

搜题 天下

SOUTI
TIANXIA

天下典题 一网打尽
解题奥秘 尽在其中

高中 数学

解题方法 技巧 规律大全

总主编 / 钟 山



中国出版集团 现代教育出版社

根据教育部普通高中课程标准编写
GENJUJIAOYUBUPUTONGGAOZHONGKECHENGGBIAOZHUNBIANXIE

SOUTI
TIANXIA

搜题
天下

解题方法技巧规律

大全

高中数学

总主编 钟山

主编 都香元 李道波

副主编 王淑玲 宋宏伟



中国出版集团

现代教育出版社



诚邀全国名师加盟

金星国际教育集团专注于少儿、小学、中学和大学教育类图书的研发策划与出版发行工作,现诚邀天下名师加盟“全国名师俱乐部”:每县拟选老师1人,俱乐部会员将成为本公司长期签约作者,享受优惠稿酬,并获长期购书优惠、赠书和及时提供各类教学科研信息等优惠服务。联系地址:山东省潍坊市安顺路4399号 金星大厦 邮政信箱:山东省潍坊市019755号信箱 邮编:261021

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议,并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚征各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果,一旦采用,即付稿酬。

诚邀各位名师对我们的产品质量及营销建言献策。我们将根据贡献大小,分别给予不同形式的奖励。同时,我们也真诚欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通,为确保信息畅通,我们特设以下几个交流平台,供您选用:

图书邮购热线:(010)61743009 61767818

图书邮购地址:北京市天通苑邮局6503号信箱 邮政编码:102218

图书邮购网址:<http://www.firstedubook.com>

质量监督热线:(0536)2223237 王老师

企业网站:<http://www.bjxsy.com>

金星教学考试网:<http://www.jxjxks.com>

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法技巧规律大全 / 钟山主编.

—北京:现代教育出版社,2007.4

(搜题天下)

ISBN 978-7-80196-435-9

I. 高… II. 钟… III. 数学课—高中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第048100号

书 名:搜题天下·高中数学解题方法技巧规律大全

出版发行:现代教育出版社

地 址:北京市朝阳区安华里504号E座

邮政编码:100011

印 刷:北京市梦宇印务有限公司

发行热线:010-61743009

开 本:890×1240 1/32

印 张:11.5

字 数:490千字

印 次:2009年3月第3版 第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-80196-435-9

定 价:19.80元





读《搜题天下》进“清华北大”

DUSOUTITIANXIA JINQINGHUABEIDA

阅读指导高中数学

本书经过专家名师集思广益,博采众长,精心打造,整合了高中数学在高考中的考点,按教材的同步授课顺序对每一考点的解题方法进行科学提炼,体现着“以题讲法,以法统题,题法合一”的设计思想和教学理念,是一本融教、学、考为一体的综合性解题方法技巧图书,适合不同版本教材和不同年级的学生使用。

对于本书的使用,请注意以下4点:

1. 系统把握,构建体系

充分利用本书形成的简明、全面、科学的知识架构,系统把握、步步为营,解决我们在学习知识的过程中遇到的迷茫、杂乱、顾此失彼的困惑,使您的学习变得从容自得。

2. 精研典题,感悟高考

认真研究本书呈现出的最新、最全的经典例题,学习最新考试题型,了解最新考试动态,体会高考难度,感受考点、热点、焦点等考试模式,深刻把握考试精髓,使您提前了解高考、感知高考。

3. 总结规律,以法导学

深刻领悟本书给出的严谨缜密的解题技法,环环相扣的思路分析以及深入透彻的规律总结,通过“以题说法”,达到触类旁通、举一反三的目的,轻松摆脱“不会做题”的苦恼,使您的学习做到事半功倍,让您从此跳出题海。

4. 查漏补缺,未雨绸缪

高度重视本书指出的解题过程中存在的易错、易混之处,尤其是针对自己的薄弱环节进行重点、有效的突破,可以帮助你高效突破知识难点和解题迷点,做到知其因懂其果,引以为戒,防患于未然,让您在“陷阱”面前不再茫然。



目 录

CONTENTS

第一篇 基本方法篇

专题一 集合与简易逻辑..... (1)

集合的基本运算..... (2)

统一形式法(2)/集合、方程、不等式面面观(3)/与几何有关的集合问题的求解方法(4)

简易逻辑..... (5)

等价转化法(5)/充分、必要条件与四种命题的整合(6)/类比推理法(7)/演绎推理法(7)/归纳推理法(8)

直接证明与间接证明..... (9)

综合法(9)/分析法(11)/比较法(11)/反证法(12)/换元法(13)/放缩

法(13)/构造函数法(14)/判别式法(16)/导数法(17)/不等式 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ $(a, b, m \in \mathbf{R}^+ \text{ 且 } a < b)$ 的多种证法及推广和应用(18)/不等式 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq$ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 的变形及应用(22)

专题二 函 数..... (24)

函数值域的求解策略..... (25)

代数换元法(25)/三角换元求函数值域的常用方法(26)/配方法(29)/判别式法(30)/反函数法(30)/利用函数的单调性求值域(30)/均值不等式法(31)/变量分离法(32)/利用函数的有界性求值域(32)/图象法(33)/导数法(33)

求函数解析式的方法..... (35)

配凑法(35)/换元法(35)/待定系数法(36)/消元法(37)/特殊值法(37)/图象法(38)

函数的奇偶性	(40)
求函数值(40)/比较大小(40)/求函数解析式(41)/讨论函数单调性(42)/判断函数奇偶性(43)/求参数的值(44)/解方程(45)/解(证)不等式(46)	
函数的单调性	(47)
判断函数单调性的方法:定义法(47)/复合函数法(49)/导数法(50)/抽象函数单调性的判定技巧(51)	
二次函数	(54)
二次函数在闭区间上的四种最值问题:定区间定对称轴(54)/定区间动对称轴(55)/动区间定对称轴(57)/动区间动对称轴(58)/三个“二次”之间的关系及处理策略:一元二次方程根的分布问题(60)/参数的求解策略(62)	
指数函数、对数函数与幂函数	(64)
指、对、幂函数比较:运用函数性质(64)/比较法(65)/媒介法(66)/特殊值法(67)/图象法(67)/目标转移法(68)/综合法(68)/指、对函数中参数范围的求解方法:图象法(69)/转化法(70)/利用指、对函数的性质(71)/函数值域法(72)/不等式法(73)/导数法(74)/五类抽象函数:线性函数型抽象函数的处理策略(76)/指数函数型抽象函数的处理策略(77)/对数函数型抽象函数的处理策略(78)/幂函数型抽象函数的处理策略(79)/三角函数型抽象函数的处理策略(80)	
专题三 数列	(82)
求数列通项公式的方法	(83)
分析法(83)/待定系数法(85)/换元法(85)/累加法(86)/乘约法(89)/构造数列法(92)/递推法(94)	
简单的递推数列及处理策略	(95)
有关“ $a_1=a, a_{n+1}=Aa_n+B$ ”型数列通项公式的求法(其中 A, B 为常数, $AB \neq 0$)	(95)
有关“ $a_1=a, a_n=a_{n-1}+f(n)$ 或 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$ ”型数列通项公式的求法(96)/有关“ $a_1=a, a_n=Aa_{n-1}+f(n)$ ($A \neq 0$)”型数列通项公式的求法(97)/有关“ $a_1=a, a_2=b, a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$ (A, B 为常数)”型数列通项公式的求法(98)/有关“ $a_1=a, a_n=\frac{Ca_{n-1}+D}{Aa_{n-1}+B}$ (其中 A, B, C, D 为不同时为零的常数)”型数列通项公式的求法(100)/有关“ $a_1=a, f(a_n, S_n)=0$ ”型数列通项公式的求法(102)	
数列求和	(104)
分组法(104)/化归法(105)/错位相减法(106)/裂项法(108)/倒序相加法(109)/错位相加法(110)/降次递推法(111)/聚合法(112)	

专题四 三角函数.....	(114)
三角函数最小正周期的求法及应用.....	(115)
利用和角公式求最小正周期(115)/利用二倍角公式求最小正周期(116)/利用降次公式求最小正周期(117)/最小正周期的逆向应用(118)/较为复杂的三角函数周期的求法技巧(120)/含绝对值的三角函数最小正周期的求法(121)	
三角函数的值域与最值的求法.....	(122)
可化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 型的最值问题的求法(122)/正弦、余弦齐次式的最值问题的求法(124)/关于 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的二次型最值问题的求法(125)/关于 $\sin x, \cos x$ 的分式型三角函数最值的求法(127)/关于 $\sin x \cdot \cos x$ 及 $\sin x \pm \cos x$ 型三角函数最值的求法(129)/较复杂的三角函数式最值问题的求解策略(130)/三角函数最值的逆向应用(132)	
三角函数的求值.....	(134)
给角求值:利用二倍角公式和平方关系求值(134)/利用和差公式求值(135)/通过拆角与并角求值(136)/角度成等差、等比数列的三角函数求值的方法(137)/给值求值:利用和角公式及二倍角公式的求值问题(138)/三角函数齐次式的求值问题及解法(141)/利用半角公式的求值问题(144)/利用基底法求三角函数值(145)/给值求角(147)	
由图象确定 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的方法技巧	(150)
五点法(150)/利用两点之间的单调性求解析式(152)/利用平移法求解析式(152)	
专题五 向 量.....	(154)
平面向量.....	(155)
向量数量积的求法(155)/求向量的长度(156)/求两向量的夹角(158)/求解垂直问题(158)/向量数量积的逆向应用(160)	
空间向量与立体几何.....	(162)
空间向量及其运算(162)/空间线、面平行或垂直关系的判断、证明(163)/向量共面问题(164)/求异面直线所成的角的方法(166)/求斜线与平面所成角的方法(168)/二面角大小的求法(169)/两异面直线距离的求法(172)/点到平面距离的求法(173)/直线到平面、平面到平面距离的求法(174)/探索性问题的处理策略(175)	
平面向量的综合应用.....	(176)
向量与函数综合问题的处理策略(176)/向量与三角函数综合问题的处理策略(178)/向量与数列综合问题的处理策略(180)/向量与解析几何综合问题的求解技巧(181)	

专题六 不等式	(183)
基本不等式的灵活运用	(184)
加(减)数使和或积为定值(184)/乘(除)数使和或积为定值(185)/整体代换后再使用基本不等式(186)/平方后再使用基本不等式(187)/取倒数后再使用基本不等式(188)/用基本不等式求最值时应注意等号成立的条件(189)	
代数不等式的解法	(190)
高次不等式与分式不等式的解法:穿根法(190)/无理不等式的解法:等价转化法(192)/图象法(194)/三角换元法(195)/代数换元法(195)	
指数、对数不等式的解法	(196)
单调性法(196)/换元法(197)	
专题七 解析几何	(199)
直 线	(200)
点、直线对称问题的求解策略:点关于点的对称问题的求法(200)/直线关于点的对称问题的求法(200)/点关于直线的对称问题的求法(201)/直线关于直线的对称问题的求法(202)	
直线与圆	(204)
待定系数法求圆的方程(204)/与圆的切线有关的问题的处理策略(206)/直线与圆相交的有关问题的处理策略(208)/圆中有关最值的求解策略(211)	
圆锥曲线	(214)
与离心率有关的问题的求法(214)/利用圆锥曲线的定义的解题策略(218)/直线与圆锥曲线:直线与椭圆的处理策略(219)/直线与双曲线的处理策略(221)/直线与抛物线的处理策略(224)/中点弦问题的求解策略(225)/最值问题的求解策略(227)	
求轨迹方程	(229)
直接法(229)/定义法(231)/参数法(232)/代入法(234)/待定系数法(235)/交轨法(236)/向量法(237)	
专题八 立体几何	(238)
直线与平面	(239)
线共点问题的证明方法(239)/点共线问题的证明方法(240)/线共面问题的证明方法(240)/“有且只有”问题的证明方法(241)/异面直线的证明方法(242)/线面平行的证明方法(243)/面面平行的处理策略(244)/线面垂直的处理策略(245)/面面垂直的处理策略(246)	
简单多面体	(248)
空间几何体的表面积与体积:柱体的表面积与体积的求法(248)/锥体的表面积与体积的求法(249)/台体的表面积与体积的求法(250)/球的表面积与体积的求法(251)/球面距离问题的处理策略(251)/球的切、接问题的处理策略(252)	

夹角与距离	(255)
平移法(255)/定义法(256)/垂线法(257)/补形法(258)/体积法(259)/无棱二面角的求法(260)	
专题九 计数原理与概率统计	(263)
排列、组合综合应用问题的求解策略	(264)
计数原理法(264)/特殊优先法(265)/相邻问题捆绑法(266)/相间问题插空法(267)/间接法(267)/定序问题缩倍法(268)/多排问题单排法(269)/环排问题线排法(269)/先选后排法(270)/树形图法(270)/列表法(271)/同一标准分类法(272)/相同问题隔板法(273)	
二项式定理	(274)
通项公式法(274)/赋值法(275)/构造法(276)/转化法(277)	
概 率	(278)
列表法(278)/直接法与间接法(279)/独立重复试验模型的求解策略(281)/对立事件与互斥事件的概率的求解策略(282)/“有放回”与“不放回”问题的求解策略(282)/分配与投球入盒问题的求解策略(283)/相互独立事件概率的求解策略(284)/条件概率的求解策略(285)/几何概型概率的求解策略(286)	
概率与统计	(288)
离散型随机变量的分布列及数字特征的求解策略(288)/正态分布的求解策略(291)/用样本估计总体与变量的相关性的求解策略(292)/随机抽样的求解策略(294)/算法与程序框图的处理策略(295)	
专题十 导数与复数	(298)
导数的概念及运算	(299)
定义法(299)/公式法则法(300)/构造法(301)/数形结合法(302)	
导数的应用	(303)
切线的斜率(303)/函数单调性的求解策略(304)/函数极值与最值的求解策略(305)/运用导数解决不等式问题的方法(306)/运用导数研究方程根的个数问题的方法(307)/导数的实际应用(308)	
复数的运算及加减法的几何意义	(310)
专题十一 数学建模	(312)
函数模型	(313)
一次函数模型(313)/二次函数模型(314)/分段函数模型(314)/指数函数模型(316)/对数函数模型(316)/幂函数模型(317)	
方程与不等式模型	(318)
几何模型	(319)
概率与统计模型	(321)
线性规划模型	(322)

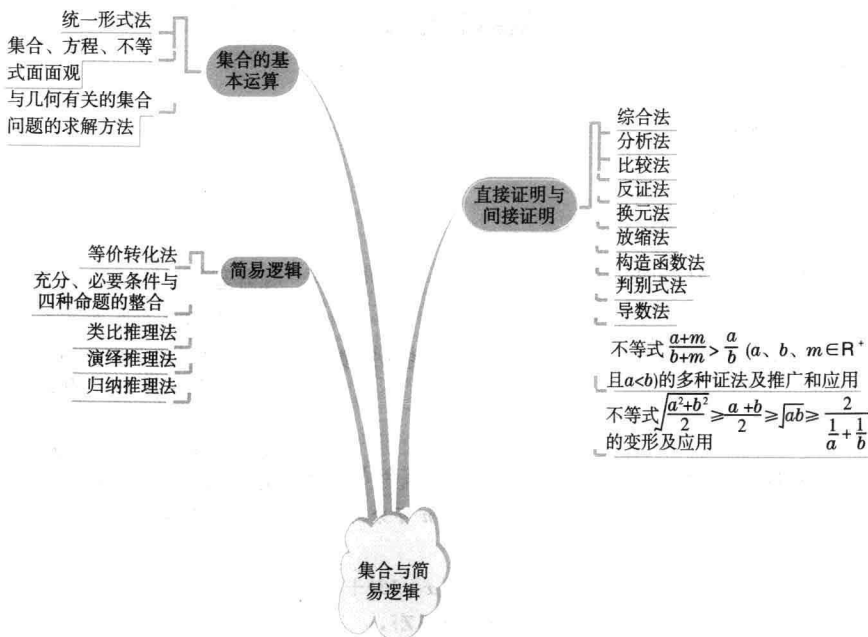
第二篇 数学思想篇

专题一 函数与方程思想	(326)
函数与方程(不等式)的问题.....	(326)
数列(不等式)转化为函数问题.....	(327)
三角与函数.....	(328)
函数与解析几何的问题.....	(329)
函数中的应用问题.....	(331)
专题二 数形结合思想	(332)
利用数轴解决与绝对值有关的问题.....	(332)
数形结合在方程中的应用.....	(333)
数形结合在函数中的应用.....	(334)
数形结合在不等式中的应用.....	(335)
数形结合解决三角函数、平面向量问题.....	(336)
构建解析几何的斜率、截距、距离等模型研究最值问题.....	(337)
构建圆锥曲线模型研究代数问题.....	(339)
专题三 分类讨论思想	(340)
概念型——涉及的数学概念是分类讨论的依据.....	(340)
性质型——运用的数学定理、公式或运算性质、法则是分类的依据.....	(342)
几何型——利用点的位置变化或图形的变化进行分类.....	(343)
含参型——由参数的取值变化的不同结果进行讨论.....	(345)
分段型——按可能出现的情况分类.....	(346)
应用型——由实际意义等引起的分类讨论.....	(347)
专题四 转化与化归思想	(349)
函数与方程的相互转化.....	(349)
函数与不等式的相互转化.....	(350)
数与形的相互转化.....	(351)
空间与平面的相互转化.....	(353)
正与反的相互转化.....	(354)
特殊与一般的相互转化.....	(355)
主元与次元的相互转化.....	(356)
相等与不等的相互转化.....	(358)
整体与局部的相互转化.....	(358)
动与静的相互转化.....	(359)
陌生与熟悉的相互转化.....	(360)
实际问题与数学模型的相互转化.....	(361)

第一篇 基本方法篇

专题一 集合与简易逻辑

搜索引擎



中学数学题解題用“假设”一词的三个地方：存在性问题、反证法、数学归纳法。



学海导航

集合是掌握和使用数学语言的基础,是高中数学学习的起点.逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科,基本的逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具.

集合部分重点考查集合与集合之间的关系,近几年高考试题加强了计算与化简的考查,并向无限集发展.另外以集合作为工具和其他知识点相结合(如不等式、函数的定义域、值域、曲线间的相交等)的综合命题,也是高考考查的重点,一般占5~15分.

逻辑主要以考查四种命题、逻辑联结词等知识点为重点,题目以简单题为主,今后命题仍以基本概念为考查对象,并且以本节知识作为工具考查三角函数、立体几何、解析几何中的知识点,题型主要为选择题和填空题,一般占4~6分.

一

集合的基本运算

天下典例

► 1. 统一形式法

典例 1 (1) 已知集合 $M = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $N = \{x | x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$, 试求 $M \cap N$.

(2) 已知集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{4}\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 集合 $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 试求 $M \cap N$.

典例分析 3 和 4 的最小公倍数为 12, 集合 M 中 n 可分为被 4 除余 0, 1, 2, 3 四类; 集合 N 中 n 可分为被 3 除余 0, 1, 2 三类.

解: (1) $M = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\} = \{x | x = 12k + 1 \text{ 或 } x = 12k + 4 \text{ 或 } x = 12k + 7 \text{ 或 } x = 12k + 10, k \in \mathbb{Z}\}$,

$N = \{x | x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}\} = \{x | x = 12k + 3 \text{ 或 } x = 12k + 7 \text{ 或 } x = 12k + 11, k \in \mathbb{Z}\}$,

所以 $M \cap N = \{x | x = 12k + 7, k \in \mathbb{Z}\}$.

前车之鉴

在判定两集合关系和运算时,很多同学都用取特殊值来解决.这种方法运算量大,准确度差,逻辑性也不强.一般地,采用统一两个集合的表示形式就可作出判定.



结构决定性——数学式子结构特征往往决定解决问题的方法,如求函数值域问题时,函数解析式的结构特征决定求值域的方法.

$$\begin{aligned}
 (2) M &= \left\{ x \mid x = \frac{k}{4}\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = (3k+2)\frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z} \right\} \\
 &= \left\{ x \mid x = (12n+2)\frac{\pi}{12} \text{ 或 } x = (12n+5)\frac{\pi}{12} \text{ 或 } x = (12n+8)\frac{\pi}{12} \text{ 或 } x = (12n+11)\frac{\pi}{12}, n \in \mathbf{Z} \right\}, \\
 N &= \left\{ x \mid x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = (4k+3)\frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z} \right\} \\
 &= \left\{ x \mid x = (12n+3)\frac{\pi}{12} \text{ 或 } x = (12n+7)\frac{\pi}{12} \text{ 或 } x = (12n+11)\frac{\pi}{12}, n \in \mathbf{Z} \right\}, \\
 \text{所以 } M \cap N &= \left\{ x \mid x = (12n+11)\frac{\pi}{12}, n \in \mathbf{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

以题说法 在判定两集合的关系和运算时,可将不同形式的几个关系式化成统一形式,将各集合所包含的情况一一列出,对集合中的元素进行分类,从而判定出它们之间的关系,此类方法称为统一形式法.

► 2. 集合、方程、不等式面面观

典例 2 集合 $A = \{x \mid x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 集合 $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 同时成立, 求 m .

典例分析 将 B, C 具体化, 利用 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 同时成立, 判断出 A 所含元素.

解: $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, -4\}$, $\therefore A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore 2 \in A$ 或 $3 \in A$.

又 $\because A \cap C = \emptyset$, $\therefore 2 \notin A$, 从而 $3 \in A$. 把 $x=3$ 代入方程 $x^2 - mx + m^2 - 19 = 0$, 得 $m = -2$ 或 $m = 5$. 当 $m = 5$ 时, A 为 $x^2 - 5x + 6 = 0$, $(x-2)(x-3) = 0$, $\therefore x = 2$ 或 $x = 3$, $A = \{2, 3\}$, 与 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾, $\therefore m = 5$ 不合题意, 舍去.

经检验当 $m = -2$ 时, 符合题意, $\therefore m = -2$.

典例 3 设集合 $A = \{(x, y) \mid x = m, y = -3m + 2, m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) \mid x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in \mathbf{Z}\}$, 问是否存在非零整数 a , 使 $A \cap B \neq \emptyset$.

典例分析 先利用参数方程换成代数方程, 消去 y 转化为一元二次方程根的问题.

解: 由 A 得 $y = -3x + 2$, 由 B 得 $y = a(x^2 - x + 1)$, 联立得 $\begin{cases} y = -3x + 2, \\ y = a(x^2 - x + 1), \end{cases}$

消去 y 得 $ax^2 + (3-a)x + (a-2) = 0$. ③

$\because A \cap B \neq \emptyset$ 的必要条件是 $\Delta = (3-a)^2 - 4a(a-2) \geq 0$ 得 $3a^2 - 2a - 9 \leq 0$,

$\therefore \frac{1-2\sqrt{7}}{3} \leq a \leq \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$. $\because a$ 为非零整数, $\therefore a$ 可能为 $-1, 1, 2$, 检验后知, $a =$

1 时, 方程③无整数解, $a = -1$ 或 $a = 2$ 时③有整数解, $\therefore$ 当 $a = -1$ 或 $a = 2$ 时, 可使 $A \cap B \neq \emptyset$.

知识即方法——数学解题方法往往来源于知识本身, 如解反函数问题、数列求和等。我们要注意积累。



以题说法 与方程、不等式有关的集合运算问题,解题时要理解集合与图形之间的关系,理解集合之间的包含关系,从而列方程(组)或不等式(组).

► 3. 与几何有关的集合问题的求解方法

典例 4 (1)集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2\}$, 其中 $r > 0$, 若 $A \cap B$ 的元素有且仅有一个, 则 r 的值是_____.

(2) $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = a+1\}$, $N = \{(x, y) | (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则 a 的值为_____.

(3) 设 a, b 是整数, 集合 $E = \{(x, y) | (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in E$ 但点 $(1, 0) \notin E$, 点 $(3, 2) \notin E$, 求 a, b 的值.

典例分析 (1) 由集合 A, B 的元素是点的坐标, 因此两个集合有且只有一个元素意味着两个圆有且只有一个公共点, 即两圆相切, 求得 $r=3$ 或 $r=7$. 故填 3 或 7.

(2) 集合 M 表示除去点 $(2, 3)$ 的直线, 集合 N 表示一条直线, 因此由 $M \cap N = \emptyset$ 知, 点 $(2, 3)$ 在集合 N 所表示的直线上或两直线平行, 由此求得 a 的值为 $1, -1, \frac{5}{2}, -4$.

故填 $1, -1, \frac{5}{2}, -4$.

(3) 将 $(1, 0) \notin E$, 点 $(3, 2) \notin E$ 转化为 $(1-a)^2 + 3b > 0$, $(3-a)^2 + 3b > 12$. 然后求解不等式(组).

$$\because (2, 1) \in E, \therefore (2-a)^2 + 3b \leq 6, \quad \text{①}$$

$$\text{又 } (1, 0) \notin E, (3, 2) \notin E, \text{ 故 } (1-a)^2 + 3b > 0, \quad \text{②}$$

$$(3-a)^2 + 3b > 12, \quad \text{③}$$

$$\text{由 ①+②, 得 } a > -\frac{3}{2}. \text{ ①+③, 得 } a < -\frac{1}{2}, \therefore -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}.$$

$$\because a \text{ 是整数}, \therefore a = -1. \text{ 把 } a = -1 \text{ 代入 ①②得 } \begin{cases} (2+1)^2 + 3b \leq 6, \\ (1+1)^2 + 3b > 0, \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{4}{3} < b \leq -1. \because b \text{ 是整数}, \therefore b = -1. \text{ 综上所述: } a = -1, b = -1.$$

以题说法 与几何有关的集合问题的求解方法主要是利用数形结合法和分类讨论法, 搞清集合所表示的图形, 对参数进行合理的分类是解决含参数集合问题的关键.

★ 规律总结

研究集合问题, 一定要理解集合的意义, 看代表元素是数还是数对, 代表元素是

好的习惯一旦形成就是一种无形的力量。



数时,是函数关系中自变量的取值,还是因变量的取值,可与方程、不等式的解集、函数的定义域、值域联系;代表元素是数对时,可联系点的坐标,与平面中的点集(曲线)联系.解决集合与方程、不等式、几何的问题时,尽量使用数形结合思想,借助数轴、直角坐标系或 Venn 图等工具,将抽象的代数问题具体化、形象化、直观化.在解此类问题时,要注意 $\emptyset$ 的特殊性,即空集虽空,但空有所用.若空集为 $\emptyset$,则有 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; $\emptyset \in \{\emptyset\}$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$; $\emptyset \subseteq A$. 解题时若忽视 $\emptyset$ 的存在,就会造成解题结果的残缺不全.

二

简易逻辑

天下典例

► 1. 等价转化法

典例 1 判断命题:若 $m > 0$, 则 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根的逆否命题的真假.

典例分析 写出其逆否命题进行判断或直接判断原命题,因为原命题与逆否命题是等价的.

解法 1: 因为 $m > 0$, 故 $m > 0 > -\frac{1}{4}$, 可得 $4m + 1 > 0$,

所以方程 $x^2 + x - m = 0$ 的判别式 $\Delta = 4m + 1 > 0$,

因而方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根,

所以原命题“若 $m > 0$, 则 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根”为真.

又因为原命题与它的逆否命题等价,

所以命题“若 $m > 0$, 则 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根”的逆否命题也为真.

解法 2: 原命题“若 $m > 0$, 则 $x^2 + x - m = 0$ 有实数根”的逆否命题为“若 $x^2 + x - m = 0$ 无实根, 则 $m \leq 0$ ”.

因为 $x^2 + x - m = 0$ 无实根, 所以 $\Delta = 4m + 1 < 0$. 故 $m < -\frac{1}{4} \leq 0$, 则原命题的逆否命题为真.

技巧点拨

利用四种命题中的等价关系, 原命题与逆否命题是等价的, 因此判断原命题可转化为判断其逆否命题. 互逆或互否的两个命题是不等价的.

典例 2 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2, q: x^2 + 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

典例分析 先将 p 和 q 转化为 $\neg p$ 和 $\neg q$, 解出不等式的范围, 根据充分条件, 必

目标决定方法——解题要有目标意识, 在解题过程中要始终盯着目标, 不要偏离解题方向.

要条件与集合的关系即可求解.

解:由 $\neg p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| > 2$, 得 $\neg p: x \in A = \{x | x > 10 \text{ 或 } x < -2\}$.

由 $\neg q: x^2 + 2x + 1 - m^2 > 0 (m > 0)$ 得 $\neg q: x \in B = \{x | x > m-1 \text{ 或 } x < -1-m\}$.

由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 得 $B \subsetneq A$, 故 $\begin{cases} m > 0, \\ -1-m \leq -2, \therefore m \geq 11, \\ -1+m \geq 10, \end{cases}$

即实数 m 的取值范围是 $m \geq 11$.

以题说法 利用充要条件与集合之间的关系, 将充要条件问题转化为集合之间的包含关系, 列不等式(组)进而得解. 如果 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的充分条件; 如果 $B \subseteq A$, 则 A 是 B 的必要条件; 如果 $A = B$, 则 A 是 B 的充要条件.

► 2. 充分、必要条件与四种命题的整合

典例 3 平面向量 a, b 共线的充要条件是()

A. a, b 方向相同

B. a, b 两向量中至少有一个为零向量

C. $\exists \lambda \in \mathbf{R}, b = \lambda a$

D. 存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$

典例分析 A 中, a, b 同向则 a, b 共线; 但 a, b 共线 a, b 不一定同向, 因此 A 不是充要条件.

若 a, b 两向量中至少有一个为零向量, 则 a, b 共线; 但 a, b 共线时, a, b 不一定是零向量, 如 $a = (1, 2), b = (2, 4)$, 从而 B 不是充要条件.

当 $b = \lambda a$ 时, a, b 一定共线; 但 a, b 共线时, 若 $b \neq 0, a = 0$, 则 $b = \lambda a$ 就不成立, 从而 C 也不是充要条件.

对于 D, 假设 $\lambda_1 \neq 0$, 则 $a = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} b$, 因此 a, b 共线; 反之, 若 a, b 共线, 则 $a = \frac{n}{m} b$, 即 $ma - nb = 0$. 令 $\lambda_1 = m, \lambda_2 = -n$, 则 $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$. 故选 D. 答案: D

典例 4 设命题 $p: 2x^2 - 3x + 1 \leq 0$; 命题 $q: x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的范围.

典例分析 涉及求参数时, 可利用命题的等价性进行转化, 从集合的包含、相等关系上来考虑制约的关系.

解: 由 $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$, 得 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 记 $A = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$. 由 $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 得 $a \leq x \leq a+1$, 记 $B = \{x | a \leq x \leq a+1\}$. 由 $\neg q \Rightarrow \neg p, \neg p \not\Rightarrow \neg q$, 即 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p, \therefore A \subsetneq B$, 则 $\begin{cases} a+1 \geq 1, \\ a < \frac{1}{2}, \end{cases} \therefore 0 \leq a < \frac{1}{2}$.



以题说法 充要条件揭示了命题的条件与结论之间的关系. 当判断充要条件较难时, 可根据原命题与逆否命题的等价性进行转化, 如若 $p \Rightarrow q$ 为真, 则 $\neg q \Rightarrow \neg p$ 为真, 充要条件是四种命题关系的深化, 常常整合后一起进行考查.

▶▶ 3. 类比推理法

典例 5 (江苏常州模拟) 根据两类不同事物之间具有类似(或一致)性, 推测其中一类事物具有与另一类事物类似(或相同)的性质的推理, 叫做类比推理. 请用类比推理完成下表:

平 面	空 间
三角形的两边之和大于第三边	四面体的任意三个面的面积之和大于第四个面的面积
三角形的面积等于任意一边的长度与这边上高的乘积的 $\frac{1}{2}$	三棱锥的体积等于任一底面的面积与这底面上的高的乘积的 $\frac{1}{3}$
三角形的面积等于其内切圆半径与三角形周长乘积的 $\frac{1}{2}$	

典例分析 从平面到空间的类比推理中, 长度类比成面积, 面积类比成体积, 圆类比成球.

解: 三棱锥的体积等于其内切球半径与三棱锥表面乘积的 $\frac{1}{3}$.

以题说法 类比推理的一般步骤: ①找出两类事物之间的相似性或一致性; ②用一类事物的性质去推测另一类事物的性质, 得出一个明确的命题(猜想); ③一般地, 事物之间的各个性质之间并不是孤立存在的, 而是相互制约的. 如果两个事物在某些性质上相同或类似, 那么它们在另一些性质上也可能相同或类似, 类比的结论可能是真的; ④在一般情况下, 如果类比的相似性越多, 相似的性质与推测的性质之间越相关, 那么类比得出的命题就越可靠.

▶▶ 4. 演绎推理法

典例 6 (石家庄模拟) 已知函数 $f(x) = -\frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}}$ ($a > 0, a \neq 1$).

(1) 证明: 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称;

(2) 求 $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ 的值.

典例分析 证明对称性可证明图象上任意一点 (x, y) 关于 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称的点