泛函分析学习指南

北京大学数学科学学院

林源渠 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

泛函分析学习指南

北京大学数学科学学院

林源渠　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析学习指南/林源渠编著.—北京:北京大学出版社.2009.2
ISBN 978-7-301-14387-2

Ⅰ.泛…　Ⅱ.林…　Ⅲ.泛函分析-高等学校-学习　Ⅳ.O177-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 167209 号

书　　名:泛函分析学习指南
著作责任者:林源渠　编著
责 任 编 辑:刘　勇
封 面 设 计:常燕生
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-14387-2/O·0765
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　　电子邮箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
890 mm×1240 mm　A5　8.25 印张　240 千字
2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:18.00 元

内 容 简 介

本书是高等院校高年级本科生泛函分析课程的辅导教材，可与国内通用的泛函分析教材同步使用，特别适合于作为《泛函分析讲义（上册）》（张恭庆、林源渠编著，北京大学出版社）的配套辅导教材。全书共分四章，内容包括度量空间、线性算子与线性泛函、广义函数与索伯列夫空间、紧算子与 Fredholm 算子。每小节按基本内容、典型例题精解两部分编写。基本内容简明介绍了读者应掌握的基础知识；典型例题精解按照基础题、规范题、综合题三种类型，从易到难，循序渐进，详细讲述例题的解法，并对解题方法进行归纳和总结，以帮助学生克服由于不适应泛函分析中全新的研究对象和处理问题的方法所产生的困惑，同时也为任课教师提供一些便利条件。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校数学、计算数学、应用数学等专业大学生学习泛函分析的辅导书。对担任泛函分析课程教学任务的青年教师，本书是较好的教学参考书。

作 者 简 介

林源渠　北京大学数学科学学院教授。1965 年毕业于北京大学数学力学系，长期从事高等数学、数学分析、泛函分析等课程的教学工作，具有丰富的教学经验；对泛函分析解题思路、方法与技巧有深入研究，善于进行归纳和总结。他参加编写的教材有《泛函分析讲义（上册）》、《数值分析》、《数学分析习题课教材》、《数学分析解题指南》（北京大学出版社）、《数学分析习题集》等。

序 言

泛函分析是一门比较抽象的学科，这对学生的学习和教师的教学都有一定的难度。编写这一部《泛函分析学习指南》就是希望以此帮助学生克服由于不适应泛函分析中全新的研究对象和处理问题的方法而产生的困惑，同时也为讲授此课程的教师提供一些便利的条件。目前许多学校选择由北京大学出版社出版，张恭庆、林源渠编著的《泛函分析讲义（上册）》作为本科泛函分析课程的教材。本书的章节安排都与《泛函分析讲义（上册）》教材一致，基本内容部分所列的定理、命题都可以在教材中找到证明。教材中所有稍难的习题在本书中都给出了详细的解法。本书按泛函分析课程教学的基本要求编写，不管课程使用何种教材，都可使用本书作为学习辅导材料。

本书典型例题精解部分所列例题有三种类型：第一种是基础题，它们用到的知识基本上局限在所在章节提供的基本内容范围，只要细心从定义出发或应用所在章节的定理就能得到解答。第二种是规范题，解题使用的方法、体现的思想在泛函分析中具有典型性，学生应从中体验泛函分析的基本思想和方法；它们概括了处理某一类课题的规范性方法。第三种是综合题，它们用到的知识和规范性方法是跨章节的，其中许多是北京大学数学科学学院本科泛函分析课程历来的考试题或本书中首次给出的题；它们具有较大的启发性。通过克服较大困难，独立解出一道综合题，一定程度上可以反映学"活"相关知识。就像栽一盆花，判断花活了没有就看是否长出一个小芽。

本书在排版上进行了一些尝试，例如一串等号 $A=B=C=D$，排版成 U 形等式串：

$$\begin{array}{ccc} A & & D \\ \| & & \| \\ B & = & C \end{array}$$

又如一串推出符号 $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow D$ 排版成 U 形推理串：

$$\begin{array}{ccc} A & & D \\ \Big\Downarrow & & \Big\Uparrow \\ B & \Longrightarrow & C \end{array}$$

根据作者多年的教学经验，这样形式书写的板书和制作的课件直观、醒目，便于学生阅读。

最后，作者对本书责任编辑刘勇同志的细心审校表示衷心的感谢。同时诚恳地希望读者对书中不足之处给予指正。

如果读者阅读本书时遇到疑难问题，可与作者联系，电子邮件地址：lyq@math.pku.edu.cn。

林源渠

2008 年 10 月

于北京大学

目 录

第一章 度量空间

§1 压缩映像原理

基本内容

距离空间的定义

度量空间又称距离空间，它是一种拓扑空间，其上的拓扑由指定的一个距离决定.

定义 1 设 $\mathscr{X}$ 是一个非空集，若存在 $\mathscr{X}$ 上一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$，满足下列三个条件：

(1) 正定性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，而且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式：$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$，

则称 ρ 为 $\mathscr{X}$ 上一个**距离**，$\mathscr{X}$ 称为**距离空间**. 一个以 ρ 为距离的距离空间 $\mathscr{X}$ 记做 $(\mathscr{X},\rho)$.

类似于欧氏空间情形，可以在距离空间中引进一系列重要概念. 首先是拓扑概念，将 $\mathscr{X}$ 中满足不等式 $\rho(x,a)<r$ 的点 x 的全体称为以 a 为中心、r 为半径的**球邻域**. 进一步欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中余集、开集、闭集、聚点以及稠密性等一系列概念都可以搬到距离空间中来. 于是，开集的余集是闭集；闭集的余集是开集；空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathscr{X}$ 是既开又闭的集合；有限个闭集的并集仍是闭集；任意多个开集的并集仍是开集等性质在抽象距离空间中仍成立.

距离空间的刻画

定义 2 距离空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 称为**收敛列**，是指存在 $\mathscr{X}$ 中的点 x，当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x)\to 0$. 此时称 x 是点列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记做 $x_n\to x(n\to\infty)$，也记做 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

引进距离的目的是刻画“收敛”.

定义 3 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上的点列$\{x_n\}$叫做**基本列**,是指当 $n,m\to\infty$时,$\rho(x_n,x_m)\to 0$.

基本列也可叫做 Cauchy 列. 显然$(\mathscr{X},\rho)$中任意收敛列必是基本列;反之,基本列不一定在$\mathscr{X}$中收敛.

例如有理数基本列在有理数域内就不一定有极限.

定义 4 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$叫做**完备的**,是指每个基本列是收敛列.

给定两个距离空间$(\mathscr{X},\rho)$和$(\mathscr{Y},\tau)$,考查映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$.

定义 5 设 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},\tau)$是一个映射,给定 $x_0\in\mathscr{X}$,称 T 在点 x_0 处连续,是指 $\forall x_0\in\mathscr{X}$,$\forall\{x_n\}\subset\mathscr{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\tau(Tx_n,Tx_0)=0.$$

若映射在每一点处都是连续的,就称 T 是$(\mathscr{X},\rho)$上的**连续映射**.

命题 6 给定 $x_0\in\mathscr{X}$,映射 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},\sigma)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,使得对于 $x\in\mathscr{X}$,

$$\rho(x,x_0)<\delta\Longrightarrow\tau(Tx,Tx_0)<\varepsilon.$$

定义 7 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$是一个**压缩映射**,如果存在 $0<\alpha<1$,使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$ $(\forall x,y\in\mathscr{X})$.

定理 8(Banach 不动点定理——压缩映像原理) 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个完备距离空间,T 是$(\mathscr{X},\rho)$到其自身的一个压缩映射, 那么在$\mathscr{X}$中存在唯一的 T 的不动点.

典型例题精解

例 1 设 T 是压缩映射,求证 T^n 也是压缩映射,并说明逆命题不一定成立.

证 (1) 因为 T 是压缩映射,所以 $\exists\alpha\in(0,1)$,使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$,从而

$$\rho(T^2x,T^2y)\leqslant\alpha\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha^2\rho(x,y).$$

假定 $\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y)$成立,则有

$$\rho(T^{n+1}x,T^{n+1}y)\leqslant\alpha\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha\cdot\alpha^n\rho(x,y)=\alpha^{n+1}\rho(x,y).$$

于是根据数学归纳法原理,$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y)$对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 成立.

又 $0<\alpha<1\Longrightarrow 0<\alpha^n\leqslant\alpha<1$,故有

$$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha\rho(x,y),$$

即 T^n 是压缩映射.

(2) 逆命题不一定成立. 例如,设

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}:[0,1]\to[0,1],$$

易知 $$f^2(x)=\frac{x}{2}:[0,1]\to[0,1]$$

是压缩映射. 但是

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}:[0,1]\to[0,1]$$

不是压缩映射. 事实上,如果

$$f(x):[0,1]\to[0,1]$$

是压缩映射,则 $\exists\,\alpha$: $0<\alpha<1$,使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\alpha|x_2-x_1|$$

$$\Longrightarrow\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}\leqslant\alpha\quad(\forall\ x_1,x_2\in[0,1]),$$

即差商 $\dfrac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是有界的. 但是如果取

$$x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=2x_1=\frac{2}{n}\quad(n\geqslant 2),$$

则有

$$\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}=\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\to\infty\quad(n\to\infty),$$

即知差商 $\dfrac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是无界的,矛盾.

例 2 如果存在正整数 n,使得 T^n 是压缩映射,那么 T 有唯一不动点.

证 根据 Banach 不动点定理,$\exists\,x_0$ 使得 $T^nx_0=x_0$,则有

$$T^n(Tx_0)=T^{n+1}x_0=T(T^nx_0)=Tx_0.$$

可知 Tx_0 也是 T^n 的不动点. 由压缩映射 T^n 的不动点的唯一性可知 $Tx_0=x_0$.

这就证明了 T 有不动点.

下面再证 T 的不动点是唯一的. 用反证法. 如果 x_1,x_2 是 T 的两

个不动点，$x_1 \neq x_2$，即有$\begin{cases} Tx_1 = x_1, \\ Tx_2 = x_2, \end{cases}$ 那么

$$\begin{cases} T^n x_1 = T^{n-1}(Tx_1) \xlongequal{Tx_1 = x_1} T^{n-1}(x_1) = \cdots = Tx_1 = x_1, \\ T^n x_2 = T^{n-1}(Tx_2) \xlongequal{Tx_2 = x_2} T^{n-1}(x_2) = \cdots = Tx_2 = x_2, \end{cases}$$

即 x_1, x_2 是 T^n 的两个不动点. 因为 T^n 是压缩映射，所以 T^n 有唯一不动点，从而 $x_1 = x_2$，矛盾.

例 3 设$(\mathscr{X}, \rho)$是一个完备距离空间，映射 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 满足

$$a_n \xlongequal{\text{def}} \sup_{x,y \in \mathscr{X}} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x,y)} \to 0 \quad (0 \to \infty).$$

证明：映射 T 在 $\mathscr{X}$ 中必有唯一的不动点.

证 取 $\varepsilon = 1/2 > 0$，因为 $a_n \to 0 (n \to \infty)$，故 $\exists n_0$ 使得 $a_{n_0} < 1/2$，即

$$\rho(T^{n_0} x, T^{n_0} y) \leqslant \frac{1}{2} \rho(x,y), \quad x, y \in \mathscr{X},$$

即 T^{n_0}是压缩映射. 根据例 2 的结论，T 在 $\mathscr{X}$ 中必有唯一的不动点.

例 4 (1) 证明完备度量空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间的完备子空间必是闭子集.

(2) 设$(\mathscr{X}, \rho)$是一个完备距离空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的闭子集，$r_n > 0$，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty.$$

证明：如果映射 $T: M \to M$ 满足 $\rho(T^n x, T^n y) \leqslant r_n \rho(x,y)$，$x, y \in M$，那么映射 T 必有唯一的不动点，并且对 $\forall x_0 \in M$，$T^n x_0$ 收敛到该不动点，换句话说，该不动点可由迭代法产生.

证 (1) 设 $\mathscr{X}$ 是完备度量空间，$M \subset \mathscr{X}$ 是闭的. 要证 M 是一个完备的子空间. 考虑

$$\forall\, x_m, x_n \in M, \quad \|x_m - x_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$
$$\Longrightarrow x_m, x_n \in \mathscr{X}, \quad \|x_m - x_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

因为 $\mathscr{X}$ 是完备度量空间，所以 $\exists x \in \mathscr{X}$，使得 $x_n \to x$，从而有

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in M, x_n \to x \\ M \subset \mathscr{X} \text{ 是闭的} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in M.$$

因此，$\forall\, x_m, x_n \in M$，$\|x_m - x_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$，

$$\exists\, x \in M,\text{使得 } x_n \to x$$
$$\Longrightarrow M \text{ 是一个完备的子空间.}$$

下设 $\mathscr{X}$ 是一度量空间,M 是 $\mathscr{X}$ 的一个完备子空间. 要证 M 是闭子集,即：若 $x_n\in M, x_n\to x$,要证 $x\in M$. 事实上,因为收敛列是基本列,所以有

$$x_n \in M, \quad \|x_m - x_n\| \to 0 \quad (m,n\to\infty).$$

又 M 是完备度量空间,所以 $\exists\, x'\in M$,使得 $x_n\to x'$,即有

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ x_n \to x' \end{array}\right\} \Longrightarrow x = x' \in M.$$

(2) 依题意,$(\mathscr{X},\rho)$是一个完备距离空间,M 是 $\mathscr{X}$ 的闭子集,故(M,ρ)也是一个完备距离空间,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty \Longrightarrow r_n \to 0\ (n\to\infty) \Longrightarrow \exists\, n_0,\text{使得 } r_{n_0} < 1.$$

由

$$\rho(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leqslant r_{n_0}\rho(x,y), \quad x,y\in M,$$

即 T^{n_0}是压缩映射,根据例 2 的结论,T 有唯一不动点. 设此不动点为 x^*,即有

$$Tx^* = x^* = T^{n_0}x^*.$$

进一步,对 $\forall\, x_0\in M$,记 $x_n = T^n x_0\,(n=1,2,\cdots)$,下面证明$\{x_n = T^n x_0\}$是基本列. 考虑

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(T^{n+1}x_0, T^n x_0) = \rho(T^n(Tx_0), T^n x_0) \leqslant r_n\rho(Tx_0,x_0).$$

根据三角不等式,对任意的自然数 p,有

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n) &\leqslant \sum_{i=1}^{p}\rho(x_{n+i},x_{n+i-1}) \leqslant \rho(Tx_0,x_0)\sum_{i=1}^{p} r_{n+i-1} \\ &= \rho(Tx_0,x_0)\sum_{k=n}^{n+p-1} r_k \leqslant \rho(Tx_0,x_0)\sum_{k=n}^{\infty} r_k \to 0, \quad n\to\infty\end{aligned}$$

对任意的自然数 p 一致成立. 因此,$\{x_n = T^n x_0\}$是基本列. 由(M,ρ)的完备性,必存在 $\bar{x}\in M, x_n\to\bar{x}$. 这样,一方面,因为 T^{n_0}是压缩映射,有唯一不动点 x^*,所以对 $\forall\, x_0\in M$,有

$$T^{nn_0}x_0 = (T^{n_0})^n x_0 \to x^* \quad (n\to\infty);$$

另一方面,

$$T^{nn_0}x_0 = x_{nn_0} \to \bar{x} \quad (n\to\infty),$$

故有 $\bar{x}=x^*$.

例 5 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，映射 $T: M\to M$ 满足

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (\forall\, x,y\in M, x\neq y).$$

求证 T 在 M 中存在唯一的不动点.

证 因为

$$\rho(Tx,Tx_0) < \rho(x,x_0),$$

所以

$$\rho(x,x_0)\to 0 \Longrightarrow \rho(Tx,Tx_0)\to 0.$$

再由三角不等式，得到

$$|\rho(x,Tx)-\rho(x_0,Tx_0)| \leqslant \rho(x,x_0)+\rho(Tx,Tx_0).$$

由此可见，$f(x)\xlongequal{\text{def}}\rho(x,Tx)$ 在 M 上连续.

因为 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，所以 $\exists\, x_0\in M$，使得

$$\rho(x_0,Tx_0) = f(x_0) = \min_{x\in M} f(x) = \min_{x\in M}\rho(x,Tx).$$

如果 $\rho(x_0,Tx_0)=0$，那么 x_0 就是不动点. 今假设 $\rho(x_0,Tx_0)>0$. 根据假设，我们有

$$\rho(Tx_0,T^2x_0) < \rho(x_0,Tx_0) = \min_{x\in M}\rho(x,Tx).$$

但是 $Tx_0, T^2x_0\in M$，这与 $\rho(x_0,Tx_0)$ 是最小值矛盾. 故 $\rho(x_0,Tx_0)=0$，即存在不动点 x_0.

不动点的唯一性是显然的. 事实上，如果存在两个不动点 x_1,x_2，则从

$$\rho(x_1,x_2) = \rho(Tx_1,Tx_2) < \rho(x_1,x_2)$$

即得矛盾.

注 假如把条件"M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集"去掉，只假定

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (\forall\, x,y\in M, x\neq y),$$

结论一般不对. 例如，取

$$M=\mathbb{R}^1,\quad Tx = \pi/2 + x - \arctan x,$$

则有

$$\rho(Tx,Ty) = |Tx-Ty| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x-y| < |x-y| = \rho(x,y).$$

由此可见,映射 T 满足假定:

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (\forall\, x,y \in M, x \neq y),$$

但是 $Tx = x \Longrightarrow \arctan x = \pi/2$,这是不可能的,因此映射 T 没有不动点.

例 6 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个完备距离空间,M 是 $\mathscr{X}$ 的闭子集,$0<\alpha<1$,映射 T_n: $M \to M$ 满足

$$\rho(T_nx,T_ny) \leqslant \alpha\rho(x,y) \quad (x,y \in M),$$

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_nx \quad (x \in M),$$

并且 $x_n = T_nx_n \in M$. 证明:映射 T 有唯一的不动点,并且 x_n 收敛到该不动点.

证 (1) 由距离的连续性,对不等式

$$\rho(T_nx,T_ny) \leqslant \alpha\rho(x,y) \quad (x,y \in M)$$

令 $n\to\infty$取极限,得到

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y) \quad (x,y \in M).$$

由此推出 T 是压缩映射,因而 T 有不动点,设之为 x^*,即有

$$Tx^* = x^*.$$

(2) 条件

$$\rho(T_nx,T_ny) \leqslant \alpha\rho(x,y) \quad (x,y \in M)$$

意味着每个 T_n 都是压缩映射,$x_n = T_nx_n$ 说明 x_n 是 T_n 的不动点. $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_nx$ 可以看做 T 是 T_n 的极限,那么 T 的不动点 x^* 是否是 T_n 的不动点 x_n 的极限呢? 考虑

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x^*) &= \rho(T_nx_n,Tx^*) \leqslant \rho(T_nx_n,T_nx^*) + \rho(T_nx^*,Tx^*)\\ &\leqslant \alpha\rho(x_n,x^*) + \rho(T_nx^*,Tx^*),\end{aligned}$$

由此推出

$$\rho(x_n,x^*) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\rho(T_nx^*,Tx^*).$$

又因为 $Tx^* = \lim\limits_{n\to\infty} T_nx^*$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x^*) = 0 \Longrightarrow x_n \to x^* \quad (n\to\infty).$$

例 7 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个完备距离空间,$B(y_0,r)\subset\mathscr{X}$ 是以 y_0 为中心、r 为半径的开球. 如果映射 T: $B(y_0,r)\to\mathscr{X}$ 满足 $\rho(Tx,Ty)\leqslant \alpha\rho(x,y)$,而且