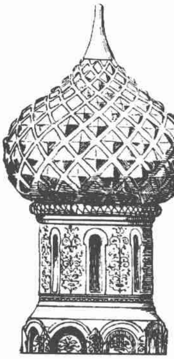
俄罗斯数学
教材选译

偏微分方程习题集

（第2版）

□ A. C. 沙玛耶夫　主编
□ 郭思旭　译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

偏微分方程习题集

(第2版)

□ A. C. 沙玛耶夫 主编
□ 郭思旭 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2008–2624 号

Сборник задач по уравнениям с частными производными, авторы А. С. Шамаев (ред.) и др., 2-е издание, испр., первоначально опубликовано на русском языке в 2007 г. Данный перевод публикуется в соответствии с договором с издательством БИНОМ. Лаборатория знаний.

А. С. 沙玛耶夫等编写的《偏微分方程习题集》(第 2 版) 俄文版于 2007 年出版, 本翻译版的出版由 BINOM. Knowledge Laboratory Publishers 授权许可.

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程习题集 (第 2 版) / (俄罗斯) 沙玛耶夫主编; 郭思旭译. —北京: 高等教育出版社, 2009.3

ISBN 978–7–04–025766–3

I.偏… II.①沙…②郭… III.偏微分方程–高等学校–习题 IV. 0175.2–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 021901 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 – 810 – 0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092 1/16	**版　　次**	2009 年 3 月第 1 版
印　　张	9.25	**印　　次**	2009 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　25766 – 00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

献给莫斯科大学数学力学系微分方程教研室的各位教授
A. C. 卡拉什尼柯夫, C. H. 克鲁日科夫, E. M. 兰吉斯.

序 言

在本参考书中汇集了 1994 — 2003 年间, 国立莫斯科大学数学力学系学生偏微分方程与数学物理方程笔试的一些题目. 出版时, 减少了那些在现有教科书和参考书中可以找到的标准习题的数量. 此外, 对叙述上有某些近似的题目, 通常只列入其中之一. 本习题集中也未收入课程大纲中的理论问题 (定义、问题的提法、定理的叙述与证明), 这些题目必定会出现在任何试题中. 为使读者对这些考试有所认识，在本习题集末尾列出了一些试卷, 并指出考试的条件及评分标准.

国立罗蒙诺索夫莫斯科大学数学力学系微分方程教研室的教师 Т. Д. 文特策尔 (Т. Д. Вентцель)、А. Ю. 高里茨基 (А. Ю. Горицкий)、А. С. 卡拉什尼柯夫 (А. С. Калашников)、В. А. 康德拉季耶夫 (В. А. Кондратьев)、С. Н. 克鲁日科夫 (С. Н. Кружков)、Е. М. 兰吉斯 (Е. М. Ландис)、Е. В. 拉德凯维奇 (Е. В. Радкевич)、Г. А. 切契金 (Г. А. Чечкин)、А. С. 沙玛耶夫 (А. С. Шамаев)、Т. А. 沙波什尼柯娃 (Т. А. Шапошникова) 参与了各种试题的编列. А. С. 卡拉什尼柯夫完成了对 1994—1998 年题目的选择和编定. 本书由 Т. Д. 文特策尔、А. Ю. 高里茨基、Т. О. 卡布斯金娜 (Т. О. Капустина)、О. С. 罗赞诺娃 (О. С. Розанова)、Г. А. 切契金定稿.

习题按专题分成五章. 每一章都列出该专题的基本内容. 个别习题给出了详细解答. 除去证明题以外的所有习题都给出了答案.

正如实践所证明的, 偏微分方程课在传统上对于数学专业学生来说是难于接受的. 我们能否破除这个传统?!

符号表

$\mathbb{N}$ —— 所有自然数的集合[①].

$\mathbb{Z}$ —— 所有整数的集合.

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ —— 所有非负整数的集合.

$\mathbb{R}$ —— 所有实数的集合.

$\mathbb{R}_+$ —— 所有正实数的集合.

$\mathbb{R}_-$ —— 所有负实数的集合.

$\mathbb{R}^n$ —— n 维实线性空间.

$(x_1, \cdots, x_n)$ —— $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标.

(ρ, θ) —— $\mathbb{R}^2$ 中的极坐标.

Ω —— 如无相反的约定, 表示 $\mathbb{R}^n$ 中有界区域 (即连通开集).

$\partial\Omega$ —— 区域 Ω 的边界.

ν —— $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

$B_a^n(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x - x^0| < a\}$ —— 球心在 x^0 点、半径为 a 的 n 维球.

$S_a^n(x^0) = \partial B_a^n(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x - x^0| = a\}$ —— $\mathbb{R}^n$ 中的中心在 x^0、半径为 a 的球面.

$Q_\Omega^T = \Omega \times (0, T] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T\}$ (区域 Ω 可能是无界的).

$Q_\Omega^\infty = \Omega \times \mathbb{R}_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \Omega,\ 0 < t < +\infty\}$ (区域 Ω 可能是无界的).

$\Pi_T = \mathbb{R}^n \times (0, T] = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \leqslant T\}$.

$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n}$ —— 拉普拉斯算子.

$L_p(\Omega)$ —— 区域 Ω 中 p 幂可和函数的空间.

[①] 按本书作者的理解, 自然数的集合中不包括零. —— 译者注

$L_\infty(\Omega)$ —— 区域 Ω 中有界可测函数的空间.

$L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ —— 对 Ω 的任意有界子区域 Ω_1 ($\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$) 为属于 $L_p(\Omega_1)$ 的函数的空间.

$L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ —— 对任意 $a > 0$ 属于空间 $L_p(B_a^n(0))$ 的函数的空间.

$C^l(\Omega)$ —— 在区域 Ω 中 l 次连续可微的函数的集合.

$C_b(\Omega) = C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ —— 在区域 Ω 中有界、连续的函数的集合.

$C^\infty(\Omega)$ —— 在区域 Ω 中无穷次连续可微的函数的集合.

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ —— 在区域 Ω 中无穷次连续可微、在 $\partial\Omega$ 的邻域中为零的函数的集合.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ —— $\mathbb{R}^n$ 中无穷次连续可微、具有紧支集的函数的空间.

$H^1(\Omega)$ —— 连同其在索伯列夫意义下一阶广义导数属于 $L_2(\Omega)$ 的函数的空间.

$\mathring{H}^1(\Omega)$ —— 按 $H^1(\Omega)$ 的范数, 集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ —— $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上线性连续泛函的空间.

$\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ —— "δ 函数", 即由公式

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

定义的泛函.

$\delta_{x^0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其中 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ —— "位移 δ 函数":

$$\langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle = \varphi(x^0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

$\Theta(x)$ —— 赫维赛德 Θ 函数:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{对 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{对 } x < 0. \end{cases}$$

$x_+ = \max\{x, 0\}$; $x_- = \max\{-x, 0\}$.

ω_n —— $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 $S_1^n(0)$ 的面积.

∇ —— $\mathbb{R}^n$ 中的梯度算子, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

目 录

引　论

我们来指出某些定义和定理, 为了解本习题集中的习题, 这些定义和定理是必须知道的, 同时也指出一些教科书, 在这些书中可以找到这些内容. 以下各点中所引习题的号码, 是作为例子引入的, 可能并未包含该论题中所有的习题.

1. 泛函分析方面的补充知识

1. 广义函数的定义, 广义函数的运算以及微分算子的基本解. [5, II 章, §§5~7] (习题 1.1~1.5, 2.17b))

2. 空间 H^1 及 $\mathring{H}^1$ 的定义. [20, III 章, §5] (习题 1.8~1.16, 1.19~1.21)

3. 弗里德里希斯 (Friedrichs) 不等式. [20], [22] (习题 1.17~1.19)

2. 偏微分方程理论的一般概念

1. 二阶线性方程的分类及将其化为标准形式. [23, I 章, §6] (习题 **2.1~2.4**, **2.7~2.9**, **2.14**, **2.15**, **2.17** a))

2. 特征的定义. [23, I 章, §3] (习题 **2.5~2.7**, **2.11~2.13**, **3.3**, **3.4**)

3. 关于柯西问题解析解的存在性和唯一性的柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理 [23, I 章, §§10,11] (习题 **2.16**, **2.22** a))

4. 偏微分方程问题提法的适定性 [23, I 章, §8] (习题 **2.17~2.23**)

3. 双曲型方程

1. 一维振动方程柯西问题的提法. 达朗贝尔公式. 依赖区域. [23, II 章, §§11~13] (习题 **3.1~3.2**, **3.5~3.12**)

2. 在空间维数为 2 维与 3 维情形下波动方程的柯西问题. 泊松公式与基尔霍夫公式. 在初始条件中对称性的应用. 依赖区域. [23, II 章, §§12,13], [22, §5.1] (习题 **3.13~3.23**)

3. 半有界弦的边值问题. 初值与边值的相容性条件. 初值问题的延拓方法及化边值问题为柯西问题. [29, II 章, §§2,4] (习题 **3.24~3.28**, **3.31**, **3.32**)

4. 基本边值问题的提法. 边值问题解的能量恒等式. [23, II 章, §18] (习题 **3.33~3.36**)

5. 用傅里叶方法解边值问题. 边值问题解的周期性. [23, III 章, §20], [29, II 章, §3] (习题 **3.37~3.40**)

4. 抛物型方程

1. 柯西问题与基本边值问题的提法. [23, IV 章, §§38, 40] [22, §4.3]

2. 柱体中的极值原理. 第一边值问题解的唯一性. [23, IV 章, §38], [22, §4.4] (习题 **4.1**, **4.3**, **4.6**, **4.7**, **4.20**, **4.21**)

3. 用傅里叶方法解边值问题. [23, IV 章, §39] (习题 **4.8~4.19**)

4. 带形区域中的极值原理. [23, IV 章, §40], [22, §4.4] (习题 **4.27**, **4.31**)

5. 关于柯西问题解的定常化的定理. [22, §4.5] (习题 **4.33~4.36**)

5. 椭圆型方程

1. 调和函数的定义. 平均值定理. 刘维尔定理. [23, III 章, §30] [22, §§3.5, 3.9] (习题 **5.1**, **5.2**, **5.3**, **5.6**, **5.7**, **5.15**, **5.42**)

2. 极值原理. 关于法向导数的定理. [23, III 章, §8] [22, §3.5] (习题 **5.9**, **5.10**, **5.11**, **5.12**, **5.13**, **5.28**, **5.33**, **5.18**)

3. 格林公式. 关于流量的定理. [23, III 章, §§30, 33], [22, §§3.3, 3.5] (习题 **5.29**, **5.30**, **5.31**, **5.32**, **5.43**)

4. 关于可去奇点的定理. [23, III 章, §30], [22, §3.10] (习题 **5.16**, **5.17**, **5.34**, **5.35**)

5. 位势理论. [23, III 章, §34], [22, §3.12] (习题 **5.36**, **5.37**)

6. 广义函数意义下的广义导数及在索伯列夫意义下的广义导数. 狄利克雷问题的广义解. 解狄利克雷问题的变分方法. [22, §1.13], [20, IV 章, §1] (习题 **5.48**, **5.49**,

5.50, **5.52**, **5.51**)

为了研读偏微分方程教程及解本习题集中所提的习题, 作为基本文献, 推荐使用 [5], [20], [22], [23] 及 [29]. 对于希望得到这方面更全面信息者, 书末列出了更多的文献.

第 1 章　泛函分析方面的补充知识

1.1　广义函数与基本解

空间 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (或 $\mathcal{D}'(\Omega)$) 的元素即在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$(相应地在 $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$) 上的连续线性泛函, 称为**广义函数**. 泛函 $f \in \mathcal{D}'$ 在 $\varphi \in \mathcal{D}$ 上的作用表示为 $f(\varphi)$ 或 (f, φ).

在广义函数空间中分出了**正则**广义函数, 即通常的函数 $f(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$(或 $f(x) \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$), 它的作用定义为

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(积分相应地是对空间 $\mathbb{R}^n$ 或区域 Ω 进行的). 非正则的广义函数称为**奇异**广义函数. δ 函数是奇导广义函数的例子.

由等式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

定义的广义函数称为广义函数 $f \in \mathcal{D}'$ 对变量 x_i 的**导数**. 依照归纳法可定义广义函数的任意阶广义导数.

使得 $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \delta$ 成立的, 即使 $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \varphi) = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ 成立的函数 $\mathcal{E}$ (一般地说, 它可能是广义函数) 称为微分算子 $\mathcal{L}$ 的**基本解**.

我们来举出某些微分算子的基本解的例子.

n 维空间中拉普拉斯算子 $\mathcal{L}=\Delta$ 的基本解具有如下形状:

$$\mathcal{E}_n(x)=\frac{1}{\omega_n(2-n)|x|^{n-2}},\quad n\geqslant 3,$$
$$\mathcal{E}_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\quad n=2.$$

对于热传导算子 $\mathcal{L}=\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta$, 函数

$$\mathcal{E}(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

是其基本解.

波动算子 $\mathcal{L}=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta$ 依其空间变量 x 的维数 $n,n=1,2,3$, 有如下的基本解:

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{2a}\Theta(at-|x|),\quad n=1,$$
$$\mathcal{E}_2(x,t)=\frac{\Theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}},\quad n=2,$$
$$\mathcal{E}_3(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\delta(|x|-at),\quad n=3.$$

与一维和二维空间变量的情形不同, $\mathcal{E}_3$ 乃是奇异广义函数, 它在基本函数上的作用由下式定义:

$$(\mathcal{E}_3,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{4\pi a^2t}\left(\int\limits_{|x|=at}\varphi(x,t)dS_x\right)dt,\quad \forall\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4).$$

其中 dS_x 是球面 $S^3_{at}(0)$ 上的面积元素.

习题

1.1　设 $u(x,y)$ 是正方形 $(-1,1)\times(-1,1)$ 的特征函数. 在广义函数理论的意义下求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

1.2　对哪些参数值 $a\in\mathbb{R}^1$, 函数

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & 当\ t\leqslant ax,\\ 0, & 当\ t>ax,\end{cases}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2$$

在广义函数理论的意义下是方程 $u_t=u_x$ 的解?

1.3　设函数 $y(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 并且作为广义函数满足方程 $y'=y$. 证明, $y(x)$ 是正则广义函数 Ce^x, 其中 C 为常数.

1.4　求算子

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx}$$

的所有基本解.

1.5　求算子

$$\mathcal{L}u(x,y) = u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y)$$

当 $y<0$ 时变为零的基本解.

1.6　证明函数

$$E(x,x_0) = -\frac{\cos(\sqrt{c}r)}{4\pi r},\quad r = |x-x_0|$$

是算子

$$\Delta + c,\quad \text{其中 } c \text{ 为正常数},\quad n=3,$$

的基本解.

1.2　索伯列夫空间

满足积分恒等式

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

的函数 $v(x)$ (表示为: $v(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$) 称为函数 $u(x)$ 在区域 Ω 内在索伯列夫意义下对变量 x_i 的**广义导数**.

函数 $u(x)$ 连同其所有的在索伯列夫意义下的一阶广义导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,\cdots,n$, 都属于空间 $L_2(\Omega)$ 时, 函数 $u(x)$ 的空间称为**索伯列夫空间** $H^1(\Omega)$.

空间 $H^1(\Omega)$ 是巴拿赫空间 (即完备的赋范空间). 其范数定义如下:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_{\Omega}\left(|u|^2 + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)dx.$$

空间 $H^1(\Omega)$ 中子空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包称为**索伯列夫空间**$\mathring{H}^1(\Omega)$.

弗里德里希斯 (Friedrichs) 不等式. 对于任何有界区域 Ω, 存在常数 $C(\Omega)$, 使得

$$\int\limits_{\Omega}|u|^2dx \leqslant C(\Omega)\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx,\quad \forall u\in\mathring{H}^1(\Omega).$$

根据弗里德里希斯不等式, $\mathring{H}^1(\Omega)$ 中如下的泛函

$$\|u\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx \tag{1.1}$$