{2})$,求函数的表达式.

解 因为点$(2,\sqrt{2})$是最高点,所以 $A=\sqrt{2}$,由点$(0,1)$在曲线上得$\sqrt{2}\sin\varphi=1$,因为$0<\varphi<2\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$或 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$时,将点$(2,\sqrt{2})$的坐标代入表达式 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$中,得$\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right)=1$,从而有 $2\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $\omega=k\pi+\frac{\pi}{8}$.

因为点$(0,1)$,$(2,\sqrt{2})$是曲线上同一个周期内的两个点,所以最小正周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{k\pi+\frac{\pi}{8}}>2,$$

解之得$-\frac{1}{8}<k<\frac{7}{8}$,因 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=0$,$\omega=\frac{\pi}{8}$.此时,函数表达式为:$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$时,将点$(2,\sqrt{2})$的坐标代入表达式 $y=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{3\pi}{4}\right)$中,得 $\sin\left(2\omega+\frac{3\pi}{4}\right)=1$,从而有 $2\omega+\frac{3\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$\omega=k\pi-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $T>2$,$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{k\pi-\frac{\pi}{8}}>2$,解之得$\frac{1}{8}<k<\frac{9}{8}$,又 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=1$,$\omega=\frac{7\pi}{8}$,此时,函数表达式为:$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

综上,符合条件的函数表达式为:$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$或 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

说明 由正弦型曲线上的点求函数 $y=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$ 的表达式，关键在确定 ω,φ 的值，这往往是一件比较麻烦的事. 从本例可见，若能恰当地利用周期概念，这个问题不难解决. 一般地，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 是正弦型曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 上的任意两点. 当 A,B 在同一个周期内时，由周期概念可知，周期 $T\geqslant|x_2-x_1|$；当 A,B 同在 $\frac{k}{n}(n,k\in\mathbf{N}^*)$ 个周期内时，$\frac{k}{n}\cdot T\geqslant|x_2-x_1|$；当 A,B 同在 $\frac{k}{n}$ 个周期外时，$\frac{k}{n}\cdot T<|x_2-x_1|$. 上面求解中，就是利用这一简单事实，准确方便地根据曲线 $y=A\sin(\omega\pi+\varphi)$ 上的点坐标求出了它的函数表达式.

例 5 （第 10 届 IMO 试题）实数 $a>0$，$y=f(x)$ 是定义在全体实数集 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，对每一个实数 x，有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}, \tag{①}$$

（Ⅰ）证明：$y=f(x)$ 是周期函数；（Ⅱ）当 $a=1$ 时，给出一个非常数的 $f(x)$ 的例子.

解 （Ⅰ）**证法 1**（代换法）

将①移项后两边平方，得

$$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=f(x)-[f(x)]^2=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2,$$

即
$$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}. \tag{②}$$

在②中用 $x+a$ 替换 x 后得

$$\left[f(x+2a)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}, \tag{③}$$

③－②得

$$\left[f(x+2a)-\frac{1}{2}\right]^2=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2. \tag{④}$$

但据①知，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，于是，由④得到

$$f(x+2a)=f(x),$$

此式表明 $f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的周期函数.

证法 2（解方程法）

由 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$， ①

用 $x+a$ 替换 x，得 $f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}$. ②

将①整理成关于$f(x)$的方程得

$$[f(x)]^2-f(x)+\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=0,$$

所以
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{1-4\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\{1\pm 2\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}\}\\&=\frac{1}{2}\pm\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2},\end{aligned}$$

注意到$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，故上式取$+$号，即

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}. \qquad ③$$

比较②与③知 $f(x+2a)=f(x)$，这表明$f(x)$是周期函数，$2a$ 是它的一个周期.

证法 3(复合函数法)

对实数 $x+a$，我们有

$$f[(x+a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2},$$

由 x 的任意性，$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，把 $f(x+a)$ 的式子代入 $f[(x+a)+a]$ 的表达式，得

$$\begin{aligned}f[(x+a)+a]&=f(x+2a)\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right\}^2}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2}\\&=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|.\end{aligned}$$

由于

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)+[f(x-a)]^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

故
$$\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|=f(x)-\frac{1}{2},$$

于是，$f(x+2a)=\dfrac{1}{2}+\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]=f(x)$.

这表明，$f(x)$是以 $2a$ 为周期的周期函数.

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，可以举出

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right),$$

容易验证$f(x)$ 满足要求. 事实上，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{1}{2}\left[1+\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)\cdot[1-f(x)]}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)\cdot\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)\right]}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)\\&=f(x+1).\end{aligned}$$

可见，$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+\left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|\right)$满足

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

例 6 已知点集$\{(x,y)\mid y=(-1)^k\sqrt{1-(x-2k)^2},2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 画出这个集合的图形；

(2) 视(1)的图形为函数 $y=f(x)$的图像，证明：

$$f(x+4)=f(x),f(x+2)+f(x)=0.$$

解 (1)记 $I_k=[2k-1,2k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 k 为偶数时，点集为 x 轴上方的一连串的半圆；当 k 为奇数时，点集为 x 轴下方的一连串半圆. 上述两系列半圆的端点在 x 轴上并衔接而形成连续曲线，如图 1－1－5所示.

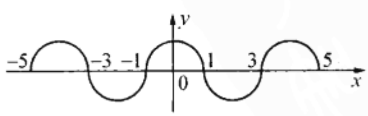


图 1－1－5