

高等数学作业集

(下册)

刘 萍 王东红 唐月红 主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等数学作业集

(下册)

刘 萍 王东红 唐月红 主编

姓名_____

学号_____

班级_____

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是唐月红等编《高等数学》教材的配套教学用书,分上下两册.体系和内容与教材一致,用于教学同步练习.主要包括:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等12章的练习题、总习题及答案,书末附有期末模拟考试A、B卷共四套.本书在选材上,力求具有代表性,既保证内容的覆盖面,又注意精选题目,压缩总量,提高效益,体现素质教育特色.

本书可作为高等院校非数学专业本科生高等数学课程教学辅导用书,供高等数学学习者练习使用,也可供从事高等数学教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学作业集.下册/刘萍,王东红,唐月红主编. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-022905-2

I. 高… II. ①刘…②王…③唐… III. 高等数学-高等学校-习题 IV. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第135552号

责任编辑:赵 靖 李晓鹏 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2008年9月第一次印刷 印张:7 1/4

印数:1—5 000 字数:155 000

定价:25.00元(上下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前 言

本作业集是依据工科类本科高等数学课程教学的基本要求,兼顾研究生入学数学(一)的考试大纲而编写的课后练习,内容覆盖函数、极限、连续,一元函数微积分学,空间解析几何,多元函数微积分学,无穷级数和微分方程等,与现行高等数学教学同步,供两学期使用,分上、下两册,共12章.每章除了供学生课后同步练习以帮助学生理解、巩固所学高等数学内容而精选的练习题外,还有作为全章内容归纳、总结和深化的总习题.书末对这些练习题给出了答案或提示.最后附有A,B试卷及参考答案与评分标准,供学生期末复习参考.本作业集中的每道题均留有答题空间,学生可直接在上面求解,无需抄作业题,不需另备作业本,便于资料的保留,同时也便于教师批阅和收发.

本作业集自2000年开始试用至今,历经修改、编写而成,其特点是题型多样、题量恰当、难易适中、实用方便,体现了思维训练和能力培养,力求使学生通过认真练习迅速掌握习题所涉及的基本概念、基本理论和基本方法,提高分析问题、解决问题和综合应用知识的能力.建议与授课时数160~176层次的课堂教学配套使用.

本作业集第1~4章由刘萍编写;第5~8章由王东红编写;第9~12章由唐月红编写.南京航空航天大学许多长期从事高等数学教学的教师对本作业集的编写给予了很大的帮助,数学系主任陈芳启教授对本作业集的编写与出版给予了大力支持,在此一并表示感谢!

限于编者水平,疏漏之处在所难免,敬请使用者批评指正.

编 者

2008年6月

目 录

第 8 章 多元函数微分学及其应用	1
8.1 多元函数	1
8.2 多元函数的偏导数	3
8.3 全微分	5
8.4 多元复合函数的求导法则	7
8.5 隐函数的求导公式	9
8.6 方向导数与梯度	11
8.7 多元函数微分学的应用	13
8.8 多元函数的极值、最值和条件极值	15
总习题 8	18
第 9 章 重积分	21
9.1 二重积分的概念与性质	21
9.2 二重积分的计算	22
9.3 三重积分	26
9.4 重积分的应用	30
总习题 9	31
第 10 章 曲线积分与曲面积分	35
10.1 第一类(对弧长的)曲线积分	35
10.2 第一类(对面积的)曲面积分	37
10.3 第二类(对坐标的)曲线积分	39
10.4 格林公式及其应用	41
10.5 第二类(对坐标的)曲面积分	44
10.6 高斯公式 通量与散度	46
10.7 斯托克斯公式 环流量与旋度	48
总习题 10	49
第 11 章 无穷级数	53
11.1 常数项级数的概念和性质	53
11.2 常数项级数的审敛法	55
11.3 幂级数	58
11.4 函数展开成幂级数	60

11.5 傅里叶级数	62
11.6 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	65
总习题 11	66
第 12 章 微分方程	69
12.1 微分方程的基本概念	69
12.2 可分离变量的微分方程	70
12.3 一阶线性微分方程	72
12.4 全微分方程	74
12.5 可降阶的高阶微分方程	76
12.6 高阶线性微分方程	78
12.7 二阶常系数齐次线性微分方程	79
12.8 二阶常系数非齐次线性微分方程	81
12.9 变量代换法	83
总习题 12	85
答案与提示	87
附录	98
高等数学试题(A 卷)	98
高等数学试题(B 卷)	102
高等数学试题(A 卷)参考答案及评分标准	106
高等数学试题(B 卷)参考答案及评分标准	109

第 8 章 多元函数微分学及其应用

8.1 多元函数

1. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 求 $f(x+y, x-y, xy)$.

2. 求下列函数的定义域并画出定义域的图形:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1), \quad (2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}.$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}}, \quad (4) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}, \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}, \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{\sqrt{(xy)^2+1}-1}.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y}.$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}.$$

4. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

$$5. \text{ 求函数 } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x-2y)}{x-2y}, & x \neq 2y, \\ 0, & x = 2y \end{cases} \text{ 的间断点.}$$

$$6. \text{ 证明 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

8.2 多元函数的偏导数

1. 选择题

(1) 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的二阶偏导数连续, 则().

(A) 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处必连续

(B) 函数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续

(C) $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

(D) $f_{xy}(x_0, y_0) \neq f_{yx}(x_0, y_0)$

(2) 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则().

(A) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都存在

(B) $f_x(0, 0)$ 不存在, $f_y(0, 0)$ 存在

(C) $f_x(0, 0)$ 存在, $f_y(0, 0)$ 不存在

(D) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都不存在

2. 填空题

(1) 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f_x(x, 1) =$ _____.

(2) 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线相对于 x 轴的倾角为_____.

(3) 设 $f(x, y) = x^2 \sin y$, 则 $f_x\left(2, \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

3. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $z = x^3 y - y^3 x$.

(2) $s = \frac{u^2 + v^2}{uv}$.

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)}.$$

$$(4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy).$$

$$(5) u = x^{\frac{y}{z}}.$$

$$(6) u = \arctan(x-y)^z.$$

4. 求下列函数的二阶偏导数:

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x}.$$

5. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_x(0, 0, 1)$, $f_{xz}(1, 0, 2)$, $f_{yx}(0, -1, 0)$ 以及 $f_{zxx}(2, 0, 1)$.

8.3 全 微 分

1. 选择题

(1) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充要条件是().

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(B) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域存在

(C) $\Delta z - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y (\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0)$ 是无穷小量

(D) $\frac{\Delta z - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} (\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0)$ 是无穷小量

(2) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处().

(A) 偏导数不存在

(B) 可微

(C) 偏导数存在且连续

(D) 不可微

2. 求下列函数的全微分:

(1) $z = xy + \frac{x}{y}.$

(2) $z = e^{\frac{y}{x}}.$

(3) $u = \frac{s+t}{s-t}.$

(4) $u = x^{yz}.$

3. 求函数 $z = \ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1, y=2$ 时的全微分.

4. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

5. 设 $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 dz 和 $dz|_{(1,0)}$.

6. 设 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 求 $dz|_{(1,0)}$.

8.4 多元复合函数的求导法则

1. 求下列函数的全导数:

(1) $z = \arcsin(x-y), x=3t, y=4t^3$.

(2) $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}, y = a \sin x, z = \cos x$.

2. 求下列函数的 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$:

(1) $z = u^2 + v^2, u = x + y, v = x - y$.

(2) $z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$.

3. 求下列函数的一阶偏导数(其中, f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$.

(2) $u=f(x^y, y^x)$.

(3) $u=f(x, xy, xyz)$.

4. 设 f 与 g 有二阶连续导数且 $z=f(x+ay)+g(x-ay)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中, f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy, y)$.

(2) $z=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

8.5 隐函数的求导公式

1. 填空题

(1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 1$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(2) 设 $z=z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

2. 验证方程 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 在点 $(0, 1)$ 的某一邻域内能唯一确定一个单值且有连续导数的函数 $y=f(x)$, 并求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

3. 求下列方程所确定的隐函数 $z=z(x, y)$ 的一阶偏导数:

(1) $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$.

(2) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$.

4. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 求下列方程组所确定的函数的导数或者偏导数:

(1) 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

(2) 设 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

6. 设 $w = f(x, y, u)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, u 是由方程 $u^5 - 5xy + 5u = 1$ 所确定的, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

8.6 方向导数与梯度

1. 下列结论正确的是().

(A) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿任一方向的方向导数都存在, 那么函数在该点的偏导数必存在

(B) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的, 那么函数在该点沿任一方向的方向导数都存在

(C) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是不可微分的, 那么函数在该点沿任一方向的方向导数必不存在

(D) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的偏导数存在, 那么函数在该点沿任一方向的方向导数可能都不存在

2. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

3. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.