搜题天下

SOUTI TIANXIA

天下典题 一网打尽
解题奥秘 尽在其中

高中数学

解题方法 技巧 规律大全

总主编／钟 山

中国出版集团 现代教育出版社

根据教育部普通高中课程标准编写
GENJUJIAOYUBUPUTONGGAOZHONGKECHENGBIAOZHUNBIANXIE

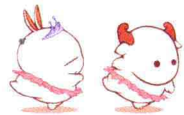
SOUTI TIANXIA 搜题天下

解题方法技巧规律大全

高中数学

总主编　钟　山
主　　编　都香元　李道波
副主编　王淑玲　宋宏伟

中国出版集团　现代教育出版社



诚邀全国名师加盟

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法技巧规律大全 / 钟山主编.
—北京：现代教育出版社，2007.4
(搜题天下)
ISBN 978—7—80196—435—9
Ⅰ.高… Ⅱ.钟… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 048100 号

书　　名：搜题天下·高中数学解题方法技巧规律大全
出版发行：现代教育出版社
地　　址：北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码：100011
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司
发行热线：010—61743009
开　　本：890×1240　1/32
印　　张：11.5
字　　数：490 千字
印　　次：2009 年 3 月第 3 版　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978—7—80196—435—9
定　　价：19.80 元

读《搜题天下》进“清华北大”

DUSOUTITIANXIA JINQINGHUABEIDA

阅读指导 高中数学

本书经过专家名师集思广益，博采众长，精心打造，整合了高中数学在高考中的考点，按教材的同步授课顺序对每一考点的解题方法进行科学提炼，体现着“以题讲法，以法统题，题法合一”的设计思想和教学理念，是一本融教、学、考为一体的综合性解题方法技巧图书，适合不同版本教材和不同年级的学生使用。

对于本书的使用，请注意以下 4 点：

1．系统把握，构建体系

充分利用本书形成的简明、全面、科学的知识架构，系统把握、步步为营，解决我们在学习知识的过程中遇到的迷茫、杂乱、顾此失彼的困惑，使您的学习变得从容自得。

2．精研典题，感悟高考

认真研究本书呈现出的最新、最全的精典例题，学习最新考试题型，了解最新考试动态，体会高考难度，感受考点、热点、焦点等考试模式，深刻把握考试精髓，使您提前了解高考、感知高考。

3．总结规律，以法导学

深刻领悟本书给出的严谨缜密的解题技法，环环相扣的思路分析以及深入透彻的规律总结，通过“以题说法”，达到触类旁通、举一反三的目的，轻松摆脱“不会做题”的苦恼，使您的学习做到事半功倍，让您从此跳出题海。

4．查漏补缺，未雨绸缪

高度重视本书指出的解题过程中存在的易错、易混之处，尤其是针对自己的薄弱环节进行重点、有效的突破，可以帮助你高效突破知识难点和解题迷点，做到知其因懂其果，引以为戒，防患于未然，让您在“陷阱”面前不再茫然。

目录

CONTENTS

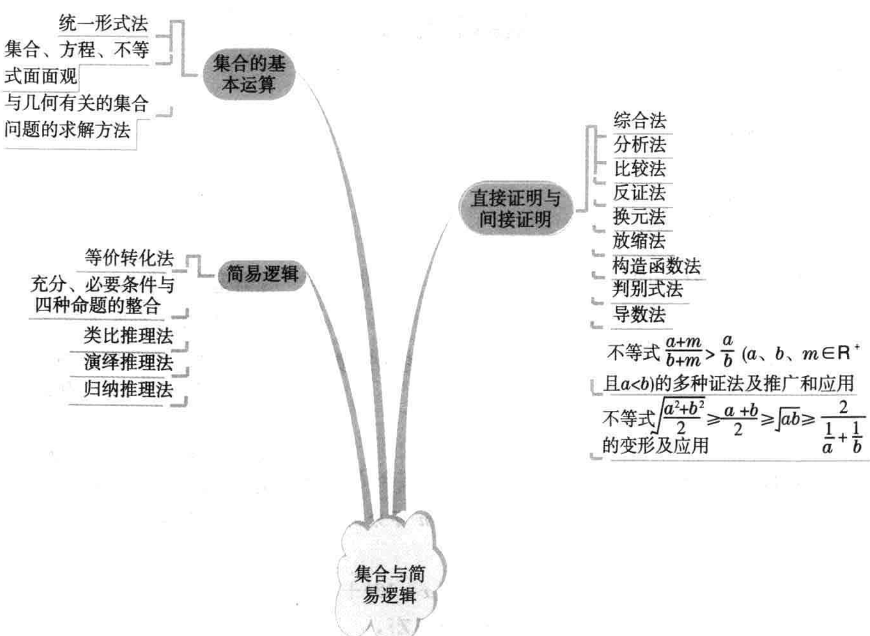
第一篇 基本方法篇

第二篇 数学思想篇

第一篇 基本方法篇

专题一 集合与简易逻辑

搜索引擎



中学数学题解题用“假设”一词的三个地方：存在性问题、反证法、数学归纳法。

我能成功

学海导航

集合是掌握和使用数学语言的基础，是高中数学学习的起点. 逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科，基本的逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具.

集合部分重点考查集合与集合之间的关系，近几年高考试题加强了计算与化简的考查，并向无限集发展. 另外以集合作为工具和其他知识点相结合(如不等式、函数的定义域、值域、曲线间的相交等)的综合命题，也是高考考查的重点，一般占 5～15 分.

逻辑主要以考查四种命题、逻辑联结词等知识点为重点，题目以简单题为主，今后命题仍以基本概念为考查对象，并且以本节知识作为工具考查三角函数、立体几何、解析几何中的知识点，题型主要为选择题和填空题，一般占 4～6 分.

一 集合的基本运算

天下典例

1. 统一形式法

典例 1 (1)已知集合 $M=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{x|x=4n+3,n\in\mathbf{Z}\}$，试求 $M\cap N$.

(2)已知集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$，集合 $N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{3}\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，试求 $M\cap N$.

前车之鉴

在判定两集合关系和运算时，很多同学都用取特殊值来解决. 这种方法运算量大，准确度差，逻辑性也不强. 一般地，采用统一两个集合的表示形式就可作出判定.

典例分析 3 和 4 的最小公倍数为 12，集合 M 中 n 可分为被 4 除余 0,1,2,3 四类；集合 N 中 n 可分为被 3 除余 0,1,2 三类.

解：(1)$M=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=12k+1$ 或 $x=12k+4$ 或 $x=12k+7$ 或 $x=12k+10,k\in\mathbf{Z}\}$，

$N=\{x|x=4n+3,n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=12k+3$ 或 $x=12k+7$ 或 $x=12k+11,k\in\mathbf{Z}\}$，

所以 $M\cap N=\{x|x=12k+7,k\in\mathbf{Z}\}$.

我能成功

结构决定性质——数学式子结构特征往往决定解决问题的方法，如求函数值域问题时，函数解析式的结构特征决定求值域的方法。

(2)$M=\left\{x\left|x=\frac{k}{4}\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{x\left|x=(3k+2)\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

$=\left\{x\left|x=(12n+2)\frac{\pi}{12}\text{或}x=(12n+5)\frac{\pi}{12}\text{或}x=(12n+8)\frac{\pi}{12}\text{或}x=(12n+11)\frac{\pi}{12},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,

$N=\left\{x\left|x=\frac{k}{3}\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{x\left|x=(4k+3)\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

$=\left\{x\left|x=(12n+3)\frac{\pi}{12}\text{或}x=(12n+7)\frac{\pi}{12}\text{或}x=(12n+11)\frac{\pi}{12},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,

所以 $M\cap N=\left\{x\left|x=(12n+11)\frac{\pi}{12},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

以题说法 在判定两集合的关系和运算时,可将不同形式的几个关系式化成统一形式,将各集合所包含的情况一一列出,对集合中的元素进行分类,从而判定出它们之间的关系,此类方法称为统一形式法.

2. 集合、方程、不等式面面观

典例 2 集合 $A=\{x|x^2-mx+m^2-19=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$,集合$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,且 $A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$同时成立,求 m.

典例分析 将 B、C 具体化,利用 $A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$ 同时成立,判断出 A 所含元素.

解:$B=\{2,3\}$,$C=\{2,-4\}$,$\because$ $A\cap B\neq\varnothing$,$\therefore$ $2\in A$ 或 $3\in A$.

又$\because$ $A\cap C=\varnothing$,$\therefore$ $2\notin A$,从而 $3\in A$. 把 $x=3$ 代入方程 $x^2-mx+m^2-19=0$,得 $m=-2$ 或 $m=5$. 当 $m=5$ 时,A 为 $x^2-5x+6=0$,$(x-2)(x-3)=0$,$\therefore$ $x=2$ 或 $x=3$,$A=\{2,3\}$,与 $A\cap C=\varnothing$矛盾,$\therefore$ $m=5$ 不合题意,舍去.

经检验当 $m=-2$ 时,符合题意,$\therefore$ $m=-2$.

典例 3 设集合 $A=\{(x,y)|x=m,y=-3m+2,m\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)|x=n,y=a(n^2-n+1),n\in\mathbf{Z}\}$,问是否存在非零整数 a,使 $A\cap B\neq\varnothing$.

典例分析 先利用参数方程换成代数方程,消去 y 转化为一元二次方程根的问题.

解:由 A 得 $y=-3x+2$,由 B 得 $y=a(x^2-x+1)$,联立得$\begin{cases}y=-3x+2, & ①\\ y=a(x^2-x+1), & ②\end{cases}$

消去 y 得 $ax^2+(3-a)x+(a-2)=0$. ③

$\because$ $A\cap B\neq\varnothing$的必要条件是 $\Delta=(3-a)^2-4a(a-2)\geqslant0$ 得 $3a^2-2a-9\leqslant0$,

$\therefore$ $\frac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$. $\because$ a 为非零整数,$\therefore$ a 可能为$-1,1,2$,检验后知,$a=1$ 时,方程③无整数解,$a=-1$ 或 $a=2$ 时③有整数解,$\therefore$ 当 $a=-1$ 或 $a=2$ 时,可使 $A\cap B\neq\varnothing$.

知识即方法——数学解题方法往往来源于知识本身,如解反函数问题、数列求和等。我们要注意积累。

我能成功

以题说法 与方程、不等式有关的集合运算问题，解题时要理解集合与图形之间的关系，理解集合之间的包含关系，从而列方程(组)或不等式(组).

3. 与几何有关的集合问题的求解方法

典例 4 (1)集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B$ 的元素有且仅有一个，则 r 的值是________.

(2)$M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，则 a 的值为________.

(3)设 a,b 是整数，集合 $E=\{(x,y)\mid (x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$ 但点 $(1,0)\notin E$，点 $(3,2)\notin E$，求 a,b 的值.

典例分析 (1)由集合 A、B 的元素是点的坐标，因此两个集合有且只有一个元素意味着两个圆有且只有一个公共点，即两圆相切，求得 $r=3$ 或 $r=7$. 故填 3 或 7.

(2)集合 M 表示除去点(2,3)的直线，集合 N 表示一条直线，因此由 $M\cap N=\varnothing$ 知，点(2,3)在集合 N 所表示的直线上或两直线平行，由此求得 a 的值为 $1,-1,\dfrac{5}{2},-4$.

故填 $1,-1,\dfrac{5}{2},-4$.

(3)将 $(1,0)\notin E$，点 $(3,2)\notin E$ 转化为 $(1-a^2)+3b>0$，$(3-a)^2+3b>12$. 然后求解不等式(组).

$\because (2,1)\in E$，$\therefore (2-a)^2+3b\leqslant 6$， ①

又 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，故 $(1-a)^2+3b>0$， ②

$(3-a)^2+3b>12$， ③

由①+②，得 $a>-\dfrac{3}{2}$. ①+③，得 $a<-\dfrac{1}{2}$，$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$.

$\because a$ 是整数，$\therefore a=-1$. 把 $a=-1$ 代入①②得 $\begin{cases}(2+1)^2+3b\leqslant 6,\\(1+1)^2+3b>0,\end{cases}$

$\therefore -\dfrac{4}{3}<b\leqslant -1$. $\because b$ 是整数，$\therefore b=-1$. 综上所述：$a=-1,b=-1$.

以题说法 与几何有关的集合问题的求解方法主要是利用数形结合法和分类讨论法，搞清集合所表示的图形，对参数进行合理的分类是解决含参数集合问题的关键.

规律总结

研究集合问题，一定要理解集合的意义，看代表元素是数还是数对，代表元素是

我能成功

好的习惯一旦形成就是一种无形的力量。

数时，是函数关系中自变量的取值，还是因变量的取值，可与方程、不等式的解集、函数的定义域、值域联系；代表元素是数对时，可联系点的坐标，与平面中的点集(曲线)联系. 解决集合与方程、不等式、几何的问题时，尽量使用数形结合思想，借助数轴、直角坐标系或 Venn 图等工具，将抽象的代数问题具体化、形象化、直观化. 在解此类问题时，要注意$\varnothing$的特殊性，即空集虽空，但空有所用. 若空集为$\varnothing$，则有$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；$\varnothing\in\{\varnothing\}$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cup\varnothing=A$；$\varnothing\subseteq A$. 解题时若忽视$\varnothing$的存在，就会造成解题结果的残缺不全.

二 简易逻辑

天下典例

1. 等价转化法

典例 1 判断命题：若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根的逆否命题的真假.

典例分析 写出其逆否命题进行判断或直接判断原命题，因为原命题与逆否命题是等价的.

解法 1：因为 $m>0$，故 $m>0>-\frac{1}{4}$，可得 $4m+1>0$，

所以方程 $x^2+x-m=0$ 的判别式 $\Delta=4m+1>0$，

因而方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，

所以原命题"若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"为真.

又因为原命题与它的逆否命题等价，

所以命题"若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题也为真.

解法 2：原命题"若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题为"若 $x^2+x-m=0$ 无实根，则 $m\leqslant 0$". 因为 $x^2+x-m=0$ 无实根，所以 $\Delta=4m+1<0$. 故 $m<-\frac{1}{4}\leqslant 0$，则原命题的逆否命题为真.

> **技巧点拨**
> 利用四种命题中的等价关系，原命题与逆否命题是等价的，因此判断原命题可转化为判断其逆否命题. 互逆或互否的两个命题是不等价的.

典例 2 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2+2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

典例分析 先将 p 和 q 转化为 $\neg p$ 和 $\neg q$，解出不等式的范围. 根据充分条件，必

目标决定方法——解题要有目标意识，在解题过程中要始终盯着目标，不要偏离解题方向。

我能成功

要条件与集合的关系即可求解.

解:由 $\neg p$: $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|>2$,得 $\neg p$: $x\in A=\{x|x>10$ 或 $x<-2\}$.

由 $\neg q$: $x^2+2x+1-m^2>0(m>0)$ 得 $\neg q$: $x\in B=\{x|x>m-1$ 或 $x<-1-m\}$.

由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,得 $B\subsetneqq A$,故 $\begin{cases}m>0,\\-1-m\leqslant-2,\\-1+m\geqslant10,\end{cases}$ $\therefore$ $m\geqslant11$,

即实数 m 的取值范围是 $m\geqslant11$.

以题说法 利用充要条件与集合之间的关系,将充要条件问题转化为集合之间的包含关系,列不等式(组)进而得解.如果 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件;如果 $B\subseteq A$,则 A 是 B 的必要条件;如果 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.

2. 充分、必要条件与四种命题的整合

典例 3 平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是(　　)

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同　　B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两向量中至少有一个为零向量

C. $\exists\lambda\in\mathbf{R},\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$　　D. 存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

典例分析 A 中,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线;但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不一定同向,因此 A 不是充要条件.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两向量中至少有一个为零向量,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线;但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不一定是零向量,如 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(2,4)$,从而 B 不是充要条件.

当 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 一定共线;但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时,若 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 就不成立,从而 C 也不是充要条件.

对于 D,假设 $\lambda_1\neq0$,则 $\boldsymbol{a}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$,因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线;反之,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}=\frac{n}{m}\boldsymbol{b}$,即 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}=0$.令 $\lambda_1=m,\lambda_2=-n$,则 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=0$.故选 D.　　答案:D

典例 4 设命题 p: $2x^2-3x+1\leqslant0$;命题 q: $x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant0$,若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求实数 a 的范围.

典例分析 涉及求参数时,可利用命题的等价性进行转化,从集合的包含、相等关系上来考虑制约的关系.

解:由 $2x^2-3x+1\leqslant0$,得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$,记 $A=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\right\}$.由 $x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant0$,得 $a\leqslant x\leqslant a+1$,记 $B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$.由 $\neg q\Rightarrow\neg p$,$\neg p\nRightarrow\neg q$,即 $p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,$\therefore$ $A\subsetneqq B$,则 $\begin{cases}a+1\geqslant1,\\a<\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore$ $0\leqslant a<\frac{1}{2}$.

谜语 1:老爷爷参加跑步比赛(打一数学名人)

我能成功

以题说法 充要条件揭示了命题的条件与结论之间的关系.当判断充要条件较难时,可根据原命题与逆否命题的等价性进行转化,如若 $p\Rightarrow q$ 为真,则 $\neg q\Rightarrow \neg p$ 为真,充要条件是四种命题关系的深化,常常整合后一起进行考查.

3. 类比推理法

典例 5 (江苏常州模拟)根据两类不同事物之间具有类似(或一致)性,推测其中一类事物具有与另一类事物类似(或相同)的性质的推理,叫做类比推理.请用类比推理完成下表:

平　面	空　间
三角形的两边之和大于第三边	四面体的任意三个面的面积之和大于第四个面的面积
三角形的面积等于任意一边的长度与这边上高的乘积的$\frac{1}{2}$	三棱锥的体积等于任一底面的面积与这底面上的高的乘积的$\frac{1}{3}$
三角形的面积等于其内切圆半径与三角形周长乘积的$\frac{1}{2}$	

典例分析 从平面到空间的类比推理中,长度类比成面积,面积类比成体积,圆类比成球.

解:三棱锥的体积等于其内切球半径与三棱锥表面乘积的$\frac{1}{3}$.

以题说法 类比推理的一般步骤:①找出两类事物之间的相似性或一致性;②用一类事物的性质去推测另一类事物的性质,得出一个明确的命题(猜想);③一般地,事物之间的各个性质之间并不是孤立存在的,而是相互制约的.如果两个事物在某些性质上相同或类似,那么它们在另一些性质上也可能相同或类似,类比的结论可能是真的;④在一般情况下,如果类比的相似性越多,相似的性质与推测的性质之间越相关,那么类比得出的命题就越可靠.

4. 演绎推理法

典例 6 (石家庄模拟)已知函数 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}(a>0,a\neq1)$.

(1)证明:函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称;

(2)求 $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ 的值.

典例分析 证明对称性可证明图象上任意一点 (x,y) 关于 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称的点

谜语 2:医生提笔(打一数学名词)

我能成功