CAMBRIDGE

□ 组合数学丛书

Enumerative Combinatorics Volume 1

计数组合学(第一卷)

□ [美] Richard P. Stanley 著
□ 付 梅 侯庆虎 辛国策 杨立波 译

高等教育出版社
Higher Education Press

□ 组合数学丛书

Enumerative Combinatorics Volume 1

计数组合学（第一卷）

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2009-1965号

Enumerative Combinatorics (Volume 1)

Richard P. Stanley

Enumerative Combinatorics (*Volume 1*), 1st edition, ISBN: 9780521663519, by Richard P. Stanley, first published by Cambridge University Press 1997.

图书在版编目（CIP）数据

计数组合学. 第1卷/(美)斯坦利(Stanley, R. P.)著；付梅等译. —北京：高等教育出版社，2009. 6

书名原文：Enumerative Combinatorics. Volume 1

ISBN 978-7-04-026548-4

I. 计… II. ①斯… ②付… III. 组合数学 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 064269 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2009年6月第1版
印　　张	22.5	**印　　次**	2009年6月第1次印刷
字　　数	470 000	**定　　价**	42.00元

物料号　26548-00

序

令人遗憾的是, 一本书一经出版并开始它自己的生命之旅, 就无法再见证作者写作过程中曾遇到的各种痛苦的选择。面向哪类读者? 内容能否经得起推敲? 能否得到专家的认可? 是每一本书的作者必须面对的难题。多数作者常会面对书的内容清单陷入苦思冥想而迟迟不能落笔, 这些书也许永远不为人知。事实上, 此类突发奇想的作品在某些国家也能交付印刷 (虽然它们也未必列入作者的出版物中)。

压力是如此之大, 选择是如此的痛苦, 以至于作者要有莫大的勇气才能完成数学书籍的撰写。这其中又以组合数学最为困难, 即便是面向的读者乐意阅读且毫无偏见。一个孤立的特殊结果能否自成一节? 一个应用甚少初具雏形的新理论能否放心地插入到某一章中? 作者更应该注重什么, 生动有趣还是严谨刻板; 或者更应该强调算法?

Richard Stanley 很成功地突破了重重阻碍。他的书反驳了有人关于组合数学定理多, 理论却相对较少的看法。凭借对当前阶段热点理论的睿智判断, 从拓扑到计算机科学, 从代数到复变函数, 他选取各类大众化的例子并加以融合。相信读者永远不会对书中一个说明性的例证, 或是一个不符合 G. H. Hardy 惊喜标准的证明感到茫然无措。

对于那些带着组合问题来寻求我们帮助的同事, Stanley 选择的习题一定能为他们提供满意的参考资料。最值得称道的是, Stanley 的写作手法非常成功, 使得该书十分引人入胜, 每一位数学工作者都会乐于通篇阅读。

Gian-Carlo Rota

前言

计数组合学是计算有限集合 S 中元素的个数的学科。既然任何数学问题本质上都可归结为计数问题, 那么上述定义本身并未包含很多该学科的信息。对于真正的计数问题, S 中的元素通常具有相当简单的组合学定义而且几乎没有什么附加结构。S 往往很大, 我们考虑的基本问题是计数 (或估计) S 的元素个数, 而非其它问题, 例如寻找某个特殊元。书中遍及许多基本问题的变形, 它们当然也属于计数组合学的范畴。

包含计数组合学在内, 组合学近些年的发展速度十分惊人。其中一个重要原因是, 组合数学作为计算机科学及其相关领域的一种工具发挥着基础性的作用。另外的原因是, 大约在 1964 年左右, G.-C. Rota 开始投入大量精力整合组合数学的各个分支, 尤其是计数理论, 使其跻身于现代数学研究的主流行列。此过程中, 由于在有限群理论、表示论、交换代数、代数几何及代数拓扑中的应用, 计数组合学得以深入探讨。

出于不同的目的, 本书服务于三类读者。首先, 本书可作为研究生涉猎一个迷人的数学领域的入门教程。对于本书的大部分内容, 线性代数基础, 或许再加上一学期的抽象代数课程是必要的前提, 第一章也适用于入门级的读者。其次, 本书可以为组合数学学者提供一般性的参考资料。尽管不可能涵盖计数组合学的所有内容, 我们还是尽量把一些重要的课题写入了书中。最后, 本书可以帮助非组合数学专业的学者解决研究工作中遇到的组合问题。根据我与不同领域的数学家进行过的无数次交流探讨的经验, 这种情况时有发生。为此, 在书中我特意对这些来自不同数学分支的计数课题进行了汇总。

每一章后面的习题是本书三个目的得以实现的重要环节。以本书为课本的学生

可以尝试解答相对简单的习题 (难度系数介于 1– 到 3–)。对于难度更大的习题, 我们不是一定要求给出解答 (虽然有些读者十分乐意接受挑战), 而是希望通过它们了解本书没有直接论及的领域。这些相对较难的习题有助于读者认识计数组合学的研究深度和广泛应用, 特别是在第三章中, 先入为主地认为偏序集不过是一种简单的簿记工具, 是绝对行不通的。几乎所有的习题都给出了解答或参考文献。

参考文献和引用部分, 我希望尽可能做到一目了然。若文献来自于另外一章, 引用时会标明相关章的序号。例如, [**3.16**] 是指第三章的第 16 篇参考文献。在正文中我没有加入外部文献的引用, 它们只出现在每一章最后的注记中。每章都有自身的参考文献列表。而与某习题相关的一些参考文献, 则会在习题的解答中出现。

本书的写作得到了很多人的帮助。我要特别感谢 G.-C. Rota, 他引领我进入了充满乐趣的计数组合学领域, 并一直激励着我。这里必须要感谢 Donald Knuth, 他关于计算机科学的卓越专著让我受益匪浅, 为本书提供了大量高难度的习题。下列人曾给过我很多有价值的建议, 谢谢他们: Ed Bender, Lou Billera, Anders Björner, Thomas Brylawski, Persi Diaconis, Dominique Foata, Adriano Garsia, Ira Gessel, Jay Goldman, Curtis Greene, Victor Klee, Pierre Leroux, 以及 Ronald C. Mullin. 此外, 本书借鉴了一些人的想法, 他们的名字出现在注记或习题中。感谢 Rudy Aguirre, Louise Balzarini, Margaret Beucler, Benito Rakower 和 Phyllis Rudy, 没有他们就没有这样出色的印刷版本的手稿。最后感谢 Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software 的 John Kimmel, 谢谢他在本书创作过程中的支持和鼓励, 同时谢谢 Phyllis Larimore 细心的编辑。

感谢麻省理工大学、美国国家自然科学基金以及 Guggenheim 基金对本书写作的资助。

Richard Stanley

译者序

本书作者 Richard P. Stanley 现任美国麻省理工学院教授、美国国家科学院院士。Stanley 教授是 2006 年国际数学家大会一小时报告人，他成功地将交换代数、代数几何、代数拓扑及群表示论等应用到组合数学研究中，取得了许多深刻的成果。两卷经典著作《计数组合学》应该说是 Stanley 教授对自己长期研究成果的总结，当然也是近些年计数组合数学领域发展状况的缩影。

本书是《计数组合学》第一卷的中文版，共分为四章。第一章介绍了计数组合学的基本知识，包括生成函数、集合与重集、排列统计量以及组合计数的十二模式等；第二章介绍了计数组合学的筛法理论，包括容斥原理及其在限位排列问题、Ferrers 棋盘问题、V-分拆以及单峰序列中的应用，另外还有对合原理及其在行列式中的应用；第三章介绍了偏序集理论，包括偏序集的基本概念、Möbius 反演理论、二项型偏序集理论等。第四章介绍了有理生成函数理论，包括单变量有理幂级数、P-分拆、齐次线性 Diophantine 方程组和转移矩阵法等。本书的选材几乎覆盖了基本计数组合学的所有理论，参考文献非常翔实。特别值得一提的是，书中提供了大量的不同难度的习题，其中包括一些未解决的公开问题，可以帮助读者更好地学习和理解相关的理论。

能够翻译名家著作，并且可以通过译本向国内的数学学者和研究生介绍计数组合学的发展及现状，我们深感荣幸，也十分珍惜此次机会。整个翻译过程远非起初考虑的那么轻松，能够坚持下来，除了译者自身对学科的热爱之外，很多人的支持和帮助才是最大的动力。这里特别感谢陈永川教授，他一直关注着本书的进展，并给出了大量指导性的意见。感谢 Richard Stanley 教授，他在来华访问期间热情地回答了我们在英语理解方面的疑问。本书前三章的翻译初稿是于 2006 年秋季讲授组合计数

课程时形成的, 我们要感谢参与的研究生, 他们是钟哲元、黄文达、高星强、顾春燕、韩思伟、王也洲、曲晓英、瞿勇科、刘小川、王蕊、郭龙、赵飞燕、吴泽芳、杨旭、高尉、高志明、贾斌、李宴美、林丽双、赵海健、李萃萃、马君、赵晶、陈震霆、崔日升, 另外还要感谢王国亮、吕仑、周岳、陈小锋, 他们参与了第四章的翻译。本书由高等教育出版社引进版权, 编辑赵天夫同志一直耐心地回答我们的种种问题, 衷心感谢他为本书的出版所做出的努力。最后, 感谢国家自然科学基金、科技部 973 计划、教育部 985 工程和南开大学对本书出版的资助。

对 Richard Stanley 教授截止到 2008 年 10 月的纠错, 本译文都做了相应修改。由于水平所限, 文中难免会有诸多错误和疏漏之处, 敬请同行和读者批评指正。

译者
2008 年 12 月 31 日
南开大学组合数学中心

记号

$\mathbb{C}$	复数
$\mathbb{N}$	非负整数
$\mathbb{P}$	正整数
$\mathbb{Q}$	有理数
$\mathbb{R}$	实数
$\mathbb{Z}$	整数
$[n]$	集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (所以 $[0] = \varnothing$)
$[i, j]$	对于整数 $i \leq j$, 集合 $\{i, i+1, \ldots, j\}$
$\lfloor x \rfloor$	$\leq x$ 的最大整数
$\lceil x \rceil$	$\geq x$ 的最小整数
$\mathrm{card}\, X$,$\#X$, $\lvert X \rvert$	均表示有限集 X 的元素个数
$\{a_1, \ldots, a_k\}_<$	集合 $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$, 其中 $a_1 < \cdots < a_k$.
δ_{ij}	Kronecker δ 函数, 若 $i = j$ 则函数值为 1; 否则为 0
$:=$	由定义等于
$\mathrm{im}\, A$	函数 A 的像
$\ker A$	同态或线性变换 A 的核
$\mathrm{tr}\, A$	线性变换 A 的迹
$GF(q)$, $\mathbb{F}_q$	q 元有限域 (同构意义下唯一)
$\coprod_i V_i$	向量空间 (或者模, 环等) V_i 的直和
$R[x]$	整环 R 上关于不定元 x 的多项式环

$R(x)$	R 上关于 x 的有理函数环 (当 R 为域时, $R(x)$ 是 $R[x]$ 的商域)
$R[[x]]$	关于 x 的形式幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 构成的环, 其中 a_n 属于 R
$R((x))$	关于 x 的形式 Laurent 级数 $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ 构成的环, 其中 a_n 属于 R (当 R 是域时, $R((x))$ 是 $R[[x]]$ 的商域)

目录

第一章　什么是计数组合学

§1.1　如何计数

计数组合学的基本问题是计算一个有限集合的元素个数问题。通常是给定一个由有限集合 S_i 组成的无限集族, 其中 i 取遍某一个指标集 I (如非负整数 $\mathbb{N}$), 我们希望能够 "同时" 计数每一个集合 S_i 的元素个数 $f(i)$。这直接导致了一个哲学上的问题: "计数" 集合 S_i 的元素个数究竟是什么意思? 这个问题没有确定性的回答。只有通过经验, 人们才逐步明白所谓 "确定" 一个计数函数 $f(i)$ 究竟是什么意思。计数函数 $f(i)$ 可以由几种标准方式给出。

1. $f(i)$ 最令人满意的形式是完全显式的闭公式, 它仅涉及熟知的函数且不出现求和符号。但是这样的公式只在很少的情况下才存在。当 $f(i)$ 的公式越来越复杂时, 我们就越来越难以接受把它们称为 "确定" 了 $f(i)$。让我们先考虑下面的例子。

例子 1.1.1　对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $f(n)$ 表示集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集合的个数。则 $f(n) = 2^n$, 任何人都会同意这是 $f(n)$ 的一个令人满意的公式。

例子 1.1.2　假设 n 个人将他们的 n 顶帽子交给一个检查帽子的人。令 $f(n)$ 表示将帽子返还这些人的时候, 每个人都得到一顶帽子但都没有收到他自己的帽子的方法数。例如, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$。我们将在第二章得到

$$f(n) = n! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i / i!. \tag{1}$$

$f(n)$ 的这个公式不如例 1.1.1 中那么漂亮, 但是由于没有更为简单的答案, 我们愿意接受 (1) 式作为令人满意的公式。事实上, 一旦理解了 (1) 式是怎么得到的 (利用

容斥原理), 就会很容易的理解 (1) 式中每一项的组合意义。这使得我们能够直觉地 "理解" (1) 式, 从而增加了接受它的意愿。还有一点需要说明的是从 (1) 式容易得知 $f(n)$ 是最接近 $n!/e$ 的整数。这显然是一个简单的显式公式, 但是这个公式的缺点在于它是 "非组合的", 也就是说除以 e 然后找到和它最接近的整数没有明显的组合意义。

例子 1.1.3 令 $f(n)$ 表示由 0 和 1 构成的, 每行每列有三个 1 的 $n \times n$ 矩阵 M 的个数。例如, $f(0)=1, f(1)=f(2)=0$, $f(3)=1$。目前已知的 $f(n)$ 最具体的公式是

$$f(n) = 6^{-n} \sum \frac{(-1)^\beta n!^2 (\beta+3\gamma)! 2^\alpha 3^\beta}{\alpha! \beta! \gamma!^2 6^\gamma}, \tag{2}$$

其中求和取遍方程 $\alpha+\beta+\gamma=n$ 的 $(n+2)(n+1)/2$ 个非负整数解。通过这个公式, 我们很难看透 $f(n)$ 的性质。但是与仅用组合定义相比, 这个公式可以更快速地计算出 $f(n)$ 的值。因此尽管有些勉强, 我们还是认为 (2) 式 "确定" 了 $f(n)$。当然, 如果以后有人能证明 $f(n)=(n-1)(n-2)/2$ (显然不可能), 那么我们对 (2) 就不再感兴趣了。

例子 1.1.4 在有些文献中 ("永远不为人知") 有些计数函数 $f(n)$ 计算取值时需要列出所有的 (或者几乎所有的) 被计数的 $f(n)$ 个对象! 这样的一个 "公式" 是完全没有意义的。

2. 可以用前面已经计算过的 $f(j)$ 来给出 $f(i)$ 的一个递推式, 那么对于任何指定的 $i \in I$, 递推式就给出了一个简单的程序来计算 $f(i)$。例如, 令 $f(n)$ 表示 $[n]$ 的不包含两个连续整数的子集合的个数。例如, $n=4$ 时符合条件的子集有 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, 于是 $f(4)=8$。容易看出当 $n \geq 2$ 时, $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$。这样如果去计算例如 $f(20)$ 就很容易。另一方面, 可以证明

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}),$$

其中 $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \bar{\tau} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。这是一个显式解, 但是由于它涉及无理数, 所以很难判断这个公式是否比递推公式 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ 更好。

3. 可以给出对 $f(i)$ 的估计。如果 $I=\mathbb{N}$, 这个估计常常是以*渐近公式* $f(n) \sim g(n)$ 的形式给出, 其中 $g(n)$ 是一个我们 "熟知的函数"。记号 $f(n) \sim g(n)$ 表示 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)=1$。例如, 令 $f(n)$ 为例 1.1.3 中的计数函数, 可以证明

$$f(n) \sim e^{-2} 36^{-n} (3n)!.$$

在很多时候这个估计要优于 "显式" 公式 (2)。

4. 计算 $f(i)$ 的最有用的但也是最难理解的方法是给出它的*生成函数*。在本章中我们不会给出严格的抽象的理论, 而是要给出一些非正式的讨论以及给出一些例

子。不严格地说, 我们可以把生成函数看作表示计数函数 $f(i)$ 的 "载体"。通常这个载体是**形式幂级数**。其中最常见的两类生成函数是**一般生成函数**和**指数生成函数**。如果 $I=\mathbb{N}$, 则 $f(n)$ 的一般生成函数是形式幂级数

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n,$$

而其指数生成函数是形式幂级数

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n/n!.$$

(如果 $I=\mathbb{P}$, 正整数, 则上面的求和从 $n=1$ 开始。) 这些幂级数被称为 "形式的" 是因为我们并不关心字母 x 取什么值, 也不考虑收敛与发散的问题, x^n 和 $x^n/n!$ 这两个项只是表示 $f(n)$ 被放置的位置。如果 $F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, 则称 a_n 为 x^n 在 $F(x)$ 中的**系数**, 记为

$$a_n = [x^n]\,F(x) \quad \text{或者} \quad a_n = F(x)|_n.$$

类似地, 我们还可以处理有多个变量的生成函数, 如

$$\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} f(l,m,n)x^l y^m z^n/n!,$$

(可以认为对下标 l,m 是 "一般的", 对下标 n 是 "指数的"), 甚至可以有无穷个变量, 此时要求每一项只含有有限个变量。

如果生成函数只是计数函数的另一种表示方法, 为什么还要不厌其烦地研究生成函数? 原因在于我们可以对生成函数进行各种自然的、具有组合意义的运算。例如, 可以按照下面的规则让两个生成函数 (关于一个变量的)相加:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n$$

或者

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}\right) + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(a_n+b_n)x^n}{n!}.$$

类似地, 可以按照下面的规则将两个生成函数相乘:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, 或者

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{d_n x^n}{n!},$$

其中 $d_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ 而 $\binom{n}{i} = n!/i!(n-i)!$。注意到上述运算正是将生成函数视为遵守普通的代数规则所得到的结果，比如 $x^i x^j = x^{i+j}$。当幂级数在某个特定的 x 处收敛时，这些运算与函数的加法和乘法一致。这些运算还满足熟知的代数规则，如加法和乘法的结合律、交换律，乘法对加法的分配律，以及乘法的消去律 (即，若 $F(x)G(x) = F(x)H(x)$ 并且 $F(x) \neq 0$，则有 $G(x) = H(x)$)。事实上，所有系数为复数 a_n 的形式幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 组成的集合在上面定义的运算下构成一个 (交换) 整环。这个整环被记作 $\mathbb{C}[[x]]$。(事实上，$\mathbb{C}[[x]]$ 是很特殊的整环。对那些比较熟悉代数的读者来说，$\mathbb{C}[[x]]$ 还是主理想整环，从而是唯一因子分解整环。事实上，每一个 $\mathbb{C}[[x]]$ 的理想都形如 (x^n)，$n \geq 0$。从交换代数的观点看，$\mathbb{C}[[x]]$ 是一个一维完全正则局部环。这些代数性质不是我们这里所关心的内容。我们将从初等的角度出发讨论一些对我们有用的 $\mathbb{C}[[x]]$ 的性质。) 类似地，由 m 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_m$(m 可以是无穷) 的形式幂级数组成的集合记作 $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]$，构成一个唯一因子分解整环 (虽然 $m \geq 2$ 时不是主理想整环)。

$\mathbb{C}[[x]]$ 或者 $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]$ 中的代数运算的组合意义主要是通过经验来得到的。同样我们需要经验来判断一个问题应该用一般生成函数来处理还是用指数型生成函数来处理 (或者用我们将在后面一些章节讨论的其它类型的生成函数)。在 3.15 节，我们将会在某种程度上解释这些运算的组合意义，但是即便是那时经验仍然很重要。

如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是 $\mathbb{C}[[x]]$ 中满足 $F(x)G(x) = 1$ 的两个元素，则 (自然地) 记 $G(x) = F(x)^{-1}$。(1 是 $1+0x+0x^2+0x^3+\cdots$ 的缩写。) 对于 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$，容易看出 $F(x)^{-1}$ 存在 (此时必然唯一) 当且仅当 $a_0 \neq 0$。尽管我们并不把 $F(x)$ 看作 x 的函数，但还是"符号地"记 $a_0 = F(0)$。如果 $F(0) \neq 0$ 而 $F(x)G(x) = H(x)$，则 $G(x) = F(x)^{-1}H(x)$。更一般地，只要仅作用于满足 $F(0) \neq 0$ 的幂级数 $F(x)$，运算 $^{-1}$ 就满足所有我们熟悉的代数运算规则。例如 $(F(x)G(x))^{-1} = F(x)^{-1}G(x)^{-1}, (F(x)^{-1})^{-1} = F(x)$ 等等。类似的结果对 $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]$ 也同样成立。

例子 1.1.5 令 $(\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n)(1 - \alpha x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$，其中 α 是一个非零复数。则由幂级数的乘法的定义有

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \alpha^n - \alpha(\alpha^{n-1}) = 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

因此 $\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n = (1 - \alpha x)^{-1}$，也可以记为

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

得到这个公式我们并不惊讶，它正是 (一般形式下的) 几何级数的求和公式。

例 1.1.5 为我们提供了一个一般原理的示例。不严格地说，如果我们有一个涉及幂级数的等式，当幂级数被视为函数的时候成立 (变量取足够小的复数)，那么只要