能力与思维

高中基础知识标准化训练

（下）

农村读物出版社

能力与思维

（下）

一高中基础知识标准化训练

屠　棕　陈正宜　付以伟
樊　福　赵　康

一九八八年·北京

能力与思维（下）

——高中基础知识标准化训练

屠棕　陈正宜　付以伟

樊　福　赵　康

责任编辑　周崇录

农村读物出版社　出版

北京昌平北七印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

787×1092毫米1/32　9.375印张　160千字

1988年4月第1版　1988年4月北京第1次印刷

印数：1—50000

ISBN7-5048-0319/G118　定价：2.20元

前　言

本书分上下两册：上册包括语文、政治、英语三科。下册包括数学、物理、化学、生物四科。本书把高中上述各科内容，分科归纳整理，使之更系统化，条理化，便于学生加深理解、系统掌握基础知识，培养学生多端思维能力、解决问题能力，以及善于接受客观性考查的能力。

为培养学生的灵活性，引导学生逐步适应科学化、系统化命题方式，本书各科均编选适量标准化测试练习，并备有答案。

锺北辰老师在本书编写、审阅书稿、印制发行各项工作中均付出巨大劳动，是本书的主编。赵萱、刘渝两位老师参予了全书的审阅工作。

目　录

数学部分

数学是一门极为重要的工具课，其内容极为丰富，思维非常灵活，题目类型各种各样，因此有很多同学为了应付考试，往往陷入题海之中不能自拔，却忽视基本概念，基本知识。为使这些同学从题海中走出来，把着眼点放在基本知识的学习理解和综合应用方面，探讨一些方法。如：怎样提高综合能力，怎样通过解适当的数学题举一反三，解类旁通，从而取得事半功倍的效果等等，发表我们一些粗浅的见解。

第一篇　理解能力的训练

关于数学学习中理解能力的训练与提高是在数学的概念、定理、公式、法则的学习中逐步培养起来的，所以要提高数学学习中的理解能力必须从学好数学的概念、定理、公式，法则入手，并在利用这些数学知识解决问题的过程中加深理解。为了提高理解能力可从如下几方面做起：

一、狠抓概念的实质，加强对概念本身的理解。

概念是客观事物本质属性的反映，它是数学推理论证的基础，概念清楚、准确是学好数学的关键。

例如：已知集合$A=\{a, b, c\}$，集合$B=\{m, n, p\}$，问可以建立多少个由集合A到集合B的映射?

要解决这个问题，首先遇到了映射的概念，所谓映射，是指A、B两个集合，如果按照某种对应法则，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的无素和它对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射。对映射的概念应理解到，A集合的每一个元素在B集合中都有唯一确定的像，但并不要求它们在B集合中的像一定是不同的像，同时也不要求B集合中的元素在A集合中都有原像，即由集合A到集合B的映射可以是两集合元素间的一对一的对应或者是多对一的对应，因此，由A集合到B集合的映射可分为：两集合元素间一对一的对应，有p_3^3种；两集合元素间一对一及二对一的对应，有$c_3^1 \cdot c_2^2 \cdot p_3^2$种，两集合元素间三对一的对应，有$c_3^3 \cdot p_3^1$种，总共有不同的映射$p_3^3+c_3^1 \cdot c_2^2 \cdot p_3^2+c_3^3 \cdot p_3^1=27$种，如果映射的概念理解不深刻，由题意中$A$、$B$二

集合中各有三个元素，就误认为映射必须是两集合元素间一对一的对应，这就是对映射概念中“A集合中的每一个元素在B集合中都有唯一的元素和它对应”理解得不深刻造成的。

又如，求$\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$所表示角的值。有人看到这个三角函数的反三角运算马上就得到$\dfrac{3\pi}{5}$，这当然是错误的。错就错在对反三角函数数概念的理解上，对于反正弦$\arcsin x$，要了解到三层意思，①$|x|\leqslant 1$时，$\arcsin x$方有意义；②$\arcsin x$表示区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$内的一个角；③$\arcsin x$所表示角的正弦值是$x$。在$\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$中，应先利用诱导公式使$\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$，保持正弦值不变，而使角在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$内。故有$\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$

$=\arcsin\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$

再如，化复数$1+\cos x+i\sin x$为三角形式，容易得出

$$\begin{aligned}&1+\cos x+i\sin x\\&=2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right);\end{aligned}$$

如果只做到这一步，还不能说明它是三角形式，因为复数的三角形式$r(\cos\theta+i\sin\theta)$中，$r$是复数的模，$r\geqslant 0$，因此，必须对$\cos x$进行讨论：当$\dfrac{x}{2}\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi\right.$

$+\frac{\pi}{2}\Big]$ $(k\in z)$ 时，$\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$，此时，$1+\cos x+i\sin x$ 的三角形式为$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)$.

当$\frac{x}{2}\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\cdot 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ $(k\in z)$ 时，$\cos\frac{x}{2}<0$，此时，$1+\cos x+i\sin x$的三角形式 为$2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdot\left[\cos\left(\pi+\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{x}{2}\right)\right]$

由以上几例可以看出，如果对概念理解得不准确或忽略了概念中的某一本质属性都会导至错误.

二、充分利用由特殊到一般的思想方法，抓概念、定理、公式、法则的形成过程，便于深刻理解掌握这些知识.

例如，数列极限的概念是一个难以深刻理解的概念，而它又是进一步学好高等数学的基础概念，掌握不好，对今后的学习有很大影响. 为了搞清 这一 概念 我们 可以分几个层次，利用由特殊到一般的 思想 方法 逐步 体会极限概念的实质. 首先，我们可以通过很多实例看出某些无穷数列有一个共同的性质，就是无穷数列$\{a_n\}$各项取值随着项数增多，越来越靠近某一个常量A，我们把这个常量值A 叫做这个无穷数列的极限. 这就是数列极 限概 念 的最直 观的低层次的理解. 如：数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……，$\frac{1}{n}$，……各项取值

越来越靠近零，我们就说无穷数列$\left\{a_n=\frac{1}{n}\right\}$的极限是零. 而数列2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$……，$\frac{n+1}{n}$，……各项取值越来越靠近1，我们就说无穷数列$\left\{a_n=\frac{n+1}{n}\right\}$的极限是1. 但是，对于“越来越靠近”这一形容各项取值变化状况的语言如何用数学语言严格规定下来，这里还需要解决两个问题：①“越来越靠近”意味着越靠后的项与常量的靠近程度越高，而前边的项不一定与常量值非常靠近. 这对于无穷数列来说就是前面有限个项不一定与常量值很靠近，而后面无数多个项必须与常量值非常靠近. ②什么叫靠近，如何用数学语言量化靠近. 如果把数列各项取值和它所靠近的常量值在数轴上表示出来，明显看出各项取值与常量值之间的关系，实际就是两点之间的距离，而两点间距离可以用$|a_n-A|$来表示，因此各项取值a_n与常量A无限靠近，就是$|a_n-A|$越来越小. 大、小是个相对的概念，若让$|a_n-A|<0.1$，可以在数列中找到一项a_{N_1}，当$n>N_1$时，即N_1项以后的各项可以满足；若让$|a_n-A|<0.01$，则可以在数列中找到a_{N_2}项，当$n>N_2$时，即第N_2项以后的各项即可以满足，……. 为了使对一切标准都满足，所以可以设一小正数ε，要使$|a_n-A|<\varepsilon$成立，可以在数列中确定一个a_N项，当$n>N$时，即第N项以后的各项都可以满足. 到此为止，数列极限的概念才完整刻化出来，整理一下就是：对于无穷数列$\{a_n\}$，存在一个常量A，任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立，就说A是无穷数列$\{a_n\}$的极限. 对数列极限概念理解深刻了，再用极限定义证明某一常量是一无穷数列的极限时，就能体会出在抽象数学符号背后的实质意

义，就不用去“背”证明过程了。

又如，二项式定理也是比较典型的利用由特殊到一般的思想方法归纳总结出来的．在初中乘法公式中已经知道$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，那么$(a+b)^4$展开式应是什么呢?显然，$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$，等号右边的积应有下面形式的各项：$a^4$，$a^3b$，$a^2b^2$，$ab^3$，$b^4$。它们的系数如何确定呢？如$a^3b$这一项是从四个括号中的一个里取$b$，从其它三个里取$a$作出积的个数，从四个括号中任取一个$b$的取法有$c_4^1$种，从其它三个括号中取$a$的取法有$c_3^3=1$种，因此$a^3b$的系数是$c_4^1\cdot c_3^3=c_4^1$，同样，可以求得$a^4$的系数是$c_4^0$，$a^2b^2$的系数是$c_4^2$，$ab^3$的系数是$c_4^3$，$b^4$的系数是$c_4^4$．所以$(a+b)^4=c_4^0a^4+c_4^1a^3b+c_4^2a^2b^2+c_4^3ab^3+c_4^4b^4$．由此可以推出$(a+b)^n=c_n^0a^n+c_n^1a^{n-1}b+c_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+c_n^nb^n$，对于这个猜想只需再用数学归纳法加以证明就可以了。如果我们掌握了找出二项式n次展开式中各项系数的方法，用以去研究三项式的n次展开式或多项式的n次展开式的各项系数也将是方便的和可行的。如求$(2a-3b+5c)^6$展开式中a^2bc^3项的系数，如果利用二项展开式的结果去求将是很繁杂的，但是从a^2bc^3项的形成可以看出从6个$(2a-3b+5c)$中的两个里取$2a$，其余的4个括号中的一个取$-3b$，再由剩余的三个括号里取$5c$作出的积，所以含有a^2bc^3的项应为$c_6^2(2a)^2\cdot c_4^1(-3b)\cdot c_3^3(5c)^3=-90000a^2bc^3$，因此$a^2bc^3$项的系数为$-90000$。

再如：立体几何中的直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系要想掌握得好，可以利用特殊的典型图形表示出来，生动直观，便于掌握，也是利用了由特殊到一般的思想方法。

三、了解概念、定理、公式、法则在各部分知识结构中所起的作用，加强对这些知识的理解，

有些数学知识本身并不难于理解，但它在知识结构中起重要作用，很多问题与其有关，应在与其它知识的联系中，加深对这些知识的理解。例如，复数相等的概念。在引入复数的代数式以后，规定二复数$a+bi$与$a'+b'i$(a、b、a'、b'都是实数)相等的条件是$a=a'$，$b=b'$。在引入复平面后，建立了复平面上的点(a, b)与复数$a+bi$之间的一一对应关系，这时，相等的复数，在复平面内表示同一个点。在引入向量后，又得到相等的复数表示相等的向量（两个相等的向量不一定重合）。在引入复数的三角形式后，复数$r(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$的条件又变为$r=\rho$，$\theta=\varphi+2k\pi(k\in Z)$，而当$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，又得到条件$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$. 复数相等的这些知识，在复数的运算，解方程，向量的运算中得到了充分的利用. 如：在规定了复数代数式加、乘的运算法则后，运用逆运算的知识及复数相等条件得出了减、除的运算法则. 复数三角形式开方运算的结果也是利用复数相等条件得出的. 方程$z+|\overline{z}|=2+i$中，复数z的求出，是利用复数相等的条件，转化为实数方程组实现的. 把$(\cos\theta+i\sin\theta)^3$分别利用复数代数式及三角式两种方法乘方运算后，再利用复数相等的条件又得到了正弦、余弦三倍角公式，等等，在全部复数知识的内容中，我们充分看到了复数相等的条件所起的重要作用，也就是在这些应用中更充分认识了在不同条件下，复数相等的条件的使用方法。

又如，几何中角的概念，它是描绘空间中两个几何元素相对位置关系的一个重要概念，在平面几何中，角规定为二直线相交组成的几何图形，并规定了度量角的方法。在解析几何中，又给出了利用斜率，计算夹角大小的方法。在立体几何中，二异面直线的夹角，利用平行线的知识，转化为过一点所引二直线的夹角；直线与平面的夹角，利用射影的知识也转化为二相交直线的夹角；平面与平面所成的二面角，利用二面角的平面角，也转化为二相交射线所成的角。可以看出，在不同的知识范围内，角的意义不同，但最终都转化为平面角来解决问题。

四、有比较才能鉴别，抓住相近知识的联系和区别，加深对这些知识的理解，

有些知识有相似之处，利用类比便于掌握，如：等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$，与等比数列的通项公式$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，形式结构相同，只是把加、乘运算升格为乘，乘方而已．又如，共轭复数的运算性质，即两个复数和、差、积、商的共轭复数，等于这两个复数共轭复数的和、差、积、商。与数列极限的运算性质，即如果两个数列都有极限，那么，这两个数列的和、差、积、商组成的数列也有极限，且极限的值就等于原来两个数列极限的和、差、积、商（分母的极限不为零）基本上是相同的。而复数模的运算却只有乘、除法的运算性质，即两个复数的积与商的模，等于两个复数模的积与商，与共轭复数的运算性质相同，但是复数模的运算性质却与实数绝对值的运算性质完全相同，即$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，$|z_1|\cdot$

$|z_2|=|z_1\cdot z_2|$，$\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$。

再如，平面几何中很多重要的结论都可以推广到立体几何中去，如两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线就平行；过线外一点只能引一条直线与已知直线平行等。可以类比推广的有两个平面都与第三个平面平行，则此二平面平行；过平面外一点，可以作一个平面与已知平面平行等。了解到它们的共同点便于掌握应用。但是，平面几何与立体几何之间，条件相同或类似，结论却不同时要特别注意区分，如：平面几何中两条直线都与第三条直线垂直，则二直线平行，而这一结论在立体几何中就不正确，而与其类似的结论是：二直线都垂直同一平面则二直线平行；二平面都垂直于同一直线则二平面平行；二相交平面都垂直于同一平面则交线与这个平面垂直。经过对比，有利于准确地掌握这些知识。

五、注意数形结合，加深对知识的理解．

数形结合可以使抽象的理论直观显现出来，便于深刻理解这些知识．

例如：三角函数的增减性可以借助于函数图象或单位圆中三角函数线随角变化的情况一目了然，再利用这些知识解三角不等式就很容易了．如解不等式$\cos x>\dfrac{1}{2}$．由图 1

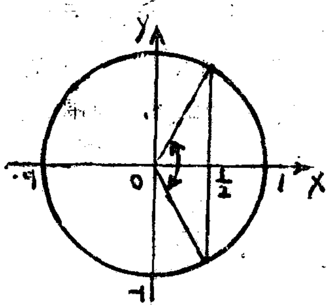

图 1

可知不等式的解为$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in z)$。

又如，一元二次方程根的取值范围问题，直接讨论起来就比较麻烦，而借助于相应二次函数图象直观判断与x轴交点位置就容易得多。如已知方程$x^2-2mx+m=0$的两个根中，有一个根在0与1之间，各一个根大于2，求m的取值范围。

解．令$y=x^2-2mx+m$

由图2可知

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)<0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4a^2-4m\geqslant 0,,\\ m>0,\\ 1-2m+m<0,\\ 4-4m+m<0,\end{cases}$$

解之得$m>\frac{3}{4}$.

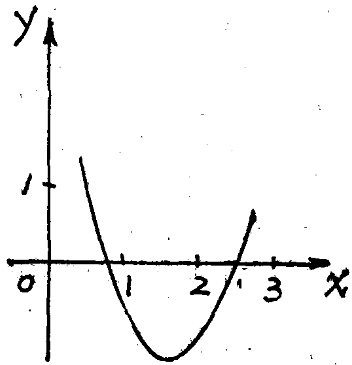

图 2

若本题改为二根均在0与2之间时，m的取值范围呢？

解　由图3可知

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(0)>0,\\ f(2)>0,\\ 0<-\frac{b}{2a}<2,\end{cases}$$

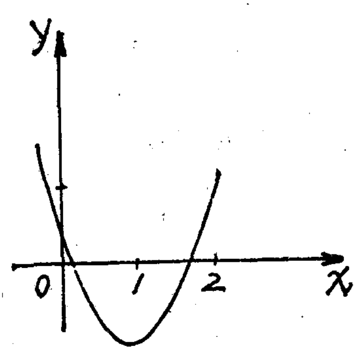

图 3

即

$$\begin{cases} 4m^2-4m\geqslant 0, \\ m>0, \\ 4-4m+m>0, \\ 0<-\dfrac{-2m}{2}<2, \end{cases}$$

①、[illegible]解之得 $1\leqslant m<\dfrac{4}{3}$.

再如平面几何，立体几何，解析几何本身就是研究图形性质的知识，在论证的过程中，更要充分利用图形帮助思考问题，加深对所论证知识的理解。

六、抓好知识的利用，在分析问题的过程中加深对所学知识的理解。

分析解决问题的过程，就是把所学知识用于实际的过程，不管哪个知识理解不深出了毛病，都会导致错误的结论，这时就需要我们认真查找知识漏洞，弄清症结所在，把模糊的概念搞清楚，达到真正理解的目的。

例如，求函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$的单调增区间。容易想到这是一个复合函数的单调增区间的判定问题，即$y=\log_{\frac{1}{2}}u$，$u=x^2-3x+2$，因为$y=\log_{\frac{1}{2}}u$是单调减函数，所以函数u的单调减区间就是函数y的单调增区间。而函数$u=x^2-3x+2$在区间$\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$内单调减少，故函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$的单调增区间是$\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$。这

个结论显然是错误的，错就错在函数的增减区间必须在函数的定义域内讨论，而在函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$的定义域是$(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$，因此函数$y$的单调增区间应是$(-\infty, 1)$。

又如，条件甲：x是第一象限的角：条件乙：$\sin x$是增函数，问甲是乙的充分条件吗？很多人认为甲是乙的充分条件。这显然是不对的，这里面可能有两个问题理解不深：①什么是第一象限角，有人错误地认为是0°—90°范围内的角，如果这样，那么$\sin x$当然是增函数。实际上第一象限角是$2K\pi<x<2K\pi+\frac{\pi}{2}$，$(K\in Z)$范围内的角$x$。②增函数的概念，应该是在定义域内任给二自变量值$x_1<x_2$时，一定有$f(x_1)<f(x_2)$，则函数$f(x)$是增函数，不防设$x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\frac{13\pi}{6}$，显然有$x_1<x_2$，但却有$\sin x_1>\sin x_2$，所以$x$是第一象限的角，$\sin x$并不满足增函数的定义。有人误认为$x_1$、$x_2$必须在区间$\left(2K\pi, 2K\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上同一个$K$值的取值范围内来取，当然是不对的.

再如，已知$0<a<b<1$，且$a+b=1$，比较a^2+b^2与b的大小.

解 a^2+b^2-b

$$=(1-b)^2+b^2-b$$

$$=2b^2-3b+1$$

$$=2\left(b-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8},$$

做到这里，有些人考虑到条件$0<b<1$，故