21世纪高等职业教育数学规划教材

gaozhi jiaoyu

新编微积分

主　编　刘书田
编　著　李志强 高淑娥 周友军

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪高等职业教育数学规划教材

新编微积分

主编　刘书田
编著　李志强　高淑娥　周友军

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编微积分/刘书田主编. —北京：北京大学出版社，2009.6
(21世纪高等职业教育数学规划教材)
ISBN 978-7-301-14421-3

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.微积分-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第169141号

书　　名：新编微积分
著作责任者：刘书田 主编　李志强　高淑娥　周友军 编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-14421-3/O·0766
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16开本　10.5印张　240千字
2009年6月第1版　2009年6月第1次印刷
印　　数：0001—4000册
定　　价：19.00元

内容简介

本书是高等职业教育数学基础课微积分的教材. 全书共分五章,内容包括: 函数与极限,导数与微分,导数的应用,积分及其应用,多元函数微分学. 本书每节有"学习本节要达到的目标",节后配有适量的 A、B 两组习题;每章后配有总习题,供教师和学生选用;书后附有习题参考答案,对较难的习题有习题解答供读者参考.

本书注重基础知识的讲述和基本能力训练,本着重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路,根据目前高等职业教育数学课的教学实际,并参照授课学时精选内容编写而成. 本书叙述由浅入深、通俗易懂,概念清晰,难点分散,例题典型又贴近实际,注意归纳数学思想方法、解题思路与解题程序,便于教师教学与学生自学.

本书可作为高职高专经济管理类各专业大学生微积分的教材,也可作为文科相关专业大学生的数学教材或教学参考书.

21世纪高等职业教育数学规划教材书目

新编高等数学	刘书田主编	定价24.00元
新编微积分	刘书田主编	定价19.00元
新编线性代数与概率统计	刘书田主编	定价22.00元

前　言

当前,我国高等职业教育蓬勃发展,教学改革不断深入,高等职业院校数学基础课的教学理念、教学内容以及教材建设也孕育在这种变革之中.目前高职院校正在酝酿或进行的教学内容和授课学时的调整是教学改革中的一部分,这势必要求教材内容也应反映相应的改革精神.为了适应高职数学基础课教学内容和课程体系改革的总目标,培养具有创新能力的高素质应用型人才,我们应北京大学出版社的邀请,经统一策划、集体讨论,分工编写了这套《21 世纪高等职业教育数学规划教材》.这套教材共分三册,其中包括《新编高等数学》、《新编微积分》、《新编线性代数与概率统计》.

本套教材本着重基础知识、重基本训练、重素质、重能力、重应用、求创新的总体思路,在认真总结高职数学基础课教学改革的经验基础上,由长期在教学第一线具有丰富教学经验的资深教师编写.

本书是《新编微积分》分册,它具有以下特点:

1. 以高职高专学生的基础知识状况、教学课时相应调整、与后继课程相衔接为依据,调整结构体系,精选教材内容;注意与生产、管理的实际需求相适应,力求实现基础性、科学性、系统性的和谐与统一.

2. 按照认知规律,以几何直观、物理背景和经济解释作为引入数学概念的切入点;对重要内容的讲解简洁、透彻,特别是对微积分在经济领域中的应用的讲述颇具新意,便于学生理解与掌握.

3. 内容叙述由浅入深、通俗易懂、难点分散,注意归纳数学思维方法及解题程序.

4. 强调基础训练和基本能力的培养.紧密结合数学概念、定理和运算法则配置适量的例题,按节配置 A,B 两组习题,每章配有总习题,书末附有习题答案和较详细的提示,便于读者参考.

本书的上述特点便于任课教师根据教学课时选择和安排教学内容,同时也便于学生自学.

本书由刘书田、李志强、高淑娥、周友军执笔编写,并由主编刘书田对全书进行了统稿,经修改后定稿.参加本书编写工作的还有冯翠莲、何自金、杨丽丽、甘艳、于学文、

石莹.

本套教材在编写过程中得到了北京工业大学实验学院、北京交通职业技术学院、首都经济贸易大学密云分校有关领导的大力支持，同时也得到了北京大学出版社的积极支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，不足之处恳请读者批评指正.

编　者

2009年4月

目　录

第一章 函数与极限

微积分学研究的对象是函数，函数极限和函数连续性的基本内容是研究微积分学所必须具备的知识.

本章先复习函数概念和初等函数，然后讲述函数的极限概念及其运算，并在此基础上导出函数的连续性概念及连续函数的性质.

§1.1 函数概念

【学习本节要达到的目标】

1. 理解函数定义，反函数定义和复合函数定义.
2. 了解函数有界性的定义.

一、函数概念

1. 函数定义

在我们的周围，变化无处不在. 所有的事物都在变化. 在一些变化着的现象中存在着两个变化的量，简称**变量**. 两个变量不是彼此孤立，而是相互联系、相互制约，当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有唯一确定的值与之对应，变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的**非空数集**. 若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的**对应法则** f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集. 由此，若 x 取数值 $x_0\in D$ 时，则称该函数在 x_0 **有定义**，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**，记为

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y\big|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Y=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为该函数的**值域**. 若 $x_0 \overline{\in} D$，则称该函数在点 x_0 **没有定义**.

由函数的定义可知，决定一个函数有**三个因素**：定义域 D，对应法则 f 和值域 Y. 注意到每一个函数值都可由一个 $x\in D$ 通过 f 而唯一确定，于是给定 D 和 f，则 Y 就相应地被确定了；从而定义域 D 和对应法则 f 是决定一个函数的**两个要素**. 称**两个函数相等**，是指它们的定义域相同且对应法则也相同.

直角坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像. 函数的图形一般是坐标平面上的一条曲线（包括直线）.

例 1　设函数 $y=f(x)=\dfrac{1+x^2}{x-2}$.

(1) 求 $f(0),f(a),f(x_0+h)$；　　(2) 求 $f(-x),f(x-1),f(f(x))$；

(3) $f(2)$ 是否有意义，为什么？

解　(1) 这是已知函数的解析表达式，求函数在指定点的函数值.

$f(0)$ 表示已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的函数值. 用 0 代换解析式 $\dfrac{1+x^2}{x-2}$ 中的 x，得

$$f(0)=\frac{1+x^2}{x-2}\bigg|_{x=0}=\frac{1+0^2}{0-2}=-\frac{1}{2}, \quad \text{或} \quad y\big|_{x=0}=\frac{1+0^2}{0-2}=-\frac{1}{2}.$$

同理可得

$$f(a)=\frac{1+a^2}{a-2} \quad \text{或} \quad y\big|_{x=a}=\frac{1+x^2}{x-2}\bigg|_{x=a}=\frac{1+a^2}{a-2};$$

$$f(x_0+h)=\frac{1+(x_0+h)^2}{(x_0+h)-2} \quad \text{或} \quad y\big|_{x=x_0+h}=\frac{1+x^2}{x-2}\bigg|_{x=x_0+h}=\frac{1+(x_0+h)^2}{(x_0+h)-2}.$$

(2) 这也是求函数 $f(x)$ 在指定点 $-x,x-1,f(x)$ 处的函数值，但 $-x,x-1,f(x)$ 又不是具体点.

用 $-x$ 代换解析式 $\dfrac{1+x^2}{x-2}$ 中的 x，得

$$f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{-x-2}=-\frac{1+x^2}{x+2}.$$

同理，有

$$f(x-1)=\frac{1+(x-1)^2}{(x-1)-2}=\frac{x^2-2x+2}{x-3};$$

$$f(f(x))=\frac{1+(f(x))^2}{f(x)-2}=\frac{1+\left(\frac{1+x^2}{x-2}\right)^2}{\frac{1+x^2}{x-2}-2}=\frac{x^4+3x^2-4x+5}{(x^2-2x+5)(x-2)}.$$

(3) $f(2)$没有意义.因为函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$,$f(x)$在 $x=2$ 处没有定义.

例 2 旅客乘飞机可免费携带不超过 20 kg 的物品;超过 20 kg 的部分每 kg 交费 a 元,最多只能携带 50 kg.若以 x(单位:kg)表示物品的重量,y(单位:元)表示应交运费,则 x 与 y 之间的数量关系应如下确定:

当 x 不超过 20 时,应有 $y=0$;

当 x 超过 20 而不超过 50 时,应有 $y=a(x-20)$.

于是,应有

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50.\end{cases}$$

上述公式表明了变量 x 与 y 之间的函数关系;这是用两个数学式子表示一个函数.

若一个函数要用两个或多于两个数学式子来表示,即一个函数,在其定义域的不同部分用不同的数学式子来表示,我们称其为**分段函数**.

例 3 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**.它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $Y=[0,+\infty)$,其图形如图 1-1 所示.这是分段函数.

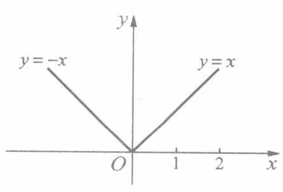

图 1-1

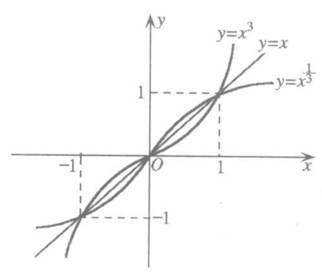

图 1-2

2. 反函数

对函数 $y=f(x)=x^3$,x 是自变量,y 是因变量.若由此式解出 x,得到关系式

$$x=\sqrt[3]{y}.$$

在上式中,若把 y 看做自变量,x 看做因变量,则由 $x=\sqrt[3]{y}$所确定的函数称为已知函数 $y=x^3$

的**反函数**. 习惯上,用 x 表示自变量,y 表示因变量,通常把 $x=\sqrt[3]{y}$ 改写为 $y=\sqrt[3]{x}$.

由图 1-2 知,函数 $y=x^3$ 与其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

把这样的问题一般化,便有下述**反函数的定义**.

定义 2 已知函数

$$y=f(x),\quad x\in D,\ y\in Y.$$

若对每一个 $y\in Y$, D 中只有一个 x 值,使得

$$f(x)=y$$

成立,这就以 Y 为定义域确定了一个函数,这个函数称为**函数 $y=f(x)$ 的反函数**,记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in Y.$$

按习惯记法,x 作自变量,y 作因变量,函数 $y=f(x)$的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in Y.$$

若函数 $y=f(x)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)$,则 $y=f(x)$也是函数 $y=f^{-1}(x)$的反函数,或者称它们互为反函数. 关于反函数的存在性有下述**结论**:

单调函数必有反函数,而且单调增加(减少)函数的反函数也是单调增加(减少)的.

3. 复合函数

对函数 $y=\sin x^2$,x 是自变量,y 是 x 的函数. 为确定 y 的值,对给定的 x 值,应先计算 x^2;若令 $u=x^2$,再由已求得的 u 值计算 $\sin u$,便得到 y 值: $y=\sin u$.

这里,可把 $y=\sin u$ 理解成 y 是 u 的函数;把 $u=x^2$ 理解成 u 是 x 的函数. 这样,函数 $y=\sin x^2$ 就是把函数 $u=x^2$ 代入函数 $y=\sin u$ 中而得到的. 按这种理解,函数 $y=\sin x^2$ 就是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 这两个函数复合在一起构成的,称为**复合函数**.

定义 3 已知两个函数

$$y=f(u),\ u\in D_1,\ y\in Y_1;\quad u=\varphi(x),\ x\in D_2,\ u\in Y_2,$$

则称函数 $y=f(\varphi(x))$是由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$经过复合而成的**复合函数**. 通常称 $f(u)$是**外层函数**,称 $\varphi(x)$是**内层函数**,称 u 为**中间变量**.

函数 $y=f(\varphi(x))$看做是将函数 $\varphi(x)$替换函数 $y=f(u)$中的 u 得到的.

复合函数不仅可用两个函数复合而成,也可以由多个函数相继进行复合而成.

复合函数的本质就是一个函数. 为了研究函数的需要,今后经常要将一个给定的函数看成是由若干个函数复合而成的形式.

例 4 已知函数 $y=f(u)=\mathrm{e}^u$,$u=\varphi(x)=\sqrt{x}$,则函数

$$y=f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

就是由已知的两个函数复合而成的复合函数.

需要指出的是,不是任何两个函数都能构成复合函数. 按定义 3 中所给的两个函数,只有当内层函数 $u=\varphi(x)$的值域 Y_2 与外层函数 $y=f(u)$的定义域 D_1 的交集非空时,即

$Y_2 \cap D_1 \neq \varnothing$时，这两个函数才能复合成复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

例如，函数

$$y=\ln u,\quad u\in(0,+\infty),\ y\in(-\infty,+\infty),$$
$$u=-x^2,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ u\in(-\infty,0],$$

虽然能写成 $y=\ln(-x^2)$，但它却无意义. 因为 $y=\ln u$ 的定义域是$(0,+\infty)$，而 $u=-x^2\in(-\infty,0]$，所以

$$(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing.$$

二、有界函数

在微积分学中，经常要用到函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性. 其中前三个性质我们已很熟悉，这里只讲述函数的有界性.

在区间$(-\infty,+\infty)$上，正弦函数 $y=\sin x$ 的图形(图 1-3)介于两条平行 x 轴的直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

这时称 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是**有界函数**. 在区间$(-\infty,+\infty)$内，函数 $y=x^3$ 的图形(图 1-2)向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是**无界函数**.

一般情况，如下**定义有界函数**.

设函数 $f(x)$在区间 I① 上有定义，若存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M\quad(\text{可以没有等号}),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**有界函数**；否则称 $f(x)$是**无界函数**.

有界函数的图形必**介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M(M>0)$和 $y=M$ 之间**.

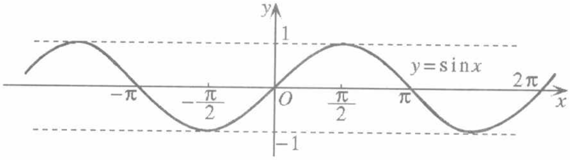

图 1-3

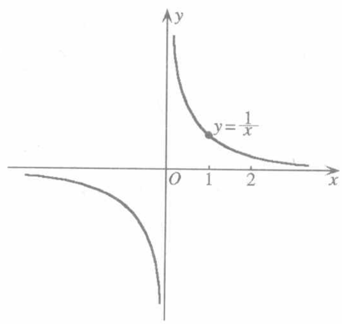

图 1-4

① 若我们所讨论的问题在任何一种区间(有限区间：(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$或无限区间：$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$)都成立时，将用**字母** I 表示这样一个泛指的区间.

由函数有界性定义知,对一个函数,必须就自变量的某个取值范围内讨论其有界性.例如,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在有定义的区间$[2,+\infty)$内有界:

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2};$$

而在有定义的区间$(0,1)$内就无界(图 1-4).

习　题　1.1

A　　组

1. 求函数值:

(1) 已知 $f(x)=x^2-2x+1$,求 $f(0)$,$f(-2)$,$f(-x)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$;

(2) 已知 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f(x-1)$.

2. 已知 $f(x)$的解析式,求 $f(x_0+h)-f(x_0)$:

(1) $f(x)=ax+b$;　　　(2) $f(x)=x^2$.

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ x, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

求(1) $f(x)$的定义域;　(2) $f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(3)$.

4. 将 y 表成 x 的函数:

(1) $y=\sqrt{1+u^2}$,$u=\sin v$,$v=\log_a x$;　　(2) $y=\ln u$,$u=\tan v$,$v=x+e^x$.

5. 设 $f(x)=x^2$,$\varphi(x)=2^x$,求 $f(f(x))$,$f(\varphi(x))$,$\varphi(f(x))$.

6. 直观判断下列函数在给定的区间内是有界函数还是无界函数:

(1) $y=2^x$, $x\in(-\infty,0)$;

(2) $y=\log_a x$, $x\in(0,+\infty)$.

B　　组

1. 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**. 求其定义域 D,值域 Y,并画出其图形.

2. 将函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 用分段函数形式表示,并确定其定义域.

§1.2 初 等 函 数

【学习本节要达到的目标】

1. 理解初等函数的意义.
2. 熟练掌握将初等函数按基本初等函数复合与四则运算形式分解.

一、基本初等函数

基本初等函数通常是指以下六类函数:常量函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数.

1. 常量函数

$$y = C\ (\text{常数}),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

其图形见图 1-5.

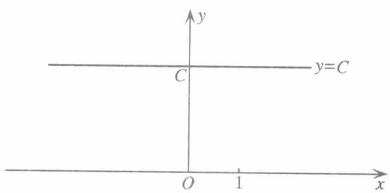

图 1-5

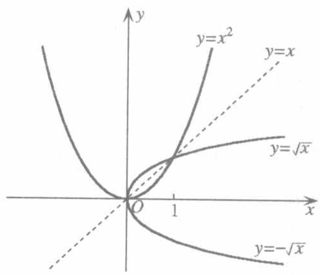

图 1-6

2. 幂函数

$$y = x^{\alpha}\quad (\alpha\ \text{为实数}).$$

该函数的定义域随 α 而异,但不论 α 取何值,它在区间$(0,+\infty)$内总有定义,且其图形均过点$(1,1)$. 例如

当 $\alpha=2$ 时,$y=x^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$,见图 1-6.

当 $\alpha=-1$ 时,$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,见图 1-4.

当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$时,$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$,见图 1-6.

3. 指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq1),\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(0,+\infty).$$

因 $a^0=1$,且总有 $y>0$,所以,指数函数的图形过 y 轴上的点(0,1)且位于 x 轴的上方(图 1-7).

本课程,常用以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$. e 是一个无理数,e=2.718281828459….

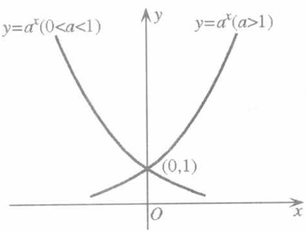

图 1-7

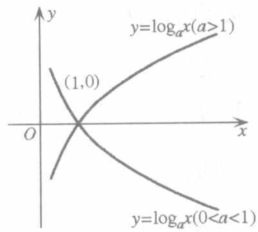

图 1-8

4. 对数函数

$$y=\log_a x\ (a>0,a\neq1),\quad x\in(0,+\infty),\ y\in(-\infty,+\infty).$$

对数函数与指数函数互为反函数. 因总有 $x>0$ 且 $\log_a 1=0$,所以,$\log_a x$ 的图形过 x 轴上的点(1,0)且位于 y 轴的右侧(图 1-8).

本课程,常用以 e 为底的对数函数 $y=\ln x$,称之为自然对数.

5. 三角函数

三角函数是如下六种函数的统称,分别为:

正弦函数(见图 1-3) $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$.

余弦函数(见图 1-9) $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$.

正切函数(见图 1-10) $y=\tan x$, $x\neq n\pi+\pi/2$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, $y\in(-\infty,+\infty)$.

余切函数(见图 1-11) $y=\cot x$, $x\neq n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, $y\in(-\infty,+\infty)$.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

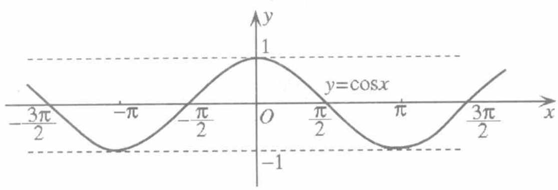

图 1-9