

最后24小时轻松过关

名师押题 年年命中
预测考点 精确定位
全真模考 突破高分

新大纲

硕士研究生入学统一考试

模拟试卷及解答

数学二和数学四

赵达夫 刘晓 龚漫奇 编

2003



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

硕士研究生入学统一考试模拟试卷及解答

数学一和数学二

(2003)

赵达夫 刘晓 龚漫奇 编



天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学统一考试模拟试卷及解答/赵达夫,
刘晓,龚漫奇编. —天津:天津大学出版社,2003.1

ISBN 7-5618-0965-4

I . 硕… II . ①赵… ②刘… ③龚… III . 高等数
学 — 研究生 — 入学考试 — 试题 IV . 013 — 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 091542 号

组稿编辑 杨秀雯 郭建国
责任编辑 杨秀雯 赵淑梅
技术设计 油俊伟
封面设计 谷英卉

出版发行 天津大学出版社
出版人 杨风和
地址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经销 全国各地新华书店
开本 185mm × 260mm
印张 11.25
字数 281 千
版次 2003 年 1 月第 1 版
印次 2003 年 1 月第 1 次
印数 1—5 000
定 价 18.00 元

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(一)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = f(e^x)e^{f(x)}$, 其中 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 则 $y' =$ _____.

(2) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x (\cos x - \sin x)} dx =$ _____.

(3) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在点 $x=4$ 处收敛, 在 $x=-2$ 处发散, 则尚不能判定该幂级数是否收敛的整数点为 _____.

(4) 已知 5 阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

则 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$ 分别为 _____, 其中 $A_{4j} (j=1, 2, 3, 4, 5)$ 是行列式 D_5 中第 4 行第 j 列中元素的代数余子式.

(5) 某批产品的废品率为 p , 现从这批产品中任意取出 4 件, 已知至少有 1 件次品的概率为 0.343 9, 则这批产品的次品率 $p =$ _____.

(6) 设总体 $X \sim N(\mu, 0.4^2)$, $(x_1, x_2, \dots, x_{16})$ 是从中抽取的一个样本的样本观测值, 算得 $\bar{x} = 10.12$, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 _____.

(已知: $z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645$)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 a 为常数, 则极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a}$

(A) 为无穷大.

(B) 不存在但不是无穷大.

(C) 存在.

(D) 结果与 a 的取值有关.

【 】

(2) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则二重积分 $I = \iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$ 可以化成累次积分为

(A) $4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x^2 + y^2) dy$.

(B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r f(1) dr$.

(C) $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r f(r^2) dr$.

(D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r f(r) dr$.

(3) 函数 $y = -\sin x + C$ (C 为任意常数)

(A) 不是微分方程 $y'' = \sin x$ 的解.

(B) 是微分方程 $y'' = \sin x$ 的通解.

(C) 是微分方程 $y'' = \sin x$ 的特解.

(D) 不满足上述(A)、(B)、(C)中的任意一项.

【 】

(4) 设 A 为给定的 $m \times n$ 矩阵, b 为给定的 m 元列向量, 考虑线性方程组 $Ax = b$, 则下列命题正确的是 _____.

(A) 若 $Ax = b$ 有无穷多组解, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.

(B) 若 $Ax = b$ 有无穷多组解, 则 $Ax = 0$ 有非零解.

(C) 若 $Ax = 0$ 仅有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.

(D) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多组解.

【 】

(5) 设 A, B 为同阶可逆矩阵, 则

(A) $AB = BA$.

(B) 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

(C) 存在可逆矩阵 C , 使 $C^T AC = B$.

(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使 $PAQ = B$.

【 】

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则以下结论正确的是

(A) $X = Y$.

(B) $P\{X = Y\} = 1$.

(C) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.

(D) $P\{X = Y\} = 0$.

【 】

三、(本题满分 10 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2x} |t-x| \sin t dt}{x^3}$.

四、(本题满分 10 分)

设密度为 1 的流体的流速 $\mathbf{v} = xz^2\mathbf{i} + \sin x\mathbf{k}$. 曲面 S 是由曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1+z^2} (1 \leq z \leq 2), \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角. 求单位时间内流体流向曲面 S 正侧的流量 Q .

五、(本题满分 12 分)

设 a, p, λ 为常数, 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n^p (\ln n)^\lambda}$ 的敛散性. 收敛时, 指出是绝对收敛还是条件收敛.

六、(本题满分 12 分)

若函数 $f(x, y, z)$ 对任意的 $t > 0$ 满足关系式 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$, 则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数. 设 $f(x, y, z)$ 可微, 试证:

$$f(x, y, z) \text{ 是 } k \text{ 次齐次函数} \Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = kf(x, y, z).$$

七、(本题满分 12 分)

计算曲线积分

$$\oint_C 2yzdx + (2z - z^2)dy + (y^2 + 2xy - 3y)dz,$$

其中 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 3(x - y)^2 + (x + y - 2z)^2, \end{cases}$ 且从原点向 C 看去时, C 的方向沿顺时针方向.

八、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$. 证明在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

九、(本题满分 13 分)

已知向量 $\alpha_1 = [1, 4, 0, 2]^T$, $\alpha_2 = [2, 7, 1, 3]^T$, $\alpha_3 = [0, 1, -1, a]^T$, $\beta = [3, 10, b, 4]^T$.

(1) 当 a, b 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(2) 当 a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并求出全部表示式.

x	0	0.5	0.75	0.86	0.97	1
$\Phi(x)$	0.5	0.691 5	0.779 4	0.805 1	0.832 0	0.841 3

十、(本题满分 10 分)

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 特征值为 1, 2, -1, 矩阵 A 属于特征值 1 和 2 的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 和 $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$. 试用 A 的特征向量表示向量 $\beta = (-1, 8, -1)^T$, 并求 $A^{100}\beta$.

十二、(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{1}{N} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

其中 N 是未知的正整数, $(X_1, \dots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本.

(1) 试求 N 的极大似然估计量.

(2) 某单位的自行车车棚内存放了 N 辆自行车, 其编号分别为 1, 2, 3, $\dots$, N , 假定职工从车棚中取出自行车是等可能的. 某人连续 12 天记录下他观察到的取走的第一辆自行车的编号为

12, 203, 23, 7, 239, 45, 73, 189, 95, 112, 73, 159,

试求 N 在上述样本观测值下的估计值.

十一、(本题满分 9 分)

某科统考的考试成绩 X 近似地服从正态分布 $N(70, 10^2)$, 第 100 名的成绩为 60 分, 问第 20 名的成绩约为多少分?

附: 标准正态分布表(部分):

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(二)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导,且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{(x-1)^2} = 3$, 则 $f(1) + f'(1) + f''(1) =$ _____.

(2) $\int e^{|x|} dx =$ _____.

(3) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是非齐次线性微分方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)$$

的三个线性无关的特解,其中 $P_1(x), P_2(x), Q(x)$ 为已知的连续函数,则所给方程的通解 $y(x) =$ _____.

(4) 设 4×4 矩阵

$$A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 都是 4 维列向量,且已知行列式 $|A| = 4, |B| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____.

(5) 已知随机变量 $X \sim N(3, 4)$, 随机变量 Y 服从指数分布,其密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y} = \frac{1}{2}$, 又设 $Z = 3X - 4Y$, 则随机变量 Z 的方差 $D(Z) =$ _____.

(6) 设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布, $\lambda > 0$ 为未知参数. $(X_1, \dots, X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本,则参数 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda} =$ _____.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.
(C) 必要条件但非充分条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

【 】

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=2$ 时条件收敛,则对于此幂级数的收敛半径 R ,

- (A) 只能确定 $R \geq 2$. (B) 只能确定 $R \geq 4$.
(C) 只能确定 $R \leq 4$. (D) 能确定 $R = 4$.

【 】

(3) 设 S 为球面 $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ 的外侧, $S_{\neq}$ 为上半球面 $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, z \geq 0$

的上侧,则正确的是

(A) $\iint_S y^3 dx dy = 0.$

(B) $\iint_S y^3 dx dy = 2 \iint_{S_{\neq}} y^3 dx dy.$

(C) $\iint_S z^3 dx dy = 0.$

(D) $\iint_S z^3 dz dx = 2 \iint_{S_{\neq}} z^3 dz dx.$

【 】

(4) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$.
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.
(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

【 】

(5) n 阶矩阵 A 具有 n 个不同特征值是 A 与对角阵相似的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 必要而非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【 】

(6) 设 A, B 为两个随机事件,且 $A \subset B, P(B) > 0$, 则下列选项必然正确的是

- (A) $P(A) < P(A|B)$. (B) $P(A) \leq P(A|B)$.
(C) $P(A) > P(A|B)$. (D) $P(A) \geq P(A|B)$.

【 】

三、(本题满分 8 分)

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定 y 是 x 的隐函数 $y = y(x)$, 其中 F 具有连续的二阶偏导数,且 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. 证明

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^3}.$$

四、(本题满分 12 分)

在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线,使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$.

试求 A 点的坐标和该图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V .

五、(本题满分 12 分)

试将 $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 dy \int_0^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2) dz$ 化为球坐标系下的累次积分,其中 f 为连续函数, $b > a > 0$.

六、(本题满分 12 分)

设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\widehat{OA}$,对于 $\widehat{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$,曲线弧 $\widehat{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2 ,求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

七、(本题满分 12 分)

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

(1) 证明: $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$;

(2) 计算 $\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln \frac{1}{x} dx$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 分别满足下列关系式:

$$u_1' = a(x)u_1 + v(x), u_1(0) = C,$$

$$u_2' \leq a(x)u_2 + v(x), u_2(0) = C,$$

其中 $a(x), v(x)$ 在 $x \geq 0$ 上连续, C 为常数. 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $u_2(x) \leq u_1(x)$.

九、(本题满分 8 分)

设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

十、(本题满分 10 分)

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

矩阵 $B = (kE + A)^2$, 其中 k 为实数, E 为单位矩阵. 求对角矩阵 Λ , 使得 B 与 Λ 相似; 并求 k 为何值时, B 为正定矩阵.

十一、(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且 $P\{XY=0\}=1$. 求: (1) X 与 Y 的联合分布律; (2) X 与 Y 是否相互独立, 为什么?

十二、(本题满分 9 分)

设总体 X 服从区间 $(0, \theta)$ 上的均匀分布, $(X_1, \dots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本. 证明:

- (1) 估计量 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 与 $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 都是未知参数 θ 的无偏估计;
- (2) $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(三)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} =$ _____.

(2) 设 $f(x)$ 连续,且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{y^4 - 2xy}$ 的通解为 _____.

(4) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是一组基,则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4$

的过渡矩阵 $C =$ _____.

(5) 袋中有 5 张卡片,每张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 5, 从中不放回地取出 3 张卡片, 则取到的 3 张卡片中最大数与最小数之差等于 3 的概率为 _____.

(6) 设随机变量 $X \sim N(1, 4)$, 随机变量 Y 服从参数 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的指数分布, 其密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

而且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y} = \frac{1}{2}$, 则 $\text{cov}(X, Y) =$ _____.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 正确的是

- (A) 如 y_n 是无穷大, 则 x_n 是无穷小.
- (B) 如 y_n 是无穷大, 则 x_n 是无穷大.
- (C) 如 x_n 是无穷小, 则 y_n 是无穷小.
- (D) 如 y_n 是无穷小, 则 x_n 是无穷小.

【 】

(2) 设函数 $r(\theta)$ 可导且 $r(\theta) > 0$, 则在极坐标系中, 由两根射线 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 以及曲线

$C: r = r(\theta), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 所围图形绕极轴旋转一周所生成的旋转体的体积 $V =$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r(\theta) \cdot 2\pi r(\theta) \cdot r(\theta) d\theta.$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r(\theta) \cdot 2\pi r(\theta) \cos \theta \cdot r(\theta) d\theta.$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r(\theta) \cdot 2\pi r(\theta) \sin \theta \cdot r(\theta) d\theta.$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (r(\theta) \sin \theta)^2 \cdot (r(\theta) \cos \theta)' d\theta.$

【 】

(3) 设 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. 则三重积分 $\iiint_{\Omega} (e^x + e^y + e^z) dV =$

(A) $\iiint_{\Omega} 3e^z dV.$

(B) $\iiint_{\Omega} (2e^z + e^y) dV.$

(C) $\iiint_{\Omega} 3e^x dV.$

(D) $\iiint_{\Omega} (2e^x + e^z) dV.$

【 】

(4) 设 n 维列向量组

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

($m < n$) 线性无关, 则 n 维列向量组

(II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$

线性无关的充分必要条件是

- (A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示.
- (B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.
- (C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价.
- (D) 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 等价.

【 】

(5) 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则二次型 $f = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)^2$ 是正定二次型的充分必要条件是

- (A) 行列式 $|A| = 0$.
- (B) 行列式 $|A| \neq 0$.
- (C) 行列式 $|A| > 0$.
- (D) 顺序主子式 $|A_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$.

【 】

(6) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{8}, & x = -1, \\ ax + b, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

又已知 $F\{X=1\} = \frac{1}{4}$, 则

(A) $a = \frac{5}{16}, b = \frac{7}{16}$.

(B) $a = \frac{7}{16}, b = \frac{9}{16}$.

(C) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

(D) $a = \frac{3}{8}, b = \frac{3}{8}$.

【 】

三、(本题满分 8 分)

求椭球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ 与锥面 $z^2 = 3x^2 + y^2$ 的交线在点 $M(1, -1, 2)$ 处的切线方程.

四、(本题满分 12 分)

计算 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} e^{-x^2} dx$.

五、(本题满分 12 分)

求 $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + y^2$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.

六、(本题满分 12 分)

计算下列曲线积分

$$\int_{\widehat{AMB}} [\varphi(y) \cos x - \pi y] dx + [\varphi'(y) \sin x - \pi] dy,$$

其中 $\widehat{AMB}$ 为连接点 $A(\pi, 2)$ 与点 $B(3\pi, 4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线, 且该路线与线段 $\overline{AB}$ 所围图形的面积为 2.

七、(本题满分 12 分)

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ 的和.

八、(本题满分 10 分)

位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上距原点 1 个单位的 A 点处的敌舰发射制导鱼雷,且鱼雷永远对准敌舰,设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线行驶,又设鱼雷的速度是敌舰的 5 倍,求鱼雷的轨迹曲线方程及敌舰行驶多远时,将被鱼雷击中.

九、(本题满分 8 分)

设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times p, p \times s$ 矩阵,而且秩 $r(A) = n, r(C) = p$, 及 $ABC = \mathbf{0}$, 证明: $B = \mathbf{0}$.

十、(本题满分 10 分)

求一个正交变换,化二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

成标准形.

十一、(本题满分9分)

设随机变量 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布, $Y = 2X^2 + 1$, 试求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$, 并计算概率 $P\{Y < 2\}$.

十二、(本题满分9分)

设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $(X_1, \dots, X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个简单随机样本 ($n > 1$). 令

$$\hat{\lambda}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\lambda}_2 = n[\min(X_1, \dots, X_n)],$$

试比较关于 λ 的两个估计量 $\hat{\lambda}_1$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 哪个更有效?

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(四)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 微分方程 $y'' + 4y = x \cos 2x$ 的待定特解 $y^* = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\int_0^1 \ln(1-x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知 $|A| = \begin{vmatrix} -3 & -a & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -b & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则矩阵 $B = \begin{vmatrix} 5 & a & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$ 有一个特征值 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设 $P(A) = 0.8, P(A-B) = 0.2$, 则 $P(\overline{AB}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\alpha > -1$ 为未知参数, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本. 则参数 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 下述关于 $f'_+(a)$ 和 $f'(a+0)$ 的结论中,正确的是

(A) 如 $f'_+(a)$ 存在, 则 $f'(a+0)$ 存在.

(B) 如 $f'(a+0)$ 存在, 则 $f'_+(a)$ 存在.

(C) 如 $f'_+(a)$ 存在, 且 $f(a+0) = f(a)$, 则 $f'(a+0) = f'_+(a)$.

(D) 如 $f'(a+0)$ 存在, 且 $f(a+0) = f(a)$, 则 $f'_+(a) = f'(a+0)$.

[]

(2) 已知直线 $L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{5}$ 与直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则

(A) L_1 与 L_2 平行.

(B) L_1 与 L_2 垂直.

(C) L_1 与 L_2 相交但不垂直.

(D) L_1 与 L_2 是异面直线但不垂直.

[]

(3) 下列四个级数中, 发散的级数是

(A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}.$

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sin n^2) \ln^3 n}{\sqrt[n]{n^4 + 1}}.$

(D) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{\ln n} \right) \pi \right].$

[]

(4) 记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

[]

(5) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{未标出处为 } 0),$$

则 A 与 B

(A) 合同且相似.

(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.

(D) 不合同也不相似.

[]

(6) 设 X 与 Y 为两个随机变量, 且

$$P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, \quad P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$

(A) $\frac{16}{49}.$

(B) $\frac{5}{7}.$

(C) $\frac{3}{7}.$

(D) $\frac{40}{49}.$

[]

三、(本题满分 8 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中区域 $D: x^2 + y^2 \leq Rx (R > 0)$.

四、(本题满分 12 分)

设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

五、(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

其中 S 是 $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} (z \geq 0)$ 的上侧.

六、(本题满分 12 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{x_0} (2+t^2)e^{t^2} dt}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$

确定 A 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内任意次可导, 并求 $f^{(8)}(0), f^{(9)}(0)$.

七、(本题满分 12 分)

已知在 $x > -1$ 上有定义的二阶可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0 \text{ 和 } f(0) = 1.$$

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上连续, 在 $x=0$ 可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 求证: $\forall x \in (0, L), \exists \theta \in (0, 1)$ 使 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$;

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.

九、(本题满分 8 分)

设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^2 = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 证明矩阵秩的关系式

$$r(A + E) + r(A - E) = n$$

十、(本题满分 10 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$, 及 $\beta = (1, 1, b+3, 5)$.

- (1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?
- (2) a, b 为何值时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一线性表示式? 并写出该表示式.

十一、(本题满分 9 分)

验收一批共有 60 件的产品. 按照验收规则, 随机抽取 3 件, 只要 3 件中有一件是不合格品, 就拒收整批产品. 设验收时不合格品被误判为合格品的概率为 0.03; 而合格品被误判为不合格品的概率为 0.01. 如果这 60 件产品中有 3 件为不合格品, 问这批产品被接收的概率是多少?

十二、(本题满分 9 分)

(1) 设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布, 其中 $\lambda > 0$ 为未知参数, $(X_1, \dots, X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本, 试求 $p_0 = P\{X=0\}$ 的极大似然估计量.

(2) 某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从 Poisson 分布, 求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计. 使用下表中的 122 个观测值. 下表中, r 表示一扳道员在某五年内引起严重事故的次数, s 表示观察到的扳道员的人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(五)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1)已知 $(a \times b)^2 = 5, (a \cdot b)^2 = 3$, 则 $a^2 b^2 =$ _____.

(2)设 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}, \int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} dx =$ _____.

(3)将以 y 做因变量, x 做自变量的微分方程 $y'' + (4x + e^{2x})(y')^3 = 0$ 化为以 x 做因变量, y 做自变量的微分方程 _____.

(4)已知 $\lambda = 8$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的一个特征值, 则 $a =$ _____.

(5)设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且已知 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

(6)区域 D 是由直线 $y = x$ 及曲线 $y = x^2$ 所围成, 二维随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 则 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y) =$ _____.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)命题甲:若 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = a$.

命题乙:若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 不存在.

以下结论正确的是

- (A)甲正确,乙不正确. (B)甲、乙都不正确.
(C)乙正确,甲不正确. (D)甲、乙都正确.

【 】

(2)设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内二阶偏导数连续, 又记 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则下列关于 $f(x_0, y_0)$ 是否为极值的四个命题中, 错误的是

- (A)如 $AC - B^2 > 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 是极值.
(B)如 $f(x_0, y_0)$ 是极值, 则 $AC - B^2 \geq 0$.
(C)如 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.
(D)如 $f(x_0, y_0)$ 是极小值, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $A \geq 0$.

【 】

(3)下列命题正确的是

- (A)若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
(B)若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C)若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

(D)若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 条件收敛.

【 】

(4)设

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

则 3 条直线

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0,$$

(其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0 (i = 1, 2, 3)$) 交于一点的充要条件是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.
(C) 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$.
(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关.

【 】

(5)设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 则必有

- (A) $ACB = E$. (B) $CBA = E$.
(C) $BAC = E$. (D) $BCA = E$.

【 】

(6)设 $X_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的分布如下, 则

$$P\{X_i > E(X_i)\} \neq P\{X_i \leq E(X_i)\}$$

的是 _____.

- (A) $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$.
(B) X_2 服从区间 (a, b) 上的均匀分布.

(C) X_3 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

(D) X_4 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

【 】

三、(本题满分 8 分)

设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有二阶连续偏导数. 试证明