

张雄 著

数学教育学概论

SHUXUE
JIAOYUXUE
GAILUN

陕西科学技术出版社

第四版

数 学

教育学概论

REHLEUTHE
EDUCATION
CONCEPT

教育部师范类专业必修教材

数学教育学概论

张 雄 著

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教育学概论/张雄著. —西安:陕西科学技术出版社,2001.9

ISBN 7-5369-3385-1

I. 数... II. 张... III. 数学课—教育理论
IV. 01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 077063 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编:710003 电话:(029)7211894 传真:(029)7218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话:(029)7212206 7260001
印 刷	煤科院西安分院印刷厂
规 格	850mm × 1168mm 32 开本
印 张	9.625
字 数	260 千字
印 数	1-1500
版 次	2001 年 11 月第 1 版 2001 年 11 月第 1 次印刷
定 价	25.00 元

(如有印装质量问题,请与承印厂联系调换)

前 言

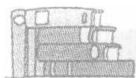
数学教育是一种社会文化现象,其中有许许多多的奥秘需要人们去研究,这便使数学教育学应运而生。从事数学教育研究,既要通晓数学,又要研究教育,但它又绝非教育学原理加数学例子。数学教育学是综合数学、教育学、心理学、哲学、文化学、思维科学、系统科学、信息技术学等多门学科的交叉科学,有结合部,有生长点,也有茁壮成长的新苗。

数学教育是科学,表现在依据数学科学的特点,揭示专业学科与教育学、心理学之间的内在联系,以寻求数学科学与教育及心理科学在教育过程中的最佳结合,使之达到教学规律与数学科学特点的统一。数学教育是技术,表现在数学的教与学活动之运作,需有技术作支撑,尤其是现代信息技术将从根本上提高数学教育的有效性,技术决定效率。数学教育是艺术,每一活动过程及其细节都讲究精湛维妙,讲究个性,讲究感染力,以达炉火纯青之境界。

科学的价值在于探索、在于求真;技术的功能在于有效、在于求善;艺术的生命在于创造、在于求美。这一切都需要创新,只有教育创新,才能赢得创新的教育。这是一个求真、求善、求美的过程,数学教育应该是一个真善美的结合体。

本书首先论述数学观和数学教育观(数学教育思想),前者是数学教育的认识论基础,后者是数学教育的价值观和活动总纲。其次研究了数学教育与社会、文化的关系。然后,就数学课程论、数学学习论、数学教学论分别展开论述,并构成了本书的主体内容。全书力图从认识论、价值观、方法论的角度进行研究和论述,以一个全新的“数学教育学”体系呈现在世人面前,这是笔者的写作意愿。但是,数学教育研究的内容十分浩瀚,不可能在这一本书中论述详尽,因此,本书只能取名《数学教育学概论》。

书中内容还尽可能地反映了国内外数学教育最新的前沿成果,



比如,数学问题解决、建构主义、数学实验室等当今的一些热门话题,还有基础教育课程改革的最新研究等。求新是本书的一个特点。

这本《数学教育学概论》是笔者在多年来从事数学教育研究的基础上写成的,它是笔者多年研究心得与心血的结晶。其中部分内容以论文的形式已在一些学术刊物上发表。在 21 世纪头一个收获的季节里,本书得以出版,这是笔者对新世纪数学教育事业奉献的一份微薄的贺礼。这个收获的季节,也恰是笔者步入不惑年龄之际,虽然努力研究,力求“不惑”,但“困惑”不免存在,书中难免有缺点和错误,欢迎读者批评指正。

最后提到的是,书中参考了不少的论文和著作,在此向其作者致谢。对陕西科学技术出版社的副编审宋宇虎同志及有关同志表示感谢。

张 雄

2001.10.7 于西安

目 录

第一章 数学教育学:一门正在发展中的学科	1
第一节 数学教育的产生、发展与范式革命	1
第二节 从“数学教材教法”到“数学教育学”的沿革	7
第三节 数学教育学研究的对象	9
第四节 数学教育学的体系结构与理论基础	10
第二章 数学观:数学教育的认识论基础	13
第一节 数学观是数学教育的认识论基础	14
第二节 逻辑主义、直觉主义和形式主义	16
第三节 数学是模式的科学	21
第四节 数学是一种文化	26
第五节 数学是一种技术	31
第六节 数学是一种艺术	39
第三章 数学教育的文化透析	46
第一节 中国传统文化对数学教育的影响	46
第二节 东亚数学教育的特征	51
第三节 民族数学	53
第四节 数学教育中的文化观念	57
第四章 数学教育目的	62
第一节 数学教育目标概述	62
第二节 两种传统的数学教育目的观	68
第三节 数学教育目的新定位	72
第五章 数学课程	77
第一节 课程的概念和课程论	77
第二节 课程目标	83



第三节	数学课程的设计	89
第四节	数学课程的沿革	95
第六章	数学学习过程	101
第一节	学习的概念和特点	101
第二节	行为主义的学习理论	104
第三节	认知学派的学习理论	107
第四节	建构主义的数学学习观	115
第五节	数学学习过程的心理分析	121
第六节	数学学习的类型及学习中的迁移	131
第七节	非智力因素在数学学习中的地位与作用	135
第七章	数学问题解决和数学能力	143
第一节	数学问题解决	143
第二节	数学技能和数学能力	154
第三节	研究性学习	161
第八章	思维与数学教学	171
第一节	思维与科学思维方法概述	171
第二节	思维与数学教学	175
第三节	抽象思维	180
第四节	创新性思维	189
第五节	直觉思维	200
第六节	数学思想方法的教学	207
第九章	创新精神的培育	221
第一节	素质教育的核心目标	221
第二节	创新精神的培育	231
第三节	实践能力的培养	243
第十章	数学教学的原理与原则	250
第一节	数学教学模式分析	250
第二节	数学教学原理	255
第三节	弗赖登塔尔的数学教学原则	260

第四节	教学过程的最优化	266
第十一章	现代数学教育技术	272
第一节	现代教育技术热点概述	272
第二节	计算机辅助数学教学	279
第三节	数学实验	287

第 1 章

数学教育学： 一门正在发展中的学科

第一节 数学教育的产生、发展与范式革命

数学教育是一种社会现象，它是随着数学的产生和教育的产生而产生的，至今已经历了数千年漫长的历史。这中间经过了很长的历史演变过程。

一、数学教育的产生

数学教育的历史与数学的历史同样悠久。尽管作为一门严密的、系统的数学科学一般是从公元前 300 年到公元前 600 年之间的古希腊学者登场算起，但是，数学的源头可以追溯到人类开始计数的原始社会。人类产生数的观念最初出现于旧石器时代，距今大约有上万年乃至几十万年的时间。

就世界范围而言，古埃及、古巴比伦、古希腊、中国、印度等地的数学起源都是很早的。由现存的古埃及纸草书可知，约 4000 年前已有关于几何、算术知识的记载。拿记数法来说，古埃及在 3000 多年前就有了十进制，古巴比伦人在 2000 多年前采用的是六十进位值制，3000 多年前的中国商代就有了完整的十进位值制。公元前 2000 多年的巴比伦的泥板书中有块泥板上刻着如下一个问题：“长为 30 单位的一根棍子靠墙而立，上端下滑 6 单位，下端距墙根多远？”这说



明勾股定理至少在距今 4000 多年前就有了。再如,最早系统研究黄金分割的是公元前 4 世纪的希腊数学家欧多克斯(Eudoxus),可是黄金分割的起源与正五边形和五角星形的作图有关,现在发现最早的五角星形图案是在幼发拉底河下游马鲁克地方(现属伊拉克)发现的一块公元前 3200 年左右制成的泥板上。类似这样的例子很多。但那时的数学教育只是极初步的、零散的。

公元前 6 世纪以后,在学习古埃及和古巴比伦数学的基础上,古希腊数学取得较大的发展,同时也就促进了数学教育的进一步发展。柏拉图(Platon)学院门口挂着“不懂几何者不得入内”的牌子,由此可见一斑。

中国据《周礼》记载,始于公元前 11 世纪的西周时代的教育内容为“六艺”:礼、乐、射、御、书、数,数学为其中之一。这说明至少在我国周代,数学教育已从生产和生活中分离出来了,数学已经成为当时国学(官学)和私学中的教育内容之一。中国封建社会的数学教育以私学为主,家传或师徒相授。中世纪西方的数学教育则被教会所垄断。

现代意义下的学校数学教育产生于工业革命时期。1760 年,英国的普里斯特利(J·Priestly)首先提出包括数学在内的基础的学术性课程,此后欧美各国也建立起内容大致相同的数学课程,并逐步推广到全世界。中国是在 1911 年辛亥革命以后才真正兴办学校数学教育,普及西算的。这就是说,真正的数学教育从产生到现在只有 200 多年的时间,在中国还不到 100 年。

二、数学教育的近代发展

从普里斯特利开始发展起来的数学课程,经过了 100 多年后,到 19 世纪末、20 世纪初,人们意识到当时的教学内容与实际应用脱节,与近代数学的发展脱节,因此就掀起了一场以改革课程内容为中心的数学教育改革运动。在这场数学教育近代化运动中,出现了一批名垂史册的数学教育改革家,其中英国的贝利(Perry)和德国数学家

克莱因(F·Klein)是影响最大的倡导者和领导者。

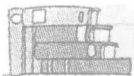
贝利于 1899 年写出一本《实用数学》，并积极倡导政府采用。1901 年，贝利发表了著名的演说“论数学教学”，认为“要从欧几里得(Euclid)《几何原本》的束缚中完全解脱出来；要充分重视实验几何学；要重视各种实际测量与近似计算；要充分利用坐标纸；应多教些立体几何(画法几何)；较过去更多地利用几何学知识；应尽早地教授微积分概念”^①。贝利提倡“实用数学”，主张废弃欧氏几何抽象的几何体系，设置“数学实验室”，用方格纸给没有学过代数和几何的人讲“解析几何”。他强调“在儿童们了解事物的根源之前，必须先对那些事物有亲近感，并进行观察。即便是简单的事物，与其由教师指出，不如让学生自己去发现”^②。

德国著名数学家、哥廷根大学教授克莱因更注重对数学教学内容和结构的更新。他在《高观点下的初等数学》中告诫人们，要用近代数学的观点和内容改造、充实传统的中学数学内容。克莱因倡导的数学教育改革的核心思想是：①提倡数学理论应用于实际；②教材内容应以函数概念为中心；③运用教育学、心理学的观点指导教学活动。这三点意见反映了当时以机械电气工业为主体的社会经济结构、推行义务教育制度以及数学科学成就的新观念。

欧洲数学在中国的传播是从明末清初开始的。耶稣会传教士来到中国，传入了西方的天文历法知识的同时，也传入了西方数学。意大利传教士利玛窦(Matteo Ricci)于 1582 年来华，他与徐光启合译《几何原本》前六卷于 1607 年出版。1840 年鸦片战争以后，国门被打开，有更多的传教士来华翻译介绍西方数学，并兴办学校。1853 年，英国人伟烈亚力(A·Wylie)在上海用中文写了一本《数学启蒙》介绍西方数学。1859 年，伟烈亚力和李善兰合译《代微积拾级》一书，介绍解析几何、微积分和代数学的知识。

① 马忠林编著：《比较数学教育学》，辽宁教育出版社，第 76 页。

② 马忠林编著：《比较数学教育学》，辽宁教育出版社，第 78 页。



这一时期中国的数学教育较多的受美国、英国、日本的影响,教学内容与其它国家类似,但使用的是汉字符号,被称为“套上中国马夹的西算”。进入 20 世纪以后,才是直接翻译欧美教材,形式完全西化。20 年代流行混合算学,30 年代以后又恢复了分科的做法。

三、数学教育的现代发展

20 世纪 40 年代以后,原子能、电子计算机、空间技术、遗传工程等先进科技相继出现,使社会生产进入了高度机械化、电气化和自动化,这一社会发展对人才素质有了更高的要求,工业化社会发展起来的数学课程,已经明显地不能够适应已经出现的信息化社会。同时,这一时期的数学(尤其是应用数学)有了很大的发展,而 30 年代法国的布尔巴基(Bourbaki)学派提出数学结构化思想影响很大。他们用数学结构思想,把全部数学内容在序结构、代数结构和拓扑结构下得到统一,这就使集合论、公理化方法成了各门现代数学的基础。而传统的数学课程内容中则没有反映这些变化,于是出现了用结构思想改造数学课程内容的意向。另外,20 世纪 50 年代,心理学关于人的认知结构研究的新成就,为课程以及教学改革提供了理论依据。如此诸端,构成了数学教育现代发展的契机。

1957 年 11 月前苏联第一颗人造卫星发射成功是“新数学运动”的“导火索”。在人造卫星上天的直接促使下,美国人大找“导弹差距”,反思自己的科技和教育,决心从基础教育改革入手来发展教育、促进科技。1958 年春,美国数学协会和美国数学教师全国协会协助民间成立了全国性的“学校数学研究小组”(The School Mathematics Study Group,简称 SMSG),全面负责实验研究和教材编写工作。紧接着,英国也成立了著名的学校课程改革团体——“学校数学设计组”(The School Mathematics Project,简称 SMP)。这便掀开了数学教育现代化的序幕。

从 1959 年到 1962 年,多次召开区域性或全球性的国际会议,研究讨论数学教育现代化问题。短短几年中,“新数学运动”从欧洲、美

洲遍及到东南亚以至整个世界(中国忙于“文化大革命”没有赶上数学教育界的文化大革命)。

经过五、六年的酝酿、讨论、试验等工作,美国的 SMSG 编写出了风行一时的中学数学第一套现代化教材——《统一的现代数学》。其它各国也相继出现了许多新大纲、新教材,用“新数学”大量取代了传统数学课程。虽然各国类型不一、各具特色,但它们追求的共同目标和特点是:精简传统内容,增加近、现代内容,使用近、现代数学符号;使几何内容代数化;利用公理化导致抽象化;以集合——映射——关系——运算——群——环——域——向量空间的代数结构为主轴,实现中学数学内容统一化,导出数学结构。比如,主张应当基于康托(Cantor)集合论等势的概念在幼儿园进行数的教学,于是那时出现了这样的情景:老师在黑板上用不同的颜色在两个集合的元素之间画连线,以便解释什么是一一对应,但却不提如何计数和计算的问题。

经过十多年的实践,到了 70 年代初,人们发现由于“新数学”强化数学结构,概念十分抽象,大部分学生难以理解和接受,学生的几何直观能力、计算能力和应用数学知识解决实际问题的能力明显下降,而且多数教师难以胜任教学。“新数学”受到了激烈的批评。到 1973 年左右,“新数学”以失败而告终,并提出“回到基础”。

“新数学运动”虽然没有达到预期的效果,但它还是极大地推动了数学教育的现代发展。改革的初衷是正确的,特别是数学教育必须适应新技术革命的发展,这一点已是人们的共识。“新数学运动”留给我们有教训、有经验、也有启示。

继“新数学”和“回到基础”之后,80 年代,美国又提出了“问题解决”的口号,并得到了其它国家的响应,至今仍方兴未艾。八九十年代以来,“大众数学”、“建构主义”又反映出现代数学教育发展的新思潮,在以后的内容中我们将逐渐给以论述。

四、数学教育的范式革命

“范式”意思是指“规范理论”,“变律性”与传统的“规范”相抵触,



产生“科学革命”的可能,这在科学哲学中被称为“范式革命”。托马斯·库恩(Kuhn)用“范式革命”来解释科学的发展进程:当人们发现旧的“范式”不适当时,就会对它进行彻底修改或完全放弃,从而进入一个新的“范式”。我们用数学教育的范式革命来描述数学教育所经历的变化。例如,金斯贝格(Ginsburg)在其《数学思维的结构》中就明确指出:今天数学教育研究也正在经历一场“范式革命”。

“数学教育范式是某一个时代数学教育工作者们关于数学教育所持有的那些共同的核心观念,思维框架或思维方式。因此数学教育范式的存在性是显然的。它就存在于这个时代的各种数学教育活动中(从数学教育目标的确定和课程标准的设计到每个教师的具体教学活动)。这也提示我们应如何认识与揭示‘数学教育范式’,包括可采用的‘常规’研究方法。全部问题的关键是如何超越现在具体的数学教育活动的全部细节、超越不同(甚至相互对应)数学教育理论的差异,去发现其中的某种‘共性’揭示那些根本‘观念’上的相同点。因为正是这些观念决定了一个时代的数学教育的基本特征。也正是这些基本观念的转变标志着一种全新的数学教育范式的诞生和‘传统’的数学教育的结束。这就是所谓的数学教育范式革命!”^① 数学教育范式的确立,一般需要由以下三个维度来支撑:价值观(社会、文化与数学教育的互动关系)、认识论观、数学观。这三个方面构成数学教育观念的核心框架。

王长沛先生提出,中国的数学教育经历了三次范式革命。第一次是辛亥革命和五四运动时期,中国的中小学普及西方数学,与国际通用的数学语言接轨。第二次是1949年建国之后,在学习苏联的基础上,于1963年建立了自己的数学教育体系,创造性地提出培养运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力这“三大能力”,打好基本知识、基本技能这“双基”,形成严密的逻辑演绎课程结构。第三次就是从

^① 王长沛、韩守为:“中国数学教育的范式革命”,《数学教育学报》,1999年第2期。

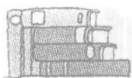
90年代以来,以素质教育为目标的数学教育改革。

第二节 从“数学教材教法”到 “数学教育学”的沿革

数学教育的历史悠久,而早些时期的数学教育是自发的和无意识状态。随着近代社会发展进程的加快,数学教育与社会、数学科学、受教育者的矛盾日益突出,人们越来越意识到探究数学教育这一特殊教育过程的规律的重要性的迫切性。最早提出把数学教育过程从教育过程中分离出来,作为一门独立的科学加以研究的是瑞士教育家裴斯塔洛齐(J·H·Pestalozzi)。他于1803年发表的《关于数的直觉理论》一书中,第一次提出了“数学教学法”这一名词。这便是独立研究数学教育理论的发端。

早在清朝末年,我国已开始编译中学数学课本和教学法书籍,当时的京师大学堂里就列有“算学教授法”的课程,1908年赵秉良编译了日本藤泽喜太郎著的《算术条目及教授法》一书,由上海南洋官书局发行。民国以后的出版物,把论及数学教学的著作都冠以“数学教学法”的标题。我国自编数学教学法书籍始于商务印书馆1949年1月出版的《中学数学教学法》一书,该书是刘开达总结了自己多年的数学教学经验于1947年写成的,书中对数学教学现状、教学目的、教学原则作了论述,还论述了算术、代数、几何、三角教学法。解放以后,中小学数学教材基本照搬苏联的,高等师范院校数学教育方面的课程设置的教材也是如此,中学数学教学法课的教材是翻译苏联伯拉基斯的《中学数学教学法》。此后虽有我国自己的数学教学法著作陆续问世,但都未能超越“教材的教法”,停留在传授具体教学经验层面上。

1969年召开的第一届国际数学教育会议决议中提出:“数学教



育学越来越变成具有自己的课题、方法和实验的独立学科”。这是在新技术革命时代社会发展对数学教育的呼唤,是诸学科教育中最为活跃的数学教育经历了近代化运动和“新数学运动”之后意识到需要对数学教育本身进行全面性的研究,渴望数学教育理论的指导,而不再仅仅是教学法一招一式的探讨。进入 20 世纪 70 年代,苏联出版了第一本《数学教育学》。1982 年,在中国教育学会数学教学研究会成立大会和首届年会上,提出了“建立数学教育学,形成数学教育这一专门的学科”的任务。1984 年由丁尔升教授将斯托利亚尔的《数学教育学》译成中文出版。国内使用“数学教育学”这个名称并将它作为一门科学开展研究,大约始于 20 世纪 80 年代中期。

从“数学教学法”或“数学教材教法”到“数学教育学”,这不仅仅是一个“称呼”的问题,而是包含着质的飞跃,它反映了 20 世纪数学教育思想的演变过程。

过去在高师院校开设的“教材教法”这一传统课程,往往只回答具体内容怎么教的问题,注重的是一招一式、一技一艺的传授和获得,有的内容甚至变成数学教材的重复,较少从中提炼出规律,未能回答本质的东西,即以课堂教学为主体,以施教方法为核心,以经验描述为内容而展开,是教师—教材—学生的单性循环,而不是全方位的立体交叉研究,注重经验描述,而未能将实践经验升华为数学教育科学原理并用理论指导教育教学实践,以致其理论性不强,缺乏科学性。因而“数学教材教法”已不能适应数学教育发展的需要。

现代教学论和各专业学科的发展,将“数学教材教法”转变为“数学教育学”,不仅研究如何教?还要研究教什么?为何而教?如何学?学到何种程度?如何评价?等等,涉及到数学的认识论、价值论和方法论的一系列问题,是把“教与学”作为一个系统工程进行全面的规律性的研究。因而,“数学教育学”是依据数学科学的特点,揭示