总 主 编 王卫华 林 常
本册主编 林 常 王卫华 曹程锦

高中数学联赛讲义

组合数学 数论分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学联赛讲义

（组合数学、数论分册）

总主编　王卫华　林　常

本册主编　林　常　王卫华　曹程锦

本册编委　韦吉珠　张欣然　满　涛

谭瑞军　王　峰　袁礼峰

石林超　郭铭纪　余　萍

储六春　张宝泉　黄耀平

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛讲义. 组合数学、数论分册/林常，王卫华，曹程锦主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.3
ISBN 978-7-308-06618-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①林…②王…③曹… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 026687 号

高中数学联赛讲义(组合数学、数论分册)
林 常 王卫华 曹程锦 主编

责任编辑 王大根
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571-88925592，88273066(传真)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787×1092mm 1/16
印　　张 8.75
字　　数 228 千
版 印 次 2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-06618-1
定　　价 15.00 元

前　　言

“全国高中数学联赛”(始于1981年)是教育部批准,由中国科协主管,中国数学会普及工作委员会主办,国内影响最大的一项中学生学科竞赛。

每年10月中旬的第一个周日,全国有近10万学生参加这项重要的竞赛活动,争夺每个赛区的一等奖。每个赛区前几名的同学,还可以获得进入“中国数学奥林匹克”的资格,更进一步,可以争取代表中国参加国际数学奥林匹克竞赛。

2009年1月,中国数学会普及工作委员会在海南召开会议,对全国高中数学联赛的考查方式及考查要求作了调整,进一步加强联赛第二试的内容,并明确将“代数、几何、组合、数论”四块的考查要求写入考试说明。

许多同学在全国高中数学联赛前夕,都会碰到这样的问题:如何进行联赛的复习,选择什么书来看,找一些什么样的题目来做,哪些知识点是联赛重点考查的,哪些数学思想方法是联赛命题者比较青睐的,等等。

为了更有效地应对新的联赛命题方式,提高读者联赛复习的效果,解决读者的这些疑惑,《数学竞赛之窗》编辑部特别邀请了全国各地在数学竞赛辅导一线的教练员和多次参加各级各类竞赛命题的专家编写了本丛书。本丛书分为三册,分别是:代数分册,几何分册以及组合、数论分册。

代数分册:按照全国高中数学联赛考查的重点内容,本册内容包括“函数、数列、不等式、多项式、复数”等部分,涵盖全国联赛一试和二试对代数问题的要求。

几何分册:本册内容分为三大块——立体几何、解析几何和平面几何,其中立体几何和解析几何是一试中的重点考查内容,平面几何是二试的必考内容。

组合和数论分册:本册既注意了联赛一试对简单排列组合问题和数论小题的覆盖,更注重联赛二试中对数论和组合问题的考查,这些问题往往以联赛压轴题的形式出现,在新的考试模式下,这方面的考查会得到加强,希望引起读者注意。

本书的编写过程中,得到《数学竞赛之窗》编委老师的大力支持,他们提出了很多富有建设性、针对性的建议。同时,《数学竞赛之窗》编辑部决定开设一个热线,解答广大读者关于全国高中数学联赛的问题。热线电话是:0512—68184173,也可通过电子邮件联系我们,信箱是:sxjszcbjb@163.com。

限于作者水平,书中不妥之处请广大读者批评指正。我们将综合大家的建议,再版时做出修订,力求使本书更适合联赛实际。

《数学竞赛之窗》编辑部
2009年3月

目 录
CONTENTS

组合数学

初等数论

组合数学

第一章　组合计数问题

1　基本计数方法

1. 给出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$. 下面12条直线：AB'，BA'，CD'，DC'，AD'，DA'，BC'，CB'，AC，BD，$A'C'$，$B'D'$ 中有________对异面直线.

解　30.

所给的12条直线是长方体各面的对角线. 每条对角线与另外5条相交(本面及相邻4面各1条)，与另外1条平行(对面)，因此恰好与另外5条异面. 每个异面对计算了2次，故共有 $\frac{12\times5}{2}=30$ 个异面对.

2. 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 都是等腰三角形. 这样的点 P 共有________个.

解　9.

由等腰条件，P 或在以正方形的一个顶点为圆心、边长为半径的圆周上，或在一边的中垂线上. 要使4个三角形都是等腰三角形，P 应是至少两条上述曲线的交点. 这6条曲线两两的交点除去正方形的顶点外共有9个，都符合要求(每个交点或在两条中垂线上，或在一条中垂线及两个圆周上).

3. 三边长均为整数，且最大边长为11的三角形，共有________个.

解　36.

设三边长为 $a\leqslant b\leqslant c=11$. 由 $2b\geqslant a+b\geqslant 12$ 得 $b\geqslant 6$. 当 $b=k$ 时，$k\geqslant a\geqslant 12-k$，$a$ 有 $k+1-12=2k-11$ 种可能值，故互不全等的三角形个数为

$$\sum_{k=6}^{11}(2k-11)=\frac{6(1+11)}{2}=36.$$

4. 对于所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的整数 m，n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线的条数是________条.

解　6.

由标准方程条件，$C_m^n>1$. 再考虑到组合数的对称性，取 $1\leqslant n\leqslant\left[\dfrac{m}{2}\right]$ 得到6个不同值：C_2^1，C_3^1，C_4^1，C_4^2，C_5^1，C_5^2.

5. 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有________组.

解　174.

$y_1+\cdots+y_m=n$ 的非负整数解数为 C_{n+m-1}^n. 由 $x_1=0$ 或1得到原方程解数为

$$C_{3+9-1}^3+C_{1+9-1}^1=165+9=174.$$

6. 甲、乙两队各出7名队员按事先安排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由1号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方2号队员比赛……直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获胜，形成一个比赛过程. 那么所有可能出现的比赛过程的种数为________.

解　3432.

记下每场比赛的负方队名,一方出现7次时比赛结束.所有可能的比赛过程与这种甲—乙序列一一对应.每个序列后添加胜方名到7次,得到由7个甲和7个乙排成的所有序列.故所有可能的比赛过程种数为 $C_{14}^{7}=3432$.

7. 以长方体的8个顶点中的任意3个为顶点的所有三角形中,锐角三角形的个数为______个.

解 8.

每3点不共线且无钝角三角形,每个顶点处有6个直角三角形.故锐角三角形的个数为 $C_8^3-8\cdot 6=8$.

8. 如果从数1, 2, …, 14中,按由小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3,使同时满足 $a_2-a_1\geqslant 3$ 与 $a_3-a_2\geqslant 3$.那末所有满足上述要求的不同取法有______种.

解 120.

等价于从1~10中取 $a_1<a_2-2<a_3-4$,取法数为 $C_{10}^3=120$.

9. 8个女孩和25个男孩围成一圈,任意两个女孩之间至少站两个男孩.那么共有______种不同的排列方法.(圆圈旋转后重合的排法被认为是相同的)

解 $\dfrac{16!25!}{9!}$.

先让25个男孩作圆周排列,有24!种排法.选定一个女孩,她有25种站法.其他女孩的站法相当于从1~22中选出7个数 a_1, …, a_7 满足 $a_{i+1}-a_i\geqslant 2$,再作全排列.故排列方法总数为 $24!\cdot 25\cdot C_{22-6}^{7}\cdot 7!=\dfrac{16!25!}{9!}$.

10. 由一个正方体的3个顶点所能构成的正三角形的个数为______个.

解 12.

正三角形由与同一顶点相邻的3个顶点构成,故恰好有8个.

11. 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 1000\}$,对 M 的任一非空子集 X,令 a_X 表示 X 中最大数与最小数之和.那么,所有这样的 a_X 的算术平均值为______.

解 1001.

对每个非空子集 $A=\{a_1<\cdots<a_k\}$,记 $f(A)=a_1+a_k$. $A'=\{1001-a_k, \cdots, 1001-a_1\}$ 也是 M 的非空子集,且 A 与 A' 一一对应, $f(A)+f(A')=2\cdot 1001$.因此

$$\sum_A f(A)=\frac{1}{2}\sum_A(f(A)+f(A'))=\frac{1}{2}\cdot$$

$2\cdot 1001\cdot(2^{1000}-1)$,平均值为1001.

12. 集合 A, B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A, B) 与 (B, A) 视为不同的对,则这样的 (A, B) 对的个数是______个.

解 27.

$A\cup B$ 划分为3部分: $A\backslash B$, $B\backslash A$, $A\cap B$.每个元素可任意放入任一部分.不同的放法数即 (A, B) 对的个数是 $3\cdot 3\cdot 3=27$.

一般,满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1, \cdots, a_n\}$ 的有序集族 $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 个数为 $(2^k-1)^n$.有序非空集族个数为 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i(2^{k-i}-1)^n$.

13. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色,并使同一条棱的两端点异色,如果只有5种颜色可使用,那么不同的染色方法的总数是______.

解 420.

S-$ABCD$ 中 S 有5种染法,S 染好后其他4点只能用另外4色.有2种方案:

(1) A 与 C 同色,4种;然后 B, D 各有3种染法.

(2) A 与 C 不同色,$4\cdot 3$ 种;然后 B, D 各有2种染法.

染色方法的总数为 $5\cdot(4\cdot 3\cdot 3+4\cdot 3\cdot 2\cdot 2)=420$.

一般,k 棱锥的每个顶点染 n 色之一,不同的染色方法总数是 $nf_k(n-1)$.其中 $f_k(m)$ 是圆周上的 k 点染 m 色,相邻点不同色的方法数.对 k 递推:

$f_2(m)=m(m-1)$, $f_3(m)=m(m-1)(m-2)$, $f_k(m)=(m-2)f_{k-1}(m)+(m-$

$1)f_{k-2}(m)$.

解得 $f_k(m)=(m-1)^k+(-1)^k(m-1)$.

14. 三位数(100，101，…，999)共900个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片上打印一个三位数．有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如198倒过来看是861；有的卡片则不然，如531倒过来看是ƖƐƐ．因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以少打印________张卡片．

解　34．

倒看仍是数码的只有0，1，6，8，9这五种，正看倒看都是三位数的共 $4\cdot4\cdot5=80$ 个(首尾数码不为0)．其中正看倒看是同一数的有 $3\cdot4=12$ 个(中间数码为0，1或8，首尾数码为1-1，8-8，6-9或9-6)．余下者每对可少打1张，共可少打 $\frac{80-12}{2}=34$ 张．

15. 从给定的6种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的6个面染色，每面恰好染一种颜色，每两个具有公共棱的面染成不同的颜色．则不同的染色方法共有________种．(注：如果我们对两个相同的正方体染色后，可以通过适当的翻转，使得两个正方体的上、下、左、右、前、后这6个对应面的染色都是相同，那么，我们就说这两个正方体的染色方案相同．)

解　320．

按用到颜色的种数分类，对每组取定的颜色，可认定一色染上面．且当下面染色后，又可认定一色染前面．当前面与后面同色时，左面与右面无序．由于相邻面不同色，最少用3色．

(1) 6色．下、后、左、右面依次染色，方法数为 $5\cdot3\cdot2\cdot1=30$ 种．

(2) 5色．可认为上、下面同色，$C_6^5\cdot C_5^1\cdot3\cdot2\cdot1=180$ 种．

(3) 4色．可认为上、下面，前、后面分别同色，$C_6^4\cdot C_4^2\cdot1=90$ 种．

(4) 3色．3对对面分别同色，$C_6^3=20$ 种．

共有 $30+180+90+20=320$ 种，同理，n 色的染色方法数为 $30C_n^6+30C_n^5+6C_n^4+C_n^3$．

16. 设 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一，若在5次之内跳到 D 点，则停止跳动；若5次之内不能到达 D 点，则跳完5次也停止跳动，那么这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共有________种．

解　26．

显然偶数步只能到达 A，C，E，奇数步到达 B，D，F．由对称性，B 与 F，C 与 E 情况相同．设 X_i 表示 i 步跳到 X 的不同方法数，则 $A_0=1$，$C_0=0$，

$A_{2k+2}=2B_{2k+1}$，$B_{2k+1}=A_{2k}+C_{2k}$，$C_{2k+2}=B_{2k+1}$，$D_{2k+1}=2C_{2k}$．

$B_1=1$，$B_{2k+1}=3B_{2k-1}$，故 $B_{2k+1}=3^k$．$k\geqslant1$ 时，$D_{2k+1}=2C_{2k}=2\cdot3^{k-1}$，$A_{2k}=2\cdot3^{k-1}$，$C_{2k}=3^{k-1}$．

记至多 n 步结束(或到达 D)的不同跳法数为 F_n，则 $F_1=2B_1=2$，

$F_{2k}=A_{2k}+2C_{2k}=4\cdot3^{k-1}$，$F_{2k+1}=2B_{2k+1}+(D_3+\cdots+D_{2k+1})=3^{k+1}-1$，

本题 $k=2$，$F_5=3^3-1=26$．

17. 在正方体的8个顶点、12条棱的中点、6个面的中心及正方体的中心共27个点中，共线的三点组的个数是________个．

解　49．

26个点关于中心配对对称，有13条3点线，每个面中有4条(对角线和中位线)，加上12条棱，共49条3点线．

18. 从0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这10个数中取出3个数，使其和为不小于10的偶数，不同的取法有________种．

解　51．

3个数之和为偶数只能是3偶或1偶2奇，有 $C_5^3+C_5^1C_5^2=60$ 种取法．其中和小于10的为：(0，1，3)，(0，1，5)，(0，2，4)，(1，2，3)，(0，1，7)，(0，2，6)，(0，3，5)，(1，2，5)，(1，3，4)共9种．故满足条件的取法数为 $60-9=51$．

19. 在某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰好比赛一场，但有3名选手各比赛了2场之后就退出了，这样，全部比赛只进行

了50场.那么,在上述3名选手之间比赛的场数是______场.

解 1.

设共有$n+3$人参赛,退出的3人之间已赛x场.依题意列式:

$C_n^2+x+6-2x=50$, $C_n^2=x+44(0\leqslant x\leqslant 3)$,只有$x=1$, $n=10$.

20. 已知直线$ax+by+c=0$中的a, b, c是取自集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的3个不同的元素,并且该直线的倾斜角为锐角,那么,这样的直线的条数是______.

解 43.

a与b异号,且(a, b, c)与$(-a, -b, -c)$为同一直线,故可设$a>0$, $b<0$, a, b取定后c有5种取法.其中只有$(1,-1,0)$, $(2,-2,0)$, $(3,-3,0)$相同.故不同直线的条数为

$$3\cdot 3\cdot 5-2=43.$$

21. 如果:(1) a, b, c, d都属于$\{1,2,3,4\}$;(2) $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq d$, $d\neq a$;(3) a是a, b, c, d中的最小值.那么,可以组成的不同的四位数$\overline{abcd}$的个数是______.

解 28.

按用到的数码种数分类:

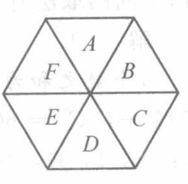
(1) 2种.取法数为C_4^2,必$a=c$, $b=d$,每种取法只有1种放法.

(2) 3种.每种取法再按$b=a$与$b\neq a$分类,$(2+2)C_4^3$.

(3) 4种.3!种排法.

共得到不同的4位数$6+16+6=28$个.

22. 在一个正六边形的6个区域栽种观赏植物(见图),要求同一场块中种同一种植物,相邻的两块种不同的植物.现有4种不同的植物可供选择,则有______种栽种方案.



解 732.

此即圆周上k点染m色,使相邻点不同色的方法数(见第14题).

$$f_k(m)=(m-1)^k+(-1)^k(m-1).$$

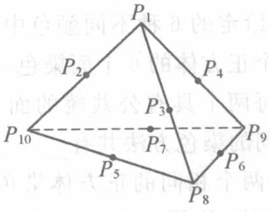
现在$m=4$, $k=6$, $f_6(4)=3^6+3=732$.

23. 已知两个实数集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$与$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$,若从$A$到$B$的映射$f$使得$B$中的每一个元素都有原象,且$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$,则这样的映射共有______个.

解 C_{99}^{49}.

令b_i的原象个数为x_i,满足条件的映射一一对应于$x_1+x_2+\cdots+x_{50}=100$的正整数解,故个数为$C_{100-1}^{50-1}=C_{99}^{49}$.

24. 如图,点P_1, P_2, $\cdots$, P_{10}分别是四面体的顶点或棱的中点,那么在同一平面上的四点组$(P_1, P_i, P_j, P_k)(1<i<j<k\leqslant 10)$有______个.



解 33.

三个侧面上共有$3C_5^3=30$个四点组.每条侧棱上的3点与对棱中点构成3个四点组.

25. 删去正整数数列1, 2, 3, …中的所有完全平方数,得到一个新数列.这个新数列的第2003项是______.

解 2048.

设$a_n=k^2+r(1\leqslant r\leqslant 2k)$,则$n=k^2+r-k$, $4n=(2k-1)^2+4r-1$.

$(2k-1)^2<4n<(2k+1)^2$.不大于$4n$的最大平方数是$[\sqrt{4n}]$,故

$$2k-1=2\left[\frac{[\sqrt{4n}]-1}{2}\right]+1,\ k=\left[\frac{[\sqrt{4n}]-1}{2}\right]+1=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right].\ a_n=n+k=n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right].$$

$$A_{2003}=2003+\left[\sqrt{2003}+\frac{1}{2}\right]=2048.$$

26. 设 $M_n=\{$(十进制)n 位纯小数 $\overline{0.a_1a_2\cdots a_n}\mid a_i$ 只取 0 或 1($i=1,2,\cdots,n-1$), $a_n=1\}$, T_n 是 M_n 中元素的个数, S_n 是 M_n 中所有元素的和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=$ ________.

解　$\dfrac{1}{18}$.

$T_n=2^{n-1}$. $n\geqslant 2$ 时, M_n 的元可以配对为 $(0.\overline{a_1\cdots a_{n-1}1},\ 0.\overline{b_1\cdots b_{n-1}1})$, 每个 $b_i=1-a_i$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, 每对两数之和等于 $0.\overline{1\cdots 12}$, 故 $S_n=2^{n-2}\cdot 0.\overline{1\cdots 12}=2^{n-2}\cdot\dfrac{1+8\cdot 10^{-n}}{9}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+8\cdot 10^{-n}}{18}=\dfrac{1}{18}$.

27. 设三位数 $n=\overline{abc}$, 若以 a,b,c 为三条边的长可以构成一个等腰(含等边)三角形, 则这样的三位数 n 有________个.

解　165.

$a,b,c\in\{1,2,\cdots,9\}$

(1) 构成等边三角形的有 9 个.

(2) 构成等腰(非等边)三角形 (x,x,y), $y\neq x$, $y\leqslant 2x-1$, 当 $x=2,3,4,5$ 时, y 有 $2x-2$ 种取法; 当 $x=6,7,8,9$ 时, y 有 8 种取法. 故数组个数为 $2+4+6+5\cdot 8=52$. 每个数组排成 3 个三位数, 共有 $3\cdot 52=156$(个).

总个数为 $9+156=165$.

28. 一项"过关游戏"规则规定: 在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次, 如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 2^n, 则算过关. 问:

(1) 某人在这项游戏中最多能过几关?

(2) 他连过前三关的概率是多少?

(注: 骰子是一个在各面上分别有 1, 2, 3, 4, 5, 6 点数的均匀正方体. 抛掷骰子落地静止后, 向上一面的点数为出现点数.)

解　由于骰子是均匀的正方体, 所以抛掷后各点数出现的可能性相等.

(1) 因骰子出现的点数最大为 6, 而 $6\times 4>2^4$, $6\times 5<2^5$, 归纳可证当 $n\geqslant 5$ 时, $2^n>6n$, 故 n 次出现的点数之和不可能大于 2^n. 所以最多只能连过 4 关.

(2) 设事件 A_n 为"第 n 关过关失败", 则对立事件 $\overline{A_n}$ 为"第 n 关过关成功". 在第 n 关游戏中, 基本事件总数为 6^n 个.

第 1 关: A_1 所含基本事件数为 2(即出现点数为 1 和 2 这两种情况), 过此关的概率为: $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$.

第 2 关: A_2 所含基本事件数为方程 $x+y=2,3,4$ 的正整数解组数之和. 即有 $C_1^1+C_2^1+C_3^1=1+2+3=6$(个). 过此关的概率为: $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{5}{6}$.

第 3 关: A_3 所含基本事件为方程 $x+y+z=3,4,5,6,7,8$ 时的正整数解组数之和. 即有 $C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2=1+3+6+10+15+21=56$(个). 过此关的概率为: $P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-\dfrac{56}{6^3}=\dfrac{20}{27}$.

故连过前三关的概率为: $P(\overline{A_1})\times P(\overline{A_2})\times P(\overline{A_3})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{20}{27}=\dfrac{100}{243}$.

29. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $M=\left\{\dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_2}{7^2}+\dfrac{a_3}{7^3}+\dfrac{a_4}{7^4}\,\middle|\,a_i\in T,\ i=1,2,3,4\right\}$, 将 M 中的元素按从大到小顺序排列, 则第 2005 个数是________.

解　$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{0}{7^3}+\dfrac{4}{7^4}$.

所给集合是 4 位七进制小数. $2005-1=5\cdot 7^3+5\cdot 7^2+6\cdot 7+2$, 故从小到大第 2005 个数是 $(5,5,6,2)$. 从大到小第 2005 个数是它的反码, 即 $(1,1,0,4)$.

30. 若自然数 a 的各位数字之和为 7, 则称 a 是"吉祥数". 将所有"吉祥数"从小到大排成一列: $a_1,a_2,a_3,\cdots$, 若 $a_n=2005$, 则 $a_{5n}=$ ________.

解　52000.

数码和等于 a 的 k 位数个数是 $x_1+x_2+\cdots+x_k=a$, $x_1>0$ 的非负整数解个数, 即 C_{k+a-2}^{a-1}, 1～3 位的吉祥数个数为 $C_6^6+C_7^6+C_8^6=36$. 首位数码为 1 的 4 位吉祥数个数等于 1～3 位且数码和为 6 的数的个数, 即 $C_5^5+C_6^5+C_7^5=28$.

首位数码为 2 的 4 位吉祥数第一个就是 2005. 因此 $n=36+28+1=65$, $5n=325$.

由于 $C_9^6=84$, $C_{10}^6=210$, $36+84+210=330$. 故 a_{325} 是5位吉祥数的倒数第6个. 依次列出: 70000, 61000, 60100, 60010, 60001, 52000.

31. 袋内有8个白球和2个红球,每次从中随机取出一个球,然后放回1个白球,则第4次恰好取完所有红球的概率为________.

解 0.0434.

第 4 次恰好取完所有红球当且仅当前 3 次中恰好有 1 次取到红球,而且第 4 次取到红球. 由加法,乘法原理,概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=0.0434.$$

32. 设 x 是一个自然数. 若一串自然数 $x_0=1, x_1, x_2, \cdots, x_l=x$ 满足 $x_{i-1}<x_i$, $x_{i-1} \mid x_i (i=1,2,\cdots,l)$,则称 $\{x_0, x_1, \cdots, x_l\}$ 为 x 的一条因子链. l 为该因子链的长度. $L(x)$ 与 $R(x)$ 分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数. 对于 $x=5^k\times 31^m\times 1990^n$($k$、$m$、$n$ 都是自然数),试求 $L(x)$ 与 $R(x)$.

解 记 $a_i=\dfrac{x_i}{x_{i-1}} (1\leqslant i\leqslant l)$,则 a_i 是大于 1 的整数,且 $a_1a_2\cdots a_l=x$. 设 x 的标准分解式为 $\prod\limits_{j=1}^{r}p_j^{\alpha_j}$,由唯一分解定理,每个 a_i 是若干个素因子 p_j 之积. 故 $l\leqslant\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_j$. 当且仅当每个 a_i 都是素数时,l 取最大值 $L(x)=\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_j$. 最长因子链的条数等于所有素因子的全排列数,即 $\dfrac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}$.

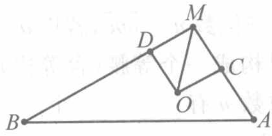
本题 $x=2^n5^{n+k}31^m199^n$. $L(x)=m+3n+k$, $R(x)=\dfrac{(m+3n+k)!}{m!(n!)^2(n+k)!}$.

33. 设 M 为平面上坐标为 $(p\times1994, 7p\times1994)$ 的点,其中 p 是素数,求满足下述条件的直角三角形的个数:

(1) 三角形的三个顶点都是整点,而且 M 是直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点.

解 直线 OM 的斜率 $k=7$, $\angle AMO=\angle BMO=45^\circ$,故两直角边 MA, MB 的斜率分别为 $k_1=\dfrac{k+1}{1-k}=-\dfrac{4}{3}$, $k_2=\dfrac{k-1}{1+k}=\dfrac{3}{4}$. 直线 MA 的方程为 $\dfrac{y-7\cdot1994p}{x-1994p}=-\dfrac{4}{3}$,射线 MA 上的整点坐标为 $x=1994p+3k$, $y=7\cdot1994p-4k$. 同理,射线 MB 上的整点坐标为 $x=1994p-4m$, $y=7\cdot1994p-3m$, $k, m\in\mathbf{N}^*$.



$\triangle MAB$ 的内径 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OM=5\cdot1994p$,设内切圆与 MA, MB 的切点分别为 C, D,则 $MC=MD=r$. 由 MA, $MB>r$ 得出 k, $m>1994p$. 令 $k=1994p+u$, $m=1994p+v$,得到 A, B 的坐标 $x_1=4\cdot1994p+3u$, $y_1=3\cdot1994p-4u$, $x_2=-3\cdot1994p-4v$, $y_2=4\cdot1994p-3v$ ($u, v\in\mathbf{N}^*$).

最后,由 $AB=AC+BD$ 得到 $(5u+5v)^2=(7\cdot1994p+3u+4v)^2+(1994p+4u-3v)^2$,展开得 $(u-1994p)(v-1994p)=2(1994p)^2=2^3997^2p^2$. (997 是素数)

上式右边大于 $(1994p)^2$,分解为 2 个因数时必有一个的绝对值大于 $1994p$,故左边 2 因式都是正因数. 而 u, v 的正整数解唯一确定满足条件的三角形,故所求的三角形个数等于 $2^3997^2p^2$ 的正因数个数. 当 $p=2$ 时,为 $(5+1)(2+1)=18$;当 $p=997$ 时,为 $(3+1)(4+1)=20$;当 $p\neq2997$ 时,为 $(3+1)(2+1)(2+1)=36$.

34. 12 个人围着桌子坐成一圈,有多少种握手方法,使得 6 对握手的人胳膊不交叉?

解 12 个人视为圆周上的 12 个点,握手

的 2 人对应的两点连成一线段.按题目要求，这 12 个点连成 6 条线段，而不使连线相交，问有多少种不同的连线方法？

我们把问题推广到一般，然后对点数进行归纳.设圆周上有 $2n$ 个点，其中一点是 A.

若 $n=1$，只有 2 点：A、B.则连线只有一种方法，即 $N_1=1$.

若 $n=2$，有 4 点：A、B、C、D.这时 A 可以与右邻 B 点或左邻 D 点连接，但不能与对面的 C 点连接，否则与 BD 交叉.故有 2 种：$N_2=2$，如图 1 所示.

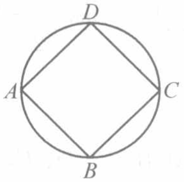


图 1

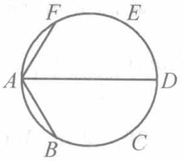


图 2

若 $n=3$，有 6 点：A、B、C、D、E、F.若 A 与左、右邻点连接，则余下 4 人有 N_2 种连接方式；若 A 与对面的 D 点连接，则两侧各有 2 点，如图 2 所示，分别有 N_1 种连接法.因此

$$N_3=2N_2+N_1^2=5.$$

若 $n=4$，有 8 点：A、B、C、D、E、F、G、H.此时 A 若与左、右邻连接，则其余 6 点有 $2N_3$ 种连接法；若 A 点与 D、F 连接，另一侧有 4 人，另一侧有 2 人，则有 $N_1\times N_2$ 种方法，A 不能与 C、E、G 连接.

故此时有 $N_4=2N_3+2N_1\times N_4=14$.

类推可得：

$N_5=2N_4+2N_3\times N_1+N_2^2=42$；

$N_6=2N_5+2N_4\times N_1+2N_1\times N_2=132$.

所以，本题中 12 个人 6 对握手而胳膊不交叉的方式有 132 种.

35. 1,2,3,4,5 的排列 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 具有性质：对于 $1\leqslant i\leqslant 4$，a_1，a_2，…，a_i 不构成 1，2，…，i 的某个排列.求这种排列的个数.

解　显然 $a_1\neq 1$.

当 $a_1=5$ 时，4!个排列都符合要求.

当 $a_1=4$ 时，$a_5=5$ 的 3!个排列不符合要求，即符合要求的排列有(4!－3!)个.

当 $a_1=3$ 时，形如 3×××5 与 3××54 的排列均不符合要求，即符合要求的排列有(4!－3!－2!)个.

当 $a_1=2$ 时，形如 2×××5，2××54，2×534，2×453，2×543 的排列均不符合要求，即符合要求的排列有(4!－3!－2!－1!－1!－1!)个.

综上所述，所求排列的个数为 4!＋(4!－3!)＋(4!－3!－2!)＋(4!－3!－2!－3×1!)＝71.

36. 桌子上有 6 个空钱包，将 12 个 2 欧元的硬币放到这些钱包里，有多少种不同的放法？

解　分两种情况考虑：

1. 6 个钱包没有空的，设各个钱包里放的欧元硬币个数为 $x_i(i=1,2,\cdots,6)$.那么，应有

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=12(x_i\geqslant 1).\quad ①$$

方程 ① 的每个正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_6)$ 对应一种放法.方程 ① 的正整数解的个数为 C_{11}^5.

2. 6 个钱包中有一个是空的(有 6 种不同的情况).这时剩下的 5 个钱包放的硬币数设为 y_1，y_2，…，y_5，则有

$$y_1+y_2+\cdots+y_5=12(y_i\geqslant 1).\quad ②$$

这时方程 ② 的正整数解的个数为 C_{11}^4.故此种情况下不同放法有 $6C_{11}^4$ 种.

综上所述，不同的放法种数共有

$$C_{11}^5+6C_{11}^4=\frac{11!}{4!\times 6!}\left(\frac{1}{5}+\frac{6}{7}\right)$$
$$=37\times 11\times 6=2442(\text{种}).$$

37. 称子集 $A\subseteq M=\{1,2,3,\cdots,11\}$ 是“好”的，如果它具有下述性质：如果 $2k\in A$，且 $2k\pm 1\in A$(空集和 M 都是好的).问：M 有多少个“好”子集？

解　设 $n(A)$ 为属于 A 的偶数的个数.

1. $n=0$，即只含奇数的子集.这样的子集有 2^6 个(包括 $\varnothing$)，它们都是“好”的.

2. $n=1$,即含有1个偶数的子集.偶数的选取有5种可能.每种选取,必须有它前后两个奇数在其中,其他4个奇数都可取可不取,故有 5×2^4 种可能,即有 5×2^4 个"好"子集.

3. $n=2$,分两种情况:

(1) A 中两个偶数是相邻的,则有4种选法,对每种选择有3个奇数必须在 A 中,另3个数则可选可不选,故共有 4×2^3 个"好子集".

(2) A 中两个偶数不相邻,则有 $C_5^2-4=6$ 种选取法,每种取法,有4个奇数必在 A 中,另2个奇数则有两种可能,故有 6×2^2 个"好"子集.

此类"好"子集共56个.

4. $n=3$,分三种情况:

(1) A 中偶数相邻,有3种取法,每种取法必有4个奇数在 A 中,另2个各有两种可能,故这样的"好"子集有 3×2^2 个.

(2) A 中任意2个偶数都不相邻.这只有一种情况,它包含2,6,10,这时所有6个奇数均在其内,这样的"好"子集只有1个.

(3) A 中3个偶数只有2个相邻,这有 $C_5^3-4=6$ 种取法,每种取法中有5个奇数一定在其中,只有1个奇数有选与不选两种可能.故这样的"好"子集为 6×2 个.

此类"好"子集共25个.

5. $n=4$,分两种情况:

(1) $2\overline{\in}A$ 或 $10\overline{\in}A$,有两种可能.每种只有1个奇数可以选择,故这样的"好"子集有 2×2 个.

(2) $2\in A$ 且 $10\in A$,中间3个偶数有3种选择,而每种都必须包含所有的奇数,故这样的"好"子集有3个.

此类"好"子集共7个.

6. $n=5$,只有1种可能,即 M 本身.

我们将以上所有情况下的"好"子集数目加起来,即得"好"子集的总数目:

$$m=2^6+5\times2^4+56+25+7+1=233.$$

38. 在 $\angle AOB$ 的边 OA 上取 m 个点,在边 OB 上取 n 个点,这些点都不是 O 点,且 $m\geqslant1$, $n\geqslant1$.问:以这 $m+n$ 个点及 O 点为顶点的三角形有多少个?

解 这样的三角形分三类:

1. 含有 O 点的,另两个顶点必须分别取自角的两边的点,故有 $m\cdot n$ 个;

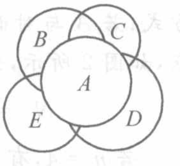
2. 不含 O 点,两个顶点在 OA 上,一个顶点在 OB 上,有 $C_m^2\cdot C_n^1=\frac{m(m-1)}{2}\cdot n=\frac{mn(m-1)}{2}$(个);

3. 不含 O 点,两个顶点在 OB 上,一个顶点在 OA 上,有 $C_n^2\cdot C_m^1=\frac{mn(n-1)}{2}$(个).

故总共有 $mn+\frac{mn(m-1)}{2}+\frac{mn(n-1)}{2}=\frac{mn(m+n)}{2}$(个).

39. 某市 A 有4个郊区县 B、C、D、E,如图所示.现有5种颜色,问:有多少种着色方法,使得相邻两块不同色,且每块只涂一种颜色?

解 如图所示,5块区域至少需要3种颜色涂色.



1. 用5种颜色.着色法有 $P_5^5=120$ 种.

2. 用4种颜色.先选出4种,有 C_5^4 种选法;从中选1种涂 A,再选1种涂 B、D(或 C、E);剩下两种分别涂 C、E(或 B、D),有2种方法,故共有 $C_5^1\cdot C_4^1\cdot2\cdot C_3^1\cdot2=240$ 种方法.

3. 用3种颜色.先选出3种颜色,有 C_5^3 种方法;用这3种颜色分别涂 A、B、D 和 C、E,有 $C_5^3\cdot P_3^3=60$ 种方法.

由加法原理,共有 $120+240+60=420$ 种不同着色法.

【点评】 也可以作如下考虑:先选1种颜色涂 A,有5种选法.再分2种情形讨论:

1. B、D 同色,则 C、E 各有3种着色法,故共有 $C_4^1\times3\times3=36$ 种着色法.

2. B、D 不同色,有 4×3 种着色法;C、E 各有2种着色法,故共有 $4\times3\times2\times2=48$ 种着色法.

因此,不同着色法有

$$5\times(36+48)=420(\text{种}).$$

40. $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是整数 1901, 1902, $\cdots$, 2000 的任意一个排列,部分和数列 $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$, $\cdots$, $S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$. 若数列中每一项 $S_i(1\leqslant i\leqslant 100)$ 均不被 3 整除,问:这样的数列有多少个?

解　令 $\{1901, 1902, \cdots, 2000\}=R_0\cup R_1\cup R_2$. 这里 R_i 里的任意元素模 3 同余 $i(i=0, 1, 2)$,则 $|R_0|=|R_1|=33$, $|R_2|=34$.

由于任一个排列 $S=(a_1, a_2, \cdots, a_{100})$ 的部分和是否被 3 整除,由 $S'=(a'_1, a'_2, \cdots, a'_{100})$ 的部分和所决定,其中 a'_i 是 a_i 模 3 的余数(共有 33 个 0, 33 个 1, 34 个 2),其中每个 R_i 的排列数恰好有 $|R_i|!=1\cdot 2\cdots|R_i|$. 所以, S 的部分和仅仅依赖于其余数构成的数列 S'.

欲使 S 中每一部分和均不能被 3 整除,则由 S' 中 67 个 1 和 2 构成的数列应为 1, 1, 2, 1, 2, $\cdots$, 1, 2 或 2, 2, 1, 2, 1, $\cdots$, 2, 1. 但 $|R_2|=|R_1|+1$,故只有第二种情况才可能.

S' 中的 33 个 0 除了 $a'_1\neq 0$,可放在其他任何地方,这样有 $C_{99}^{33}=\dfrac{99!}{33!66!}$ 种方式.

因此,满足条件要求的数列共有

$$C_{99}^{33}\cdot 33!\cdot 33!\cdot 34!=\frac{99!33!34!}{66!}(\text{个}).$$

41. 设 A、B、$A_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为集合.

(1) 满足 $A\cup B=\{a, b\}$ 的集合有序对 (A, B) 有多少对?为什么?

(2) 满足 $A\cup B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的集合有序对 (A, B) 有多少对?为什么?

(3) 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的集合有序组 $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 有多少组?为什么?

解　只需解(3)即可,因为(1)、(2)是(3)的特例.

因为希望满足条件的有序组尽可能地多,故只排除 $a_i\overline{\in}A_j(i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, k)$ 即可.

对 a_1 来说,它是否属于 $A_j(1\leqslant j\leqslant k)$ 有两种可能,合起来共有 2^k 种可能,除去 $a_1\overline{\in}A_j(1\leqslant j\leqslant k)$,故为 2^k-1 种可能.

同样,对 $a_2, \cdots, a_n$ 都是如此. 据乘法原理,满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的集合有序组 $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 共有 $(2^k-1)^n$ 个.

因此,(1)的答案为 9,(2)的答案为 3^n.

2　递推关系与组合恒等式

1. $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$ 的展开式中, x 的整数次幂的各项系数之和为______.

解　$\dfrac{3^{2n+1}+1}{2}$.

令 $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}=f(x)+g(x)\sqrt{x}$ (f, g 为多项式),则 $(2-\sqrt{x})^{2n+1}=f(x)-g(x)\sqrt{x}$. 所求的和等于 $f(1)=\dfrac{1}{2}\left((\sqrt{1}+2)^{2n+1}+(2-\sqrt{1})^{2n+1}\right)=\dfrac{3^{2n+1}+1}{2}$.

2. 设 $n=1990$,则 $\dfrac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1988}-3^{995}C_n^{1990})=$______.

解　$-\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_n^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k}\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n\right)\\&=\cos\frac{n\pi}{3}.\end{aligned}$$

3. 设 a_n 为下述正整数 $\mathbf{N}$ 的个数: $\mathbf{N}$ 的各位数字之和为 n,且每位数字只能取 1, 3 或 4. 求证: a_{2n} 是完全平方数,这里 $n=1, 2, 3, \cdots$.

【证】　$a_1=a_2=1$, $a_3=2(\mathbf{N}=111$ 或 $3)$, $a_4=4(\mathbf{N}=1111, 1331$ 或 $4)$. 当 $n>4$ 时,考虑 $\mathbf{N}$ 的末位数码得递推关系 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$. 消去奇数号的项:

$$a_{2k}=a_{2k-1}+a_{2k-3}+a_{2k-4}=(a_{2k-2}+a_{2k-4}+a_{2k-5})+(a_{2k-4}+a_{2k-6}+a_{2k-7})+a_{2k-4}$$
$$=a_{2k-2}+3a_{2k-4}+a_{2k-6}+(a_{2k-4}-a_{2k-8})$$
$$=a_{2k-2}+4a_{2k-4}+a_{2k-6}-a_{2k-8}.$$

记 $a_{2n}=x_n$，则 $x_{n+4}=x_{n+3}+4x_{n+2}+x_{n+1}-x_n(n\geqslant 1)$.

由 $a_5=a_4+a_2+a_1=6$，$a_6=a_5+a_3+a_2=9$，$a_7=a_6+a_4+a_3=15$，$a_8=a_7+a_5+a_4=25$，

$x_1=1^2$，$x_2=2^2$，$x_3=3^2$，$x_4=5^2$. 猜测 $a_{2n}=x_n=u_n^2$，其中 u_n 为 Fibonacci 数：$u_0=u_1=1$，$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. 以下用数学归纳法证明，从而得到本题结论.

$n=1,2,3,4$ 已算出符合. 设对 $n,n+1,n+2,n+3$ 结论成立，则

$$x_{n+4}=u_{n+3}^2+4u_{n+2}^2+u_{n+1}^2-(u_{n+2}-u_{n+1})^2$$
$$=u_{n+3}^2+3u_{n+2}^2+2u_{n+2}(u_{n+3}-u_{n+2})$$
$$=u_{n+3}^2+2u_{n+2}u_{n+3}+u_{n+2}^2=(u_{n+3}+u_{n+2})^2$$
$$=u_{n+4}^2.$$

若记 $a_{2k-1}=y_k$，则 $y_k+y_{k-1}=x_k-x_{k-2}=u_ku_{k-1}+u_{k-1}u_{k-2}$. 由 $y_1=1$，归纳可证 $y_n=u_nu_{n-1}$.

4. (联赛 2000 一二试 3) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=4$，且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3 & ①\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4 & ②\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

证明：$a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是完全平方数.

【证】 $a_1=4$，$a_2=49$. 由 ① 式得 $6b_n=a_{n+1}-7a_n+3$，代入 ② 式，

$a_{n+2}-7a_{n+1}+3=48a_n+7(a_{n+1}-7a_n+3)-24$，即 $a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n-6$.

由特征方程法解得

$$a_n=\frac{1}{4}((7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n)+\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right)^2.$$

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2i}2^{n-2i}3^i$$ 为正整数，故 a_n 是完全平方数.

5. 若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 的值为________.

解 3^{999}.

记 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998}=S_0$，$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{1999}=S_1$，$a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{2000}=S_2$. 分别在原式中代入 $x=1$，$\omega=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ 和 ω^2，利用 $\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$ 得到

$$S_0+S_1+S_2=3^{1000}$$
$$S_0+\omega S_1+\omega^2S_2=0$$
$$S_0+\omega^2S_1+\omega S_2=0.$$

三式相加，$S_0=3^{999}$.

6. 将多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表示为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，且 $y=x-4$，则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$________.

解 $\frac{5^{21}+1}{6}$.

$a_0+a_1+\cdots+a_{20}=g(1)=f(5)=\frac{1-(-5)^{21}}{1-(-5)}=\frac{5^{21}+1}{6}$.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1$，$a_{n+1}=\frac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$，$n\in\mathbf{N}$，证明：(1) 对于任意 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为整数；(2) 对于任意 $n\in\mathbf{N}$，$a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

【证】 (1) 去根号，$a_{n+1}^2-7a_na_{n+1}+a_n^2+9=0$. $a_{n+2}^2-7a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2+9=0$，相减得 $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-7a_{n+1})=0$.

由原递推式归纳可证 $\{a_n\}$ 严格递增，故 $a_{n+2}=7a_{n+1}-a_n$. 再由 $a_0=1$，$a_1=5$ 归纳可证 a_n 都是正整数.

(2) $9(a_na_{n+1}-1)=(a_{n+1}+a_n)^2$，由唯一分解定理得到 $a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

8. 数码 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2006}$ 中，有奇数个 9 的 2007 位十进制数 $\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$ 的个数为________.

解　$\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$.

出现奇数个 9 的十进制数的个数有 $A = C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$. 又由 $(9+1)^{2006} = \sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}$ 与 $(9-1)^{2006} = \sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^{k}9^{2006-k}$，相减得 $A = C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9 = \frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$.

9. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0 = x$, $a_1 = y$, $a_{n+1} = \frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 问：对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，a_n 恒为常数？

(2) 求通项 a_n.

解　(1) 我们有 $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}} = \frac{a_n^2-1}{a_n+a_{n-1}}$, $n = 1, 2, \cdots$.

所以，如果对某个正整数 n，有 $a_{n+1} = a_n$，则必有 $a_n^2 = 1$，且 $a_n + a_{n-1} \neq 0$.

如果该 $n=1$，我们得 $|y|=1$，且 $x\neq -y$.

如果该 $n>1$，我们有

$$a_n - 1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}} - 1 = \frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}, n \geqslant 2$$

和

$$a_n + 1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}} + 1 = \frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}, n \geqslant 2.$$

两式相乘，得 $a_n^2 - 1 = \frac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}$, $n \geqslant 2$.

由此递推，必有 $|y|=1$ 或 $|x|=1$，且 $y \neq -x$.

反之，如果此条件满足，则当 $n \geqslant 2$ 时，必有 $a_n =$ 常数 1 或 -1.

(2) 由上述，我们得到 $\frac{a_n-1}{a_n+1} = \frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1} \cdot \frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1}$, $n \geqslant 2$.

由此递推，我们得到 $\frac{a_n-1}{a_n+1} = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}}$, $n \geqslant 2$,

这里 $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $F_0 = F_1 = 1$. 解得 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

上式中的 n 还可以向负向延伸，例如，$F_{-1} = 0$, $F_{-2} = 1$.

这样一来，上式对所有的 $n \geqslant 0$ 都成立. 解得

$$a_n = \frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}} + (x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}} - (x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}},$$

$n \geqslant 0$.

10. 对任何正整数 n，求证：$\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^{n}$. 其中 $C_0^0 = 1$，$\left[\frac{n-k}{2}\right]$ 表示 $\frac{n-k}{2}$ 的整数部分.

【证】　考虑展开式 $f(x) = \left(2+x+\frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-k}$.

当 i 为偶数时，$\left(x+\frac{1}{x}\right)^i$ 展开式中只含 x 的偶数次方项，x^0 项系数为 $C_i^{\frac{i}{2}}$. 当 i 为奇数时，$\left(x+\frac{1}{x}\right)^i$ 展开式中只含 x 的奇数次方项，x^{-1} 项系数为 $C_i^{\frac{i-1}{2}}$. 因此，$C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 等于 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-k}$ 展开式中 x^0 项或 x^{-1} 项的系数(每个展开式只含一种项). 故原式左边等于 $f(x)$ 展开式中 x^0 项与 x^{-1} 项系数之和. 另一方面，$f(x) = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$. 因此，原式左边等于 $(1+x)^{2n}$ 展开式中 x^n 项与 x^{n-1} 项系数之和，即等于 $C_{2n}^{n} + C_{2n}^{n-1} = C_{2n+1}^{n}$.

11. 设 n 是大于1的奇数,已知 $X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1)$. 设 $x_i^{(k)}=\begin{cases}0 & x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{(k-1)}\\ 1 & x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{(k-1)}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,其中 $x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$. 记 $X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})(k=1,2,\cdots)$. 若正整数 m 满足 $X_m=X_0$,求证:m 是 n 的倍数.

【证】 取圆周的 n 等分点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 数组 X_k 的各数 $x_i^{(k)}$ 分别写在 A_i 处. 题给的每次操作分为 2 步:

(1) 运算. 将每两个相邻点处的数作(mod 2)加法,结果写在它们所夹弧的中点处,然后擦去原先的数.

(2) 归位. 将新数组逆时针旋转 $\frac{\pi}{n}$,每个 $x_i^{(k+1)}$ 又回到原先位置 A_i 处.

显然,若 X_k 有一条对称轴 L_k(即 X_k 中的数关于 L_k 对称分布),则运算得到的各数也关于 L_k 对称分布,于是归位后的数组 X_{k+1} 有对称轴 $L_{k+1}=TL_k$,T 是绕圆心逆时针旋转 $\frac{\pi}{n}$.

现在由初始条件,X_0 有唯一的对称轴 L_0(过 A_1A_n 中点的直径),故 X_m 有对称轴 $L_m=T^mL_0$. 但 $X_m=X_0$ 的对称轴唯一,故必 $T^mL_0=L_0$,即 $m\cdot\frac{\pi}{n}$ 为 π 的整数倍,从而 $n\mid m$.

12. 给定实数 a,设实数多项式序列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $f_0(x)=1$,$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax)(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 求证:$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right)(n=0,1,2,\cdots)$;(2) 求 $f_n(x)$ 的明显表达式.

解 直接计算,$f_1(x)=x+1$,$f_2(x)=x(x+1)+ax+1=x^2+(a+1)x+1$,$f_3(x)=x^3+(a+1)x^2+x+a^2x^2+(a+1)ax+1=x^3+(a^2+a+1)x^2+(a^2+a+1)x+1$.

当 $a\neq\pm1$ 时,引入记号 $A_n^k=\prod_{i=1}^{k}\frac{a^{n+1-i}-1}{a^i-1}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a^i-1)}{\prod_{i=1}^{k}(a^i-1)\prod_{i=1}^{n-k}(a^i-1)}$. 有类似于二项式系数的性质:$A_n^0=A_n^n=1$,$A_n^k=A_n^{n-k}$,$A_n^k+a^{k+1}A_n^{k+1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{a^{n+1-i}-1}{a^i-1}\cdot\left(1+a^{k+1}\frac{a^{n-k}-1}{a^{k+1}-1}\right)=A_{n+1}^{k+1}$.

对 n 归纳证明 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_n^kx^k$. $n=0$ 显然. 设对 n 成立,则由递推式,

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{n}A_n^kx^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}A_n^ka^kx^k\\&=1+A_n^nx^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(A_n^{k-1}+a^kA_n^k)x^k\\&=\sum_{k=0}^{n+1}A_{n+1}^kx^k.\end{aligned}$$

由此,利用系数的对称性立即得到(1)的结论:

$$x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right)=x^n\sum_{k=0}^{n}A_n^kx^{-k}=\sum_{k=0}^{n}A_n^kx^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}A_n^{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}A_n^kx^k=f_n(x).$$

当 $a=1$ 时,$f_{n+1}(x)=(x+1)f_n(x)$,由初值直接递推得 $f_n(x)=(x+1)^n$. 取极限(I'Hospita 法则)也有 $\lim\limits_{a\to1}A_n^k=C_n^k$.

当 $a=-1$ 时,

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=xf_n(x)+f_n(-x)\\&=xf_n(x)-xf_{n-1}(-x)+f_{n-1}(x)\\&=xf_n(x)+f_{n-1}(x)-x(f_n(x)-xf_{n-1}(x))\\&=(x^2+1)f_{n-1}(x),\end{aligned}$$

由初值递推得 $f_{2n}(x)=(x^2+1)^n$,$f_{2n+1}(x)=(x+1)(x^2+1)^n$. 即有极限

$$\lim_{a\to-1}A_n^k=\begin{cases}0 & n\text{ 偶},k\text{ 奇},\\ C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{k}{2}\right]} & \text{其他}.\end{cases}$$

13. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_1=0$,$a_2=1$,$a_n=\frac{1}{2}na_{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2}+(-1)^n\left(1-\frac{n}{2}\right)$,$n\geqslant3$. 试求 $f_n=a_n+2C_n^1a_{n-1}+3C_n^2a_{n-2}+\cdots+(n-1)C_n^{n-2}a_2+nC_n^{n-1}a_1$ 的最简表达式.

解 约定 $a_0=1$,则题给递推式对 $n\geqslant2$